ISSN 1881–6134

鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

数学教育における一般化に関する研究

～「正方形の個数」問題の分析を通して～

早田　透

vol.11, no.6
Mar. 2009

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第1章：研究の目的と方法

本章では研究の動機，及びそこから生まれた3つの研究課題

研究課題1：一般化はどのように分類されるか

研究課題2： 一般化はどのような構造によって特徴付けられるか

研究課題3： どの様な支援が一般化を達成するために有効であるか

に対して，どのような手法で研究を進めていくかを明らかにする.

1−1．研究の動機

数学を創る活動とはBishop（1991）によると，“適用する範囲を広げ，一般性を確保する事”であるということであり，即ち一般化と呼ばれる様なものである事が示唆された．では，一般化とはそもそも何を指すのかという事に興味を持ち，研究に取り組み始めた.

1−2．研究課題と目的

先行研究の分析から，一般化には構造と呼ばれるものが深く関わっている事が示唆されたが，どの様に分類され，それらの分類が一般化にどの様に関係しているか十分に研究されていない．そこで，本研究では

研究課題1：一般化はどのように分類されるか

研究課題2： 一般化はどのような構造によって特徴付けられるか

研究課題3： どの様な支援が一般化を達成するために有効であるか

を設定し，これらの解決する事を研究の目的とする.

1−3．研究方法

本研究では，研究課題を達成するために例題を分析して，研究課題1及び2を達成する．その上で，実際の学習指導場面を考えることで研究課題3を達成する.

1−4．本研究の意義

本研究で掲げた課題を解決する事によって，一般化という側面から数学を創る学習指導についての示唆を得る事が本研究の意義である.

1–1．研究の動機

初めに筆者が一般化について興味を覚えたのは，「そもそも一般化とは何であるか？」という疑問を覚えたからであった．数学において，一般であるという事は重要な価値であるとされており．一般化も同様に大切なものであると考えられている．

では，具体的にどの程度，またどの様に重要であるかをまず考えた．

その折，Bishop（Bishop,A 1991）による西洋数学の有する数学的な価値の分類に注目した．なぜ西洋数学かといえば，我が国において，今日の数学はほぼ西洋数学を基に構築されていると言ってもよいからである．

Bishopは“I have identified six clusters of values associated with certain qualities of Western Mathematical knowledge which I believe need consideration, and which are related to each other as three sets of complementary pairs. ”(pp.201)と西洋数学が持つ価値を6つの*cluster*に分けることができ，更に関連する3つの相補的な関係を持つグループに分けることが出来るとしている．ここでいう6つの*cluster*の1つに“progress”があり，それは“control”という*cluster*と対応するものだとされている．

“control”が現象を記述する事であるのに対して，“progress”は選択を行ったり変化をさせる事で適用する条件を広げ，一般性を確保することであり，それが西洋文化における数学の創造的な価値の根幹だとしている．即ち，一般性を確保すること，一般化が数学の創造的な活動において大きな割合を占めていることが示唆される．

2008年に公示された新学習指導要領においても“数学的活動”として創造的な側面が強調されている折，一般化について調べる事で学習指導における数学を作る活動の一側面が明らかになるのではないかと考え，研究に取り組み始めた．

1–2．研究の課題と目的

一般化についての先行研究を調べていく内に，中島健三（1981）に着目した．詳細は2章で述べるが，中島健三の一般化を調べていく内に『構造』と呼ばれる，問題に対して個々人が与えるものを保存する事こそが一般化であり，構造が一般化に深く関わっている事が示唆された．

しかし，中島健三の『構造』の捉え方がかなり広く，いくつかの種類の構造が存在する事を示唆しているにもかかわらず，その明確な分類がなされてないことが解った．

また，『構造』が何種類かに分類できるのであれば，それらの構造を基にした一般化もまた，同時に何種類かに分類できるのではないかと考えた．その様な分類を行う事で，実際の授業を編成していく際に，どの様な『構造』に着目するような授業を行えばよいかが明らかになる．

そこで，本研究では

研究課題1：構造はどのように分類されるものであるか

研究課題2：一般化は構造によってどの様に特徴付けられるか

を設定した．これらの課題を達成する事で，どの様な『構造』に着目するような授業を行えばよいかが明らかになるが，実際の学習指導場面においてはその様な『構造』を，最初から全員が把握できるということはまず考えられず，また仮にそうであるならば学習の必要が無い．

では，その様に一般化を十分に達成できない学習者に対してどの様な支援を行えばよいかを考えたとき，やはり『構造』が深く関わってくる事が考えられる．

そこで，研究課題1及び研究課題2に関連して

研究課題3：どの様な支援が一般化を達成するために有効であるか

を合わせて設定する．これらの3つの研究課題を達成する事を，本研究の目的としたい．

1−3．研究方法

研究課題1及び2はそれぞれ一般化の過程そのものに深く関わっているので，実際の一般化を扱った活動を手がかりとして考えていきたい．その為には実際の一般化を分析する必要があるので，本研究では何か1つの例題を設定して一般化する過程を分析する．（第3章）

ただし，一般化とは何かという前提無しに一般化を行うことは出来ないため，先行研究を基にある程度一般化とはどの様なものであるかを調べてから例題の一般化を分析したい．（第2章）

そして第3章における分析結果を基に，第3章と同一の問題場面を用いた一般化を志向した実際の授業を設計し，分析結果が実際の指導場面においてどの様な形で表れ，どの様に学習者に作用するかを考察したい．（第4章）

これらの過程を通し，研究課題1，研究課題2及び研究課題3の解決を試みる．

1−4．本研究の意義

本研究で設定した課題1を解決し，一般化のモデルを構築することにより，一般化を取り扱った授業中に学習者が行う活動を分類し，観察する事が可能になる．それにより，教師は授業を設計する際，目的に準じた学習者に期待する活動をより明確に設定できるようになり，また同時に課題3を解決する事から導かれる支援を用いる事で，学習者がよりよい一般化を行うことができる．

これにより，学習者自らが一般化を通して数学を創っていけるような授業設計が容易になり，それによって我が国の目指す活用の内，”新しい数学を創る”という面の一部分を明らかにしていくことが本研究における意義である．

第2章：一般化に関する先行研究分析

本章では，一般化に関する先行研究及び，そこで得られた重要な用語である“構造”についての先行研究について，中島健三（1981）及び，van Hiele（1986）を主として取り扱う．

先行研究の分析の結果，構造にはどの様な種類があり，それがどの様に一般化を特徴付けているかという点が不足していることが明らかになった．

2ー1：一般化についての先行研究

中島健三（1981）から，命題の適用範囲の広げ方は「一般化」と「拡張」に大別でき，一般化とは構造を保存する事である事が解った．

そこで，一般化を明らかにするために構造を調べる事を考えた．

2ー2：構造についての先行研究

中島健三と近い立場の研究として，van Hiele（1986）に注目した．Van Hieleから，構造とは洞察の生起を説明付けるものであると解ったが，具体的にどの様な分類ができるかについては触れられていなかった．

2ー3：構造による一般化の特徴付け

先行研究において一般化は構造と密接な関連があるものであるとされているが，構造の基づいた分類が十分になされているとは言えず，構造から一般化を特徴付けるという作業がなされていない．そこで，構造に基づいて一般化を調べていくことで，構造がどのように一般化を特徴出来るかを調べることにしたい．

その為の手法として，本研究では設定した例題から一般化を分析していくという手法を採る．

2−1．一般化に関する先行研究

“一般化”とは即ち，一般である状態にする過程のことを指す言葉ではあるが，ではどのような状態を”一般”と言うのか．数学の世界ではなく，日常生活での”一般”がどのような意味であるかを，辞書を参考に調べてみると

いっぱん【一般】 (1)いろいろの事物・場合に広く認められ、成り立つこと。 特別でないこと。⇔特殊 (2)同一であること。同様であること。（大辞林　第二版）

とある．数学においても，類似した意味で用いられてはいるが，決定的な相違点が認められる．それは，厳密さである．

厳密さについて，例としてフェルマー・ワイルズの定理“3以上の自然数nに対して$x^n+y^n=z^n$が成り立つ0でない自然数x，y，zの組は存在しない”が解りやすい．この定理は，前述した定義に基づく”一般”であれば，大多数の自然数に対して，つまり自然数に対して一般に成り立つにもかかわらず，その前提として1と2を排除した自然数に対して成り立つよう述べている．

このように，数学の世界における「一般」は厳密さが求められるものであるが，一般性を確保するというのは果たしてどういうことなのか，という疑問が残る．

ここで，中島健三（1981）が定義する一般化に注目すると

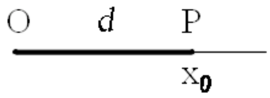
概念または形式のもつ意味についての抽象がほとんど行われないで，その適用範囲を広げているような場合を，ここでは「一般化」ということにしたい．（中略）ここでいう「一般化」の場合に，抽象が殆ど行われていないことは確かであるが，そのことは，はじめとあとで，構造がまったく同じということである．（pp.141）

としている．

また，“抽象の過程を経て，なお残されていくようにする性質が，いわゆる拡張の過程における「構造」である．”と述べており，命題の適用範囲の広げ方を「拡張」「一般化」の2種類に大きく分類している．

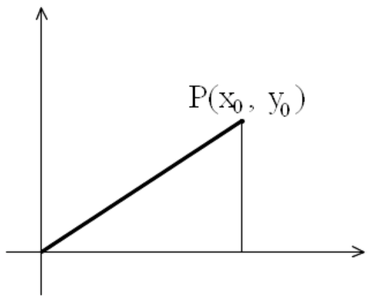
中島健三は，「拡張」と「一般化」の区別を，次のような例によって示している．

図1のように，原点Oから点Pの距離dを考えると$d = x_0$ （①）となる.



（図1）

これが図2のように平面になると，$d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ （②）となり，この場合その形式も①を$d = \sqrt{x_0^2}$と捉えれば同一であるし，その意味も全く同じである.



（図2）

更に空間上の点P（x_0^2, y_0^2, z_0^2）の場合も$d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ （③）となり，形式・意味共に同様であるといえる．このように概念または形式の持つ意味についての抽象が殆ど行われないで，その適用範囲を広げているような場合を，ここでは「一般化」ということにしたい.

ここで，形の上でほぼ同じ形式が保たれている①・②・③から，本来は空想的な4次元以上を含むn次元の場合についての「距離」を考えることもでき，$d = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + x_{03}^2 + \cdots + x_{0n}^2}$ （④）という形式を作ることができる．例えば③は④においてx_4以上が全て0のものであると見なせばその内に含むことが出来るが，一方で「距離」というものの意味について「距離」の「構造」を取り上げ，その性質を満足するものであれば，それを「距離」と見なしている．このような抽象的な考えが，拡張である.

上記の例の通り，中島健三の「一般化」と「拡張」は抽象の度合いにおいて明確な違いがある．少なくとも上記の例題を学習させる場面を考

えたとき，「一般化」と「拡張」のどちらの立場を取るかで達成させたい価値が大きく異なることが考えられるので，命題の適用範囲の広げ方をこの2種類に大別することに筆者は賛成したい．

その上で中島健三は，“一般的なこととしてしっかりつかむ内容が，そこでの「構造」にあたるといってよい．”（pp,141）というように，構造を維持しながら特定の集合について成り立つようにことが一般化であるという立場を明確にしている．

また，中島健三が「拡張」を説明するに際し，“抽象の過程を経て，なお残されていくようにする性質が，いわゆる拡張の過程における「構造」である．”（pp.139）と述べていることに注目する．これは，同じ「構造」という言葉を用いてはいるものの，先ほど挙げた一般化における「構造」という言葉と同一のものであるとするならば，その捉え方が複数あることを示しているし，異なるものである可能性もある．

しかし，この定義で一般化と構造を捉えようとしたとき，不明確な点が特に構造について多いと筆者は考えた．例えば”一般なこことしてしっかりつかむ内容”とは一体どの様な内容なのだろうか．　そこで，構造とはどの様なものであるかを調べることにした．

2−2. 構造に関する先行研究

中島健三は構造について，”なお，ここで指摘しようとしている「構造」は，先の2における「仮想的な対象」の想定やその実在化のための手法と密接なかかわりをもつものであり，また3で取り上げた「数学的なアイディア」に相応すると見なすこともできる．算数・数学の段階でもあり，「構造」といっても，その本質が重要であり，形式的にあまり堅苦しく考えることは，必ずしも適切とはいえない．”（pp.92）と述べている．ここで構造と相応するとされている「数学的なアイディア」とは．“観点の変更をするなり，場面の構造を再構成するなりして，既習の知識や手法とのつながりをつけること”（pp.89）である，としているが，中島健三自身が“「数学的なアイデア」の範囲は広く，はっきりさせることは困難な事である”（pp.91要約）としているように，個々の場面において明示されることはあっても，同定はされていない．また，”算数・数学の段階”とは一体どの様なものであるか，またどの様な段階であるかを明確に分けてはいない．

更に，「数学的なアイディア」「算数・数学の段階」でもあるとしており，それ以外にも存在する可能性を残したままにしており，このままでは不十分だと筆者は考えた．

ここで，筆者はvan Hiele（1986）が同定する「構造」に注目した．van HieleはPiagetの理論における構造を，厳密な構造(rigid structure)と呼び，それに加えて弱い構造（feeble structure）という考えを導入し，次のように述べている．“Piagetはすべての構造を数学的あるいは論理的法則で考察することを薦めていて，彼の理論には弱い構造がどこにもないという重大な危機がある”（pp.28）

これは，中島健三が述べた“構造を形式的にあまり堅苦しく考えることは，必ずしも適切といえない”という立場に比較的近いことから，van Hieleが考える「厳密な構造」「弱い構造」という分類が，構造を特徴付けるための足がかりになるのではないかと考えた．

では，厳密な構造とはどのようなものか．Piagetが同定する構造は操作が生起される時にそれを説明付けるためのものであるとしている．つまり，操作が生起し得ないようなものは構造として認めていない．ここでの操作とは，例えば数え上げる，比較をするといったような事が挙げ

られている．また，van　Hieleは厳密な構造について“数学的・あるいは論理的に考察した構造”（pp.28　要約）とも述べている．

一方，van　Hieleが述べるところの弱い構造とはどの様なものであるか．van　Hieleは個々人の与える構造は同じ対象であっても何らかのきっかけで異なる構造を与えるようになり得る事から，その個々人の洞察の生起を説明付けるためのものが構造であるとしている．

van　Hieleは厳密な構造も弱い構造もどちらも認めているが，厳密な構造のみを考え事による問題点について，“数学的に表現が困難であるがまだ研究の価値のある全ての構造を追放している”（pp.28）としている．ここでの「数学的に表現が困難である構造」とは，即ち中島健三が述べるところの「数学的なアイディア」に相当すると考えられる．

実際の教授場面を考えたとき，学習者が直ちに数学的な表現をするとは限らないので，筆者もvan Hiele同様，弱い構造の存在を認めたい．

その上で，「厳密な構造」「弱い構造」以外の構造の分類ができないかと考えた．特に「弱い構造」については，その中身が中島健三同様具体的に同定されておらず，もっと詳しく分類が出来ないかと考えた．この疑問については，次節でもう少し詳しく触れることにする．

以上のように構造というものに対してかなり近い立場を取っている両者の先行研究を基に，次節では再度一般化について考える．

2−3．構造による一般化の特徴付け

中島健三は“一般的なこととしてしっかりつかむ内容が，そこでの「構造」にあたるといってよい．”（pp,141） としたように，構造と一般化が深く関わっているという立場を取った．

更に自身が構造と呼ばれるものにいくつかの種類があることを示唆しているにもかかわらず，それらの構造が一般化とどの様な対応関係にあるかについては触れられていない．

ならば，本研究を通して構造の種類と一般化がどの様に対応しているかを明らかにしていくことで，一般化を特徴付ける事ができるのではないかと考えた．

先行研究においては，van Hieleが述べる所の「厳密な構造」と「弱い構造」の2種類が既に示されており，どちらを“一般的なこととしてしっかりつかむ内容”にするかによって，異なる一般化になる可能性が導き出される．

厳密な構造と呼ばれるものが，”数学的あるいは論理的法則で考察する”ものである事を考えると，厳密な構造を基にした一般化は数学的あるいは論理的な法則から導き出される一般化であるという仮説が考えられる．ただし，弱い構造を基にした一般化は数学的・論理的ではないということにもなりかねない．

また，「弱い構造」と一口に述べていても，中島健三が「数学的なアイディア」「算数・数学の段階」とある程度区別しているように，更に細かい分類が出来る可能性がある．ただし，中島健三の分類は余りにも抽象的すぎて，もっと具体的に同定したいという事は先に述べた．よって，構造を何らかの形で分類することを本研究では考えたい．

そこで，具体的な問題を一般化してみることで，そこにどの様な「構造」があるかを見出し，分類をしてみたい．また，その時それらの構造はどの様に一般化を特徴付けているかを調べる．

第3章：一般化の事例分析
「正方形の個数」問題

本章では，3–1で示す「正方形の個数」問題を一般化することにより導出された命題を整理し，そこから一般化の分類が導かれる.

3–1．「正方形の個数」問題：原問題

2章で述べた課題の解決を図るため，『複数通りの一般化が行える問題であること』『一般化してた命題から更に何かしらの操作が行えるもの』を考慮して「正方形の個数」問題を設定し，その分析を行った.

3–2．一般化による命題の導出

1節で得られた示唆より，『辺の長さを1増やすと縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という構造を基に一般化を繰り返して行くことで，最終的に8つの命題と，それぞれの構造と考えられるものを導出する事が出来た.

3–3．命題の分析

一般化された命題を分析する事で，『規則性の構造』によって特徴付けられた『規則性を取り出す一般化』，『場面の構造』によって特徴付けられた『問題場面を広げる一般化』，『問題の構造』によって特徴付けられた『問題の一般化』の3種類に一般化が分類出来る事が明らかになった.

3–4．学習指導場面への示唆

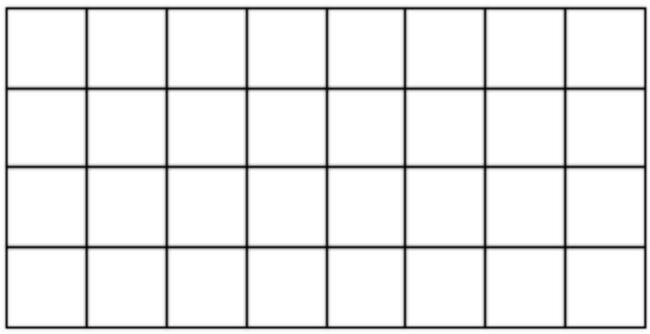
一般化の達成においてはその証明が可能かどうかが重要なポイントになってくると考えられ，一般化の授業を編成していくにあたってはその過程の証明が出来るような編成の仕方を考えていく必要がある．特に小学校段階では，説明からいかに一般化を達成するかが課題となる.

3−1．「正方形の個数」問題：原問題

2章で述べたとおり，構造の分類をおこなうこと，その構造によって一般化を特徴付けていきたい．そこで，実際にどの様なものが構造であり，また一般化の中でどの様に表れ，どの様に作用しているかを調べるため，例題を1問設定し，一般化した上でその過程を分析したい．

その際，例題を設定しなくてはならない．一般化が可能な問題であることは当然であるが，それに加えて以下に挙げる2つの条件を満たすようなものを考えたい．1点目に，「数学を創っていく」という立場から，ただ一般化が可能なだけではなく，一般化した後に更に何かが続いていく様な問題であるということ．2点目は，1つだけではなくいくつかの一般化が行える問題であるということ，沢山の一般化が行えるのであれば，それだけ様々な種類の一般化が出てくる可能性が上がるからである．

その結果，本研究で主として取り扱うのは，以下の問題である．



上の図のように，1辺1の大きさの正方形を縦に4個・横に8個並べた長方形の中に，正方形がいくつあるかを答えよ．

この問題を，「「正方形の個数」問題」と称する事にする．この問題には，枚数を数えるような素朴な解決も考えられるが正確性に乏しい．

ここで，枚数を数えるとき通常一定の方向に詰めて考えていく事に注目する．どのような方向に詰めてもよいが．統一のため本研究では全て左上から詰めて行くことにする．

この時，（縦に並べられる枚数）×（横に並べられる枚数）という計算をする事で枚数を求めることができるので，以下のように考えることが出来る．

図中において，ある大きさの正方形の枚数は縦に並べることが出来る枚数と横に並べることができる枚数の積を取ったものである．よって

1辺が1の正方形は4×8＝32枚

1辺が2の正方形は3×7＝21枚

1辺が3の正方形は2×6＝12枚

1辺が4の正方形は1×5＝5枚，それぞれ存在する

1辺が5以上の正方形は存在しないので，正方形の総数は

32＋21＋12＋5＝70枚となる．

このとき，1辺の長さが1増えると縦・横の枚数が1枚ずつ減っていくことが計算式の中に表れているし，またその様な関係に気付かずに立式したとしても，数字からその様な関係が示唆されている．

このとき，この法則が使えるのはこの場面だけではない事が直観されたり，あるいは中学生以上である程度文字を用いるなどして一定の法則を一般化する事に習熟していれば，その様に試みる．

では，その様にして想起された一般化について，次節でその過程を詳しく観ていくことにする．

また，本章ではそれまでに出ていない新たな命題が出てくる度，その命題にラベリングを行い，以下のように枠線で括る．

ここでは

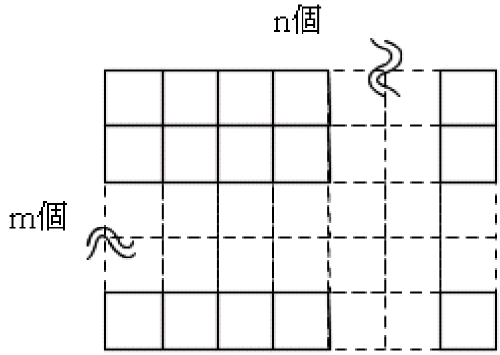
命題A1：1辺1の大きさの正方形を縦に4個・横に8個並べた長方形の中には，正方形が70枚存在する．

とする．

3−2．一般化による命題の導出

先に述べたように，正方形の枚数を求めるための計算の数値が，縦横方法に1ずつ減っている事から，そこに“1辺の長さが1増えると縦・横の枚数がそれぞれ1枚ずつ少なくなる”という法則を見出すことができ，この事から他の数の場合の「正方形の個数」問題において正方形の枚数を求める，一定の方法があるのではないかと見通すことが出来る．試しに5×9などの長方形について調べてみると，同様のルールが成り立っていることから，このルールが常に成り立つ．つまり，正方形の枚数に依らないあらゆる場面に一般化できるのではないかと考える．

長方形の縦・横の枚数に関わらず成り立つので，それぞれ文字で横にm個・縦にn個の単位正方形が並んでいる場面を考える．



（証明1）

この時，1辺の長さがaである正方形がいくつあるかを考える時，下の辺・右の辺どちらか1カ所の位置が決まれば正方形の場所が決まる．

その様な場所は，横方向に対してはm−a＋1個存在し，縦方向に対してはn−a＋1個存在する．

よって1辺の長さがaである正方形の枚数は(mーa+1)(nーa＋1)である．

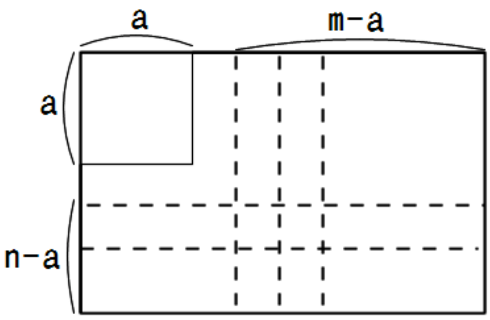
さらに，1辺の長さが1増えた時，横方向に対してはm−a個，縦方向に対してはn−a個存在する．よって，1辺の長さがa＋1である正方形の枚数は(m−a)(nーa)である．

さらに，この長方形中に存在する正方形のうち，最小のものは1辺1であり，最大のものはm≧nより，1辺nである．以上より，長方形中に存在する正方形の総数はmn+(m-1)(n-1)+…+(m-n+1)(n-n+1)となり，記号

を使って表現すると，$\sum_{i=0}^{n-1}(m-i)(n-i)$ となる．

命題B1：横にm個・縦にn個の単位正方形が並ぶ長方形の中に，
正方形が$\sum_{i=0}^{n-1}(m-i)(n-i)$ 枚存在する．

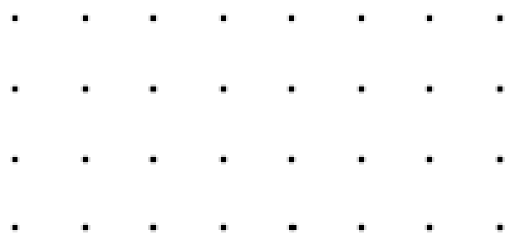
このとき，命題B1を導出する過程では計算式の数値の規則性を見ることで一般化できそうだ，ということが示唆された．その規則性は『1辺の長さが1増えると縦・横に並べられる正方形の枚数が1枚ずつ減る』という所から来ているのだから，これがここでの構造であると考えられる．



（図によるaと辺の本数の関係）

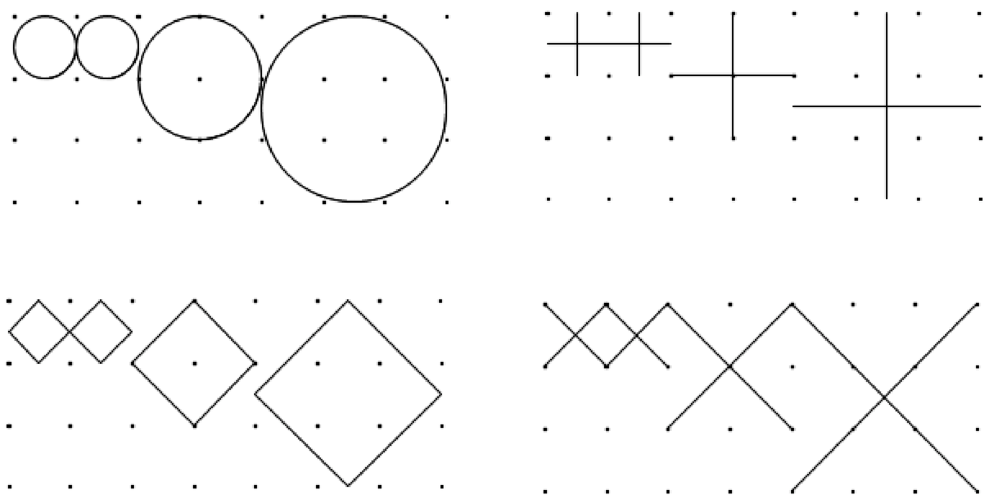
更に，以上の証明に注目すると，「1辺の長さがaである正方形がいくつあるかを考える時，下の辺・および右の辺どちらか1カ所の位置が決まれば」とある．線分を決定するためには，両端の点が決まればよいので，1点をとり長さを決めれば正方形が書けることになる．

そのように捉えた時，この問題場面で点同士を直線で結ぶ必要性はなく，以下の様な格子状の点を直線で結んだ時に出来る正方形の枚数と考える事ができる．



この時，もとの問題では格子点同士を直線で距離1になるよう結んでいるが，決定されるのが1点とそれに対応する3つの点と考えた時，例えば×のような結び方が出来る．

更に，正方形の中点を取れば，中点同士を結んだ＋のように結ぶ事も出来るし，円の様な形で結ぶ事もできる．



（格子点の結び方を変えた一例）

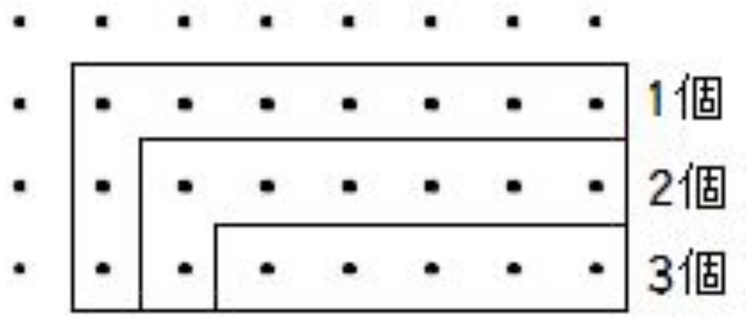
命題C1：問題場面を格子点の場面として捉える時，格子点を結んで ○や×などを作ると，その個数は命題B-1と同じ式で求まる．

ここでは，正方形の辺を決めるときはその頂点が解ればよい，ということから一般化が想起されたので，『4頂点の位置が決まれば正方形が決まる』という構造に注目していると考えられる．

このような格子点の場面で考えた時，4頂点全てを決める必要はない事に気付くことが出来る．3頂点は容易であるし，対角線上に取れば2頂点でも可能である．更に，長ささえ決めておけば1頂点で書くことも出

来る.

この時，格子点に正方形を書いて左上から敷き詰めていく操作を考えると，右下の1点と長さが決まれば正方形が決まることが解る.



例えば上の図のように，それぞれ正方形がただ1つに決まる点，2つに決まる点，3つに決まる点になっている．点の数は1辺の大きさが1である正方形がただ1つに決まる点が3＋7ー1＝9個あり，以下2個ずつ減っているので，正方形の総数を計算すると1×9＋2×7＋3×5＝38個になる.

先程求めた式で計算すると，3×7＋2×6＋1×5＝38で一致しているので，一般化できる見通しが立つ．よって，証明する.

（証明2）

横にa個の格子点が並んでいる場面を考える．この時，a=1の時格子点を直線で結ぶ事はできない．a≧2の時，格子点を結んで作る事ができる最短の直線は長さ1であり，最大の直線は長さa−1の直線である．縦も同様に考えるとき，縦にn個・横にm（m≧n）個の点が並ぶ格子点の中に，1×1の正方形は(n−1)(m−1)だけ存在する．・・・⑴

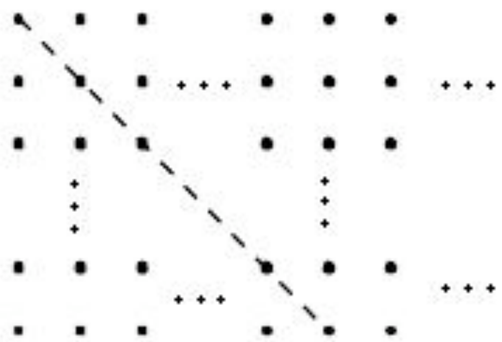
ここで，左からa番・上からb番目の列に並んでいる点（以下点（a,b）と記す）を考えた時，⑴より左に対して引く事が出来る最長の線の長さはa−1であり，上に対してのそれはb−1である.

ここで，この点から作る事ができる最大の正方形は，a−1とb−1のうち，値が小さい方を1辺とする正方形になる.

a−1＝b−1である点（a,b）に対し，その点より同列で右の点（a’,b)と，同じ行で下の点（a,b’）で作る事が出来る正方形の枚数は，a’>b・a<b’より常に等しくなる・・・⑵

⑵より，点（a,b）がa=bとなるような点は，一番左上の点（0,0）か

ら，m≧nより点（n,n）までn＋1個考えられ，左上から書いた正方形の対角線上に分布する．・・・⑶



（対角線上に並ぶ点）

さらに，a=bであるような点（a,b）に対して，点（a+1,b+1）を考えた時，右の点が1つ，下の点が1つずつ減るので，⑵より正方形がx個決定できる点の個数に対して，正方形がx+1個決定できるような点は2個減る．・・・⑷

以上より，⑴⑵⑶⑷から，縦にn個・横にm個の正方形を並べた場面において，正方形の枚数は（m+n-1）×1＋（m+n-3）×2…＋（m-n+1）×n枚となり，記号を用いて表すと$\sum_{i=1}^{n}(m+n+1-2i)i$ となる．

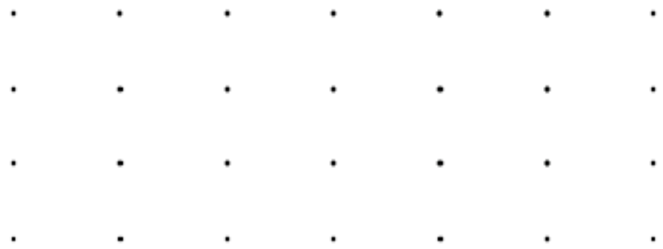
命題D： 横にm+1個・縦にn+1個の格子点が並ぶ長方形の中に， 正方形が$\sum_{i=1}^{n}(m+m+1-2i)i$ 枚存在する．

ここでは，命題B1を導出するときに正方形と辺の長さに一定の関係があったことから，点と正方形の数の間にも何か関係があるのではないかという点から一般化が想起された．その関係とは「1点から書くことが出来る正方形の個数は決まっている」という点であったので，その関係が構造でると捉えることが出来る．これは，『1辺の長さが1増えると縦・横に並べられる正方形の枚数が1枚ずつ減る』という構造の基になっている構造だと捉えることも出来る．（次節で詳しく述べる）

このように，『1辺の長さが1増えると縦・横に並べられる正方形の枚

数が1枚ずつ減る』という構造は本問題において極めて重要な役割を担っているが，逆に言えばその様な構造が維持されている限りにおいて，同様の手法を用いることができると考えられる．

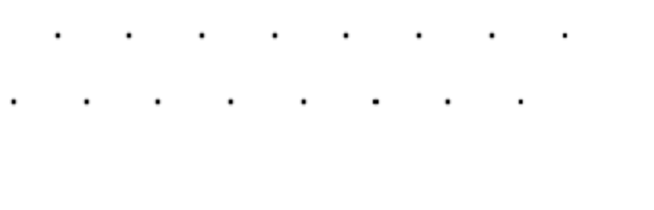
そこで，『縦・横の長さが1ずつ増えると縦・横の枚数が1枚ずつ減る．』という捉え方をしたとき，縦横がそれぞれ一定であれば同様の構造が成り立つことが解る．そのため，例えば以下の図のような格子点でも同様に考える事が出来る．



この様に，縦：横＝2：3の比率で点を置くと，同様の比率の長方形を敷き詰めた場面を考えることができる．ただし，この時同様の手法で求めることが出来るのは正方形ではなく，縦：横＝2：3の相似な長方形の数になっている．そのような長方形の総数は，最初の問題場面の正方形数と同様の手順で求めることが出来る．よって．以下のような命題が成り立つ．

命題E：格子点間の距離は，縦に一定かつ横に一定であれば， 命題A1～Dが成り立つ．

更に，『縦・横の長さが1ずつ増えると縦・横の枚数が1枚ずつ減る．』という構造を維持するにあたって，直線が直交という条件が使われていないため，例えば以下のような場面も考えられる．



この様にすれば，ひし形を敷き詰めた場面であることが解る．この場面でも敷き詰めに使っているひし形と相似なひし形の数を同様の手順で求めることが出来る．点と点の間の距離が縦・横にそれぞれ一定であれば良いので，色々なひし形・更に平行四辺形の場合も考えられる．

命題F：格子点同士を結んだ線分が，縦横それぞれ平行であるなら 命題A1～Dが成り立つ．

ここで，証明1に立ち戻る．正方形なので横の枚数と縦の枚数を一律に決めているが，証明から縦の枚数と横の枚数の法則は独立していることに気付く．即ち，縦と横の枚数が一致しない形，長方形は何枚あるか，という疑問が生まれるので，同様に計算で求めていく．

（証明3）

縦に1で横に1の長方形の枚数は，4×8＝32枚である．縦に1，横に2の長方形の枚数は，4×7＝28枚である．縦に1，横に3の長方形の枚数は4×6＝24である．以下同様に，4×5＝20，4×4＝16，4×3＝12，4×2＝8，4×1＝4を全て足し合わせ，縦が1である長方形は4＋8＋12＋16＋20＋24＋28＋32＝144枚存在する．

縦が2で横に1の長方形の数は3×8＝24枚である．以下同様に，3＋6＋9＋12＋15＋18＋21＋24＝108枚存在する．

縦が3の長方形の数は2＋4＋6＋8＋10＋12＋16＝72枚，縦が4の長方形は1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＝36枚より，その総数は

$$36+72+108+144$$
$$=36\times(1+2+3+4)$$
$$=36\times10$$
$$=360$$

となり，360枚になる．

命題A2：1辺1の大きさの正方形を縦に4個・横に8個並べた 長方形の中には，長方形が360枚存在する．

ここで，計算に注目すると10が1～4の和，36が1～8の和であることから，やはり法則があるのではないかと見出すことが出来る．ここで，正方形の枚数に関する一般化と同様に，縦にn横にm枚の正方形が敷き詰められる場面を考えると，方向の長さがaに決まると，縦方向の長さは1，2，3，・・，a，・・n-1，nのn通りに決まる．

また，同様に縦方向の長さがaに決まると1，2，3，・・，a，・・m-1，mのm通りに決まる．

よって，長方形の数はこれらの辺の組み合わせの総数となることから，以下のような式で求めることができる．

$$
\begin{aligned}
&\{1+2+\cdots+(m-1)+m\}\times\{1+2+\cdots+(n-1)+n\}\\
&=\frac{1}{2}m(m+1)\times\frac{1}{2}n(n+1)\\
&=\frac{m^2+n^2+m+n}{4}
\end{aligned}
$$

> 命題B2：横にm個・縦にn個の単位正方形が並ぶ長方形の中に，
>
> 正方形が$\dfrac{m^2+n^2+m+n}{4}$枚存在する．

ここでは，計算式における数値の変化から一般化が想起されたので，『縦・横の長さが1ずつ増えると縦・横の枚数が1枚ずつ減る．』という構造を捉えていると考えられる．

また，これらの長方形の枚数は，『縦・横の長さが1ずつ増えると縦・横の枚数が1枚ずつ減る．』という構造のみを利用していることから，同様の性質を持つ命題Eの場面でも成り立つことが解る．

ここまで証明を観て一般化を行ってきたが，証明からこれ以上取り除けるような要素が無いので，一般化を終了する．

ここまでに9命題が導出されたので，以上の9命題を次節で分析していく．

3–3．命題の分析

2節で行った一般化について観ていくと，よく似ていると考えられる一般化があることに気付く．

そこで，

観点Ⅰ：類似した一般化はどれか

を設定し，分析していくことにする．

まず，原問題である命題A1から命題B1への一般化とよく似た一般化は無いかを考える．すると，命題A2からB2への一般化，命題C1からDへの一般化がよく似ていると捉えることが出来る．その理由としては，それぞれ一般化の結果として正方形あるいは長方形の個数を求める数式が導かれていること，その数式の根拠となる証明が一般化過程となっている点が挙げられる．これを仮に一般化Ⅰと置く．

では，それらの一般化とは少し異なると考えられる一般化は無いかと探してみると，命題B1から命題C1への一般化，命題B2から命題C2への一般化，命題C2から命題E/Fへの一般化，命題Dから命題E/Fの一般化が類似していると考える事が出来る．その理由としては，どれも正方形が並んでいる問題場面以外の問題場面へと広げて行っている事，前述した命題A1から命題B1への一般化と同じような一般化の証明から，証明に使わない条件を取り除くことが一般化過程であった点が挙げられる．これを仮に一般化Ⅱと置く．

以上に挙げた2種類の一般化のどちらにも入らないのが，命題B1から命題A2への一般化である．この一般化はそれまで正方形の個数を問うていたものが，長方形の個数を問う一般化になっていることから，他とは違う一般化であると考えた．これを仮に一般化Ⅲと置く．

以上により，一般化が大きく分けて3つの似ているグループに分類された．第2章での考察より，構造がどの様に一般化を特徴付けるかを調べることが本章における大きな目的である．よって，上記のグループ内において，どの様な構造に注目しているかを明らかにしたい．そこで

観点Ⅱ：どの様な構造から一般化されたか

を考えることにする．

まず，最初に一般化Ⅰについて表で整理する．

行われた一般化	一般化を想起させた構造
命題A1からB1	『一辺の長さが1増えると，縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という構造・・・①
命題C1からD	『1点から書くことが出来る正方形の数は決まっている』という構造・・・②
命題A2からB2	『縦・横の長さが1増えると，縦・横にそれぞれおける枚数が1枚ずつ減る』という構造・・・③

この様な構造に注目していることが伺える．この時，③は①を縦と横の長さを同時に1ずつ延ばした場合が①であり，縦と横をそれぞれ別個に1ずつのばしたものであると捉えることが出来るので，この両者は実質同一の構造を相手にしていると考えられる．また，②と①・③を比較するとき，①が線の長さと正方形の個数という捉え方をしているのに対して，②は同じ性質を点から注目していることから，同じ構造であることが解る．以上より，上記の一般化は全て同じ構造を基にしている．

この時，一般化Ⅰとした一般化は，『一辺の長さが1増えると，縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という構造を基に，どの様な数値でもその構造が成り立つことを示す一般化であると言える．この時，注目している構造はそれぞれ数式で表される規則性であることから，このような構造を『規則性の構造』と呼びたい．そして，『規則性の構造』だけを取り出し，一定の形式が成り立つようにする一般化を『規則性を取り出す一般化』と呼びたい．

では，次に一般化Ⅱに注目する．この一般化においては，『規則性を取り出す一般化』で得られた正方形や長方形の枚数を求める式が，最初の問題場面以外でも成り立つことを示している．この時，正方形や長方形の枚数を求める式を利用できる問題場面は『縦・横に一定の間隔で並んでいる点の集まり』であり，それが各々の場面によって正方形だったり，長方形であったりする．この様に，『規則性を取り出す一般化』によって得られた命題が適用出来る範囲を広げていく様な一般化を，『問題場面を広げる一般化』と呼びたい．この時注目する構造は，『規則性の構造』が成り立つ範囲を逸脱しない様な問題場面の構造に目を向けていることから，その様な構造を『場面の構造』と呼びたい．

最後に一般化Ⅲに注目する．この一般化では，『一辺の長さが1増えると，縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という構造を基に，その構造を用いて求

めるものを変えている．つまり，正方形の枚数を求めるときは縦の長さと横の長さは必ず同時に増やされていたのに対して，長方形の枚数を求めるときは縦の長さと横の長さが一致しないものを全て計算の対象に含めている．この時，『正方形は4本の等しい直線で囲んだ図形である』という構造を捉えていると考えられ，その様な構造を基に何を求めるかという事を一般にしていく『問題についての一般化』をしていると考えられる．また，この時注目している構造は『規則性の構造』をどの様に用いるかという事なので，『問題の構造』に注目していると考えられる．

以上より，本節の分析から3種類の一般化と，それに対応する構造が存在することが示唆された．次節では，これらの一般化と構造が実際の教授場面にどの様な示唆を与えるかを示したい．

3-4. 学習指導への示唆

前節で述べたとおり，本問題における一般化には3つの種類があり，それに対応する3種類の構造が存在することが示唆された．これらの一般化を実際の学習場面において達成するにあたり，どの様な示唆が得られるかを考察した．

3種の構造の内，最も把握しやすいと考えられるのは『規則性の構造』であった．というのも，ある1つの場面について考える中で，規則性が数値として明確に表れた為，一般化が想起されやすい．他方で，残り2つの構造を初見で把握しようとすると，非常に手がかりが少ない．

また，一般化の内『問題場面を広げる一般化』と『問題についての一般化』については，どちらも『規則性の構造』を把握していなければ達成する事は出来ないので，学習者がこれらの一般化に取り組もうとした場合，まず『規則性の構造』を基にした『規則性を取り出す一般化』の達成を測ってからでなくてはならない．よって，実際の授業でどの一般化を目指していくにせよ，最初に『規則性の構造』を把握するような指導を行うことが，一般化を達成する上で有効であると考えられる．少なくとも本問題の場合，それは計算式において数値が1ずつ減っていくという点に表れたので，その様な数値の変化に注目させるような支援が有効であると考えられる．

その上で，『問題場面を広げる一般化』について考えてみたい．実際の一般化過程を見ると，その一般化の手法として『規則性を取り出す一般化』の証明から使用されていない条件を取り除く，即ち『規則性の構造』が成り立つために必要ではない条件を取り除いていることが解る．であるならば，『規則性を取り出す一般化』を行うとき，きちんとした証明を行っておく事が『問題場面を広げる一般化』を行う上では必要不可欠な事であるといえる．

以上の2つの一般化において共通して言えることは，計算を含めた証明の過程を書き出してみることで，構造を見出すことが比較的容易になっているという事が挙げられる．一般化に限った話では無いが，証明等をきちんとするような指導をする事が大切であると言える．また，どちらの一般化も『集合を広げる一般化である』という意味では類似して

いる事も挙げられるので，この2つは授業においてセットで行うことが考えられる．

　では，『問題についての一般化』はどうか．この一般化も『規則性の構造』を基にしていることは間違い無いが，『問題の構造』が明確な形で証明等に表れにくいので，本問題における一般化の指導に際しては最も困難であると考えた．しかし，現在の所このような一般化を促すような有効な支援を考え出せていないので，その点は今後の課題としていきたい．

　また，この様に考えると，一般化の指導においてはその証明が可能であるかどうかが極めて重要なポイントであるといえる．一般化の授業を編成していくにあたっては，学習者が見出した一般性をきちんと証明出来る様な編成の仕方を考えていく必要がある．

　更に，3種類の一般化全てにおいて言える事であるが，一般化の過程において特殊な場面と一般な場面を，思考が常に行き来していることが伺える．例えば，『規則性を取り出す一般化』で得られた式が本当に正しいか確かめるために特殊な場面それぞれに当てはめるといったことが行われている．本研究ではこの点について深くは触れないが，一般を考える際に，特殊から考えるように導く支援が何らかの有効な手だてになる可能性を示唆しているので，今後是非取り組みたい．

　そして，本節で示したような学習指導場面への示唆が，実際にはどの様な形で表れ，またどの様な支援が行われるのであろうか．次章では，「正方形の個数」問題を用い一般化を志向するような，実際の授業を構築することで，実際の授業場面において具体的にどの様に構造やそれに特徴付けられた一般化が行われるかを検証する．

第4章：一般化を志向した授業設計

本章では，第3章で得られた知見を基に，「正方形の個数」問題を題材とした一般化を志向する授業の設計を行う．それにより，実際の授業場面で構造やそれに特徴付けられた一般化がどの様に達成されるかを観ていきたい．

4−1．授業対象の選定

一般化についてこれまで知見を纏めて来たが，第3章より一般化にはその過程である証明が大きく寄与していることが示唆された

一般化過程における証明に着目し，証明から条件を取り除いていくという手法を扱いにくい小学校6年生に対する授業，証明から条件を取り除いていくという手法が可能になる中学校2年生，組み合わせの概念が必要となる高等学校2年生を対象にした授業をそれぞれ設計していくことにする．

4−2．小学校第6学年における授業

本授業では，説明しか持たない児童に対して，いかに一般化の指導を行っていくかが問題となっている．説明の中からなぜ成り立つのか，という理由を取り出すことで，一般化の達成を図る．

4−3．中学校第2学年における授業

本授業では，証明を習得した生徒に対して，証明から不必要な条件を見出し取り出す事で一般化が出来る事を通じ，一般化のよさと証明のよさを実感してもらう事を目的とする授業である．

4−4．高等学校第2学年における授業

本授業では，本研究で取り上げたほぼ全ての一般化を取り扱う．『問題についての一般化』に迎えるような支援を考察しつつ，一般化には3つの種類がある事を実感してもらう事を目的とする授業である．

4－1．授業対象の設定

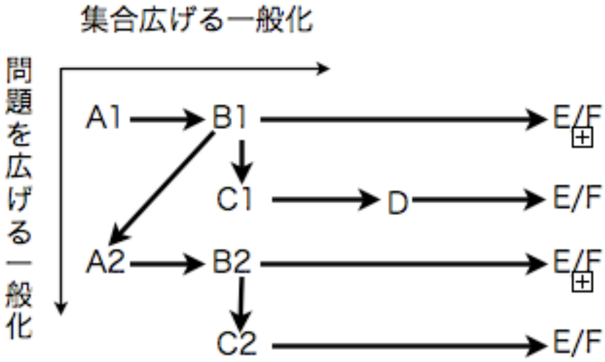
一般化についてこれまで知見を纏めて来たが，第3章より一般化にはその過程である証明が大きく寄与していることが示唆された．特に『規則性を取り出す一般化』の証明を行うことで，残りの一般化に向かうことができると考えられる．では，その様な点を踏まえた上で，「正方形の個数」問題で授業を行うとすれば，一体どの様な児童・生徒に行うべきであろうか.

例えば命題B1導出する一般化を授業で取り扱おうと考えたとする．この時，命題B1の結論を表現するものとしてΣが使われている．従前の指導であれば，Σを使うから高等学校2年生における数列の学習で行う，といったカリキュラムの編成法が考えられる.

しかし，先ほども述べた通り一般化においてはその過程の証明が大切であることから，命題A1から命題B1への一般化過程を見ていきたい．すると，証明の過程で利用しているのは文字式・正方形の枚数を求める計算くらいであることから，この証明は中学生でも十分に可能である．よって，文字式を導入した後の中学1年生を対象とした授業においても取り入れることは十分に可能である．このように，一般化を用いたカリキュラムを編成するにあたっては，一般化の結果生まれる命題からカリキュラムを編成していくのではなく，その過程である証明が可能であるか，その証明を行うために必要な事項を習得しているかという点からカリキュラムを編成できることが考えられる.

では，証明の前段階である説明しか学んでいない段階の小学生に対してはどうするかという疑問が浮かぶ．小学校あるいは中学校初期の段階で学習者は素朴な説明を行っているが，その様な説明を利用することで一般化するようにしたい．（本研究では扱わないが，一般化を通して説明を演繹的な論法である証明へ変えていくような指導も考えられる．）

そこで，その様な考えの基で授業を設計するにあたって，第3章で学習指導場面に対して得られた示唆を基に，どの様な流れで実際の一般化が行えそうかを次の表に纏めた.



先ほど述べた通り，一般化には大別して集合を広げる一般化と，問題を広げる一般化の2つが存在した．それを基に，横向きに集合を広げる一般化を，縦向きに問題を一般にしていく一般化を考え，整理した．矢印は一般化を表し，例えばA1→B1は命題A1からB1への集合を広げるような一般化であることを表す．この表では矢印の向きのみを焦点にしており，一般化の段階，つまり矢印の長さについては今回は考察の対象外としている．ここで，斜めの矢印が存在しているので，その意図を説明しておく．3–3において，一般化の過程では特殊を見るということが行われていることを指摘した．ここでは，縦・横の枚数を限定しない命題B1から，縦4・横8という特殊な場合について1度考えることで，長方形の枚数に関する一般化への見通しを立てているので，左斜め下の矢印とした．

この表を，矢印つまり一般化で行われている証明に注目して授業を行う対象を設定する．

まず，命題B1→C1・B1→A2の繋がりに注目した．これらの一般化は命題A1→B1間の一般化の証明から想起されるものでり，A1→B1間の証明は文字式の知識や証明の手順といった学習が達成されていなければ不可能である．

現在のカリキュラム上，証明指導がなされるのは中学校に入ってからなので，小学校と中学校で異なる授業を展開する必要があると考えられる．

よって，小学校段階においては命題A1→B1→E/Fを取り扱うと考えられる．このとき，命題A1→B1を証明することはできなくても，説明することを求めたい．その際，『正方形の1辺の長さが1増えると縦・横

の枚数が1枚ずつ減る』という関係が，文字式の考え方を用いるとよりよい説明が出来ると考えられるので，次期学習指導要領で文字式の導入が行われる小学校6年生を対象とした授業をまず考えたい．

次に，命題B1から命題Cや命題A1へと一般化する場合を考える．前述の通り命題A1からB1へ一般化する際の証明が出来る学習者である必要がある．即ち文字式を利用でき，更に証明の指導が行われている中学校2年生以上を対象に試みたい．この時，証明に触れたばかりの中学校2年生に対して，証明から不必要な条件を取り除く活動を行うことで，一般化の手法と証明のよさを感じることが出来るので，その様な活動である命題B1から命題C1・D・E・Fへと一般化するような授業を設計したい．

また，命題B1から命題A1を経由して命題A2の証明をするにあたっては，辺同士の組み合わせに注目することから，組み合わせを習得している高等学校での授業が考えられる．組み合わせ自体は高等学校1年の数学ＩＡで学ぶ単元であるが，それに加えてΣを扱えるようになっていると式の形で纏められる．よって，数列やΣを習得する高等学校2年生の授業を考えたい．

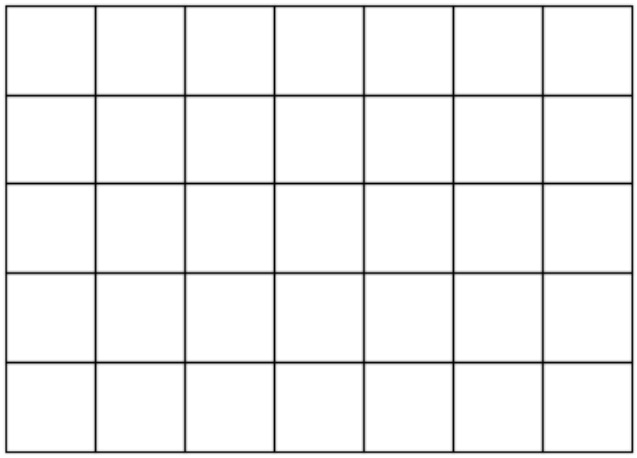
以上より3つの授業対象を考えた．実際にどの様な指導をすればよいか，指導案という形で考えていくことにする．

4−2．小学校第6学年における授業

・本時の目的

「正方形の個数」問題を解く過程を通し，『規則性の構造』を見出し『規則を取り出す一般化』を達成する過程を通して，□や△で見出した規則性を式に表すことが出来る事や，なぜその様な式で求められるかを考えると様々な場面についてその適用範囲が広がる『問題場面についての一般化』が出来ることを実感し，算数数学において理由を考えることのよさを実感させる．

・本時の課題



1辺の1の正方形が，縦に5枚・横に7枚ずつ並んでいます．それぞれ，正方形がいくつあるかを工夫して求めなさい．

・本時で期待される数学的活動

自力解決D

正方形の枚数を数えるなどの，計算以外の活動を通し正方形の枚数を求められる．

自力解決C

1×1の正方形が（縦の枚数）×（横の枚数）で求められる事を通し，2×2以上の正方

形についても計算で求める事ができる．

自力解決B

計算式から，正方形における1辺の長さと縦・横の枚数に関する法則を見つけ出し，言葉や文字を用いた式で表現することができる．

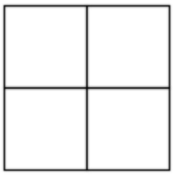
自力解決A

見つけ出した法則が，その他の場面にも適用できないかと考え，積極的に広げていく事が出来る．

・本時の活動の流れ

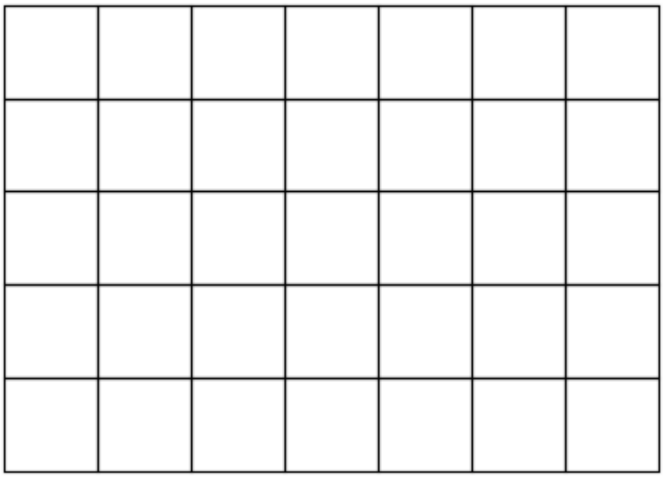
活：児童の数学的活動　**支**：教師の支援　**意**：支援の意図

問題提示



支：この中（*上図）に正方形がいくつあるかな．

意：図形中に存在する1×1の正方形だけではない事に気づかせたい．



支：どんな大きさの正方形がありそうかな．

意：図中には1辺1〜5の5種類の正方形があることに気づかせたい．

また，ワークシート（別添）を配布する．

自力解決Dへ

自力解決Dから

自力解決D

活：数えるなどの計算以外の行為で枚数を求める事が出来る.

支：数え間違えや，書き漏らしはないかな.

支：1辺1の正方形の枚数はどうやって求めたのかな

意：計算をすることで枚数が正確に求められる事に気付かせたい.

自力解決C

活：2×2以上の正方形についても，計算を用いて枚数を求める事ができる.

支：縦・横の枚数から，うまく正方形の枚数を求めることができないかな.

意：縦の枚数×横の枚数で正方形の枚数が求められる事に気付かせたい.

支：式の値から何か読み取る事はできないかな.

意：式の値から，『規則性の構造』に注目させたい.

自力解決B

活：計算式から，1辺の長さと縦・横の枚数に関する法則を見つけ，
言葉や文字の式で表現することができる.

支：見つけた法則を式で書くことはできないかな.

支：どんな表現を使えば，うまく表現できるかな.

意：言葉や文字を使う事で，表現が出来ることに気付かせたい.

支：そのような式が成り立つ，他の場面を考えることはできるかな？②

意：得た法則を活用する動機付けをさせたい.

自力解決A1へ

自力解決A2へ

自力解決Bから

自力解決Bから

自力解決A－1

活：自力解決Bで得た法則が，正方形を並べた枚数にかかわらず成り立つことに気付く．

支：この式が使える，正方形が並んでいる場面以外の場面を考えることができるかな

意：枚数以外の関係に着目させたい

自力解決A－2

活：自力解決Bで得た法則が，正方形を並べる以外の場面でも成り立つことに気付く．

支：この式に枚数は関係あるかな？

意：枚数は関係ない事に気付かせたい

支：どんな場面であれば，同じ式が成り立つかな

意：辺の長さと枚数の関係が維持されれば良いことを意識させたい

・<u>集団での課題の検討</u>

・<u>計算で求める事の利点を確認する</u>

答えは85枚になるが，その過程として数える・書くといった方法では問題があることを共有し，計算を用いることのよさを見出す． **支**：数えたり書いて求めようとすると，なにか困る事がないかな． **意**：数え間違いなどの要素が常に存在することを意識させたい． **支**：どのような方法だったら，間違いなく答えを出せるかな． **支**：どの大きさの正方形だったら間違いなく答えを出せるかな． **意**：計算すると確実に枚数を求められる事に注目させたい．

・<u>どのような計算で求められるかを考える</u>

5×7＝35 4×6＝24 3×5＝15 2×4＝8 1×3＝3 35+24+15+8+3=85	1×1の正方形のように， （縦に並べられる枚数）×（横に並べられる枚数）という計算で枚数が求められる事に気付くことができる． **支**：1辺1の正方形と同じように，1辺2以上の正方形の枚数を求めることはできないかな． **意**：縦に並べられる枚数×横に並べられる枚数で求めることが出来る事に気付かせたい **支**：縦や横の枚数は，数える必要があるかな． **支**：計算式に注目すると何か気付くことがないかな **意**：1辺の長さが1増えると，縦・横の枚数が1枚ずつ減っていくことに気付かせたい．

・辺の長さと縦・横の枚数の関係に気付く

1辺の長さを1増やすと，縦・横に並べられる枚数がそれぞれ1枚ずつ減ることに気づき，そこから計算することができる.

支：計算式の数字が1ずつ減っていくのは，どうしてかな.
意：縦・横に並べられる枚数が1枚ずつ減る事を表している事に気付かせたい.

・枚数に依らない事に気付く

1辺の長さと枚数の法則は枚数に関係なく成り立つので，正方形が何枚並んでいても同様に求めることができる事に気付く.

支：縦の枚数が5枚であることや，横の枚数が7枚であることは1辺の長さと枚数の法則に何か関係しているかな.
意：枚数が法則に関係なく成り立つことに気付く

・式を用いて表現する

上記の法則を，言葉を使った式で表現する.
ex.縦の枚数×横の枚数＋（縦の枚数ー1）×（横の枚数ー1）＋･･･

支：この法則を，式を使って表すことができるかな？
意：式を用いた表現をすることに意識を向けたい.

支：言葉を使わずに表すことはできないかな.
意：記号（○や△など）を用いると表現が容易になることに気付かせたい.

支：ここで求めた方法は，他の問題で使うことはできないかな.
意：1辺の長さと枚数の法則が維持されれば，他の場面でも用いることができることに気付かせたい.

・様々な場面に広げていく

1辺の長さと枚数の法則が成り立てば同様に求めることができるので，正方形以外の四角形を並べた場面でも同様に考える事が出来る事に気付く． **支**：1辺の長さを1増やすと，縦・横に並べられる枚数が1枚ずつ減るような他の場面はないかな． **意**：正方形以外が並ぶ場面に着目させたい．

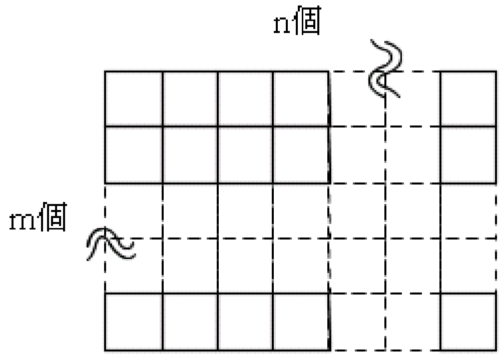
本授業においては，3章及び4–1で考察したとおり，特に自力解決A–2を達成出来るかどうかが大きな焦点となってくる．証明を知らない児童に対して，いかに『規則性の構造』を維持できる他の問題場面を考えられるよう支援するかが，本授業における最も困難な点である．

4-2. 中学校第2学年における授業

・本時の目的

本時においては，演繹的な手法を用いた証明を通し，証明に使われていない条件を取り除くことで行われる『問題場面を広げる一般化』を行うことを通し，数学的な命題を証明することのよさを感得し，問題場面が持つ構造を把握させたい.

・本時の課題



1辺の1の正方形が，縦にm個・横にn個ずつ並んでいる．この図形の中に正方形がいくつあるかを求めなさい．ただし，$n \geq m$ とする.

・本時で期待される数学的活動

自力解決C

特殊な場合を考えることで，『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減っていく』という規則性に気付くことが出来る.

自力解決B

『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減っていく』という規則性が常に成り立つことを証明することが出来る.

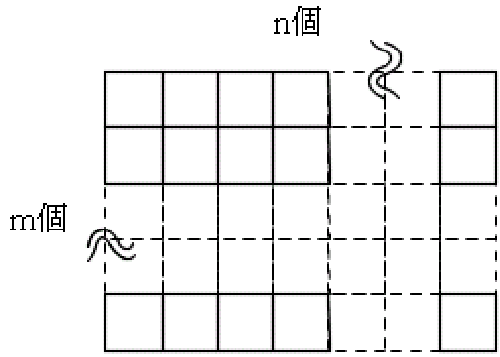
自力解決A

証明から不必要な条件を取り除き，様々な場面に一般化する事が出来る.

・本時の活動の流れ

活：児童の数学的活動　　　　　**支**：教師の支援　　　**意**：支援の意図

問題提示



支：この中（上図）にどんな大きさの正方形があるかな.

意：図形中に存在する正方形が1×1以外にも存在し，また最大の大きさがm×mの正方形であることに気付かせたい.

支：全部で正方形は何枚あるだろう，nとmを使って表せないかな.

自力解決C

活： 特殊な場合を考えることで，
『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減っていく』
という規則性に気付くことが出来る

支：mやnってどんな値でないといけないのかな.

支：枚数がmやnで表されているのが問題なら，もっと楽に求められる場面は無いかな.

意：特殊な場面を考えることで，一般を考える足がかりになることに気付かせたい.

↓

自力解決Bへ

自力解決Cから

↓

自力解決 B

活：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』
という『規則性の構造』が常に成り立つよう証明する事が出来る

支：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という
関係は本当にいつでも成り立つのかな.

支：正方形を左から詰めて行くとき，横に何枚詰められるかな？

意：帰納的な推論ではなく，演繹的な推論へと向かわせたい.

↓

自力解決 A

活：自力解決Bで得られた証明を基に，証明に使われていない条件を
取り除く事で『問題についての一般化』を達成する事が出来る.

支：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という
関係は本当にいつでも成り立つのかな.

支：正方形を左から詰めて行くとき，横に何枚詰められるかな？

意：帰納的な推論ではなく，演繹的な推論へと向かわせたい.

・集団での課題の検討

・特殊な場合の数値から，枚数に関する規則性を推測する

n・mに具体的な値を代入することで特殊な場面を想定し，実際に枚数を求める活動を通して計算式に表れる法則から『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という『規則性の構造』が利用出来そうなことに気付く． **支**：計算で求めた数値の中に，何か気になる箇所はないかな． **支**：この数値からどの様な性質が成り立つことが推測されるかな． **意**：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』 という関係が成り立ちそうであることに着目させたい．

・『規則性の構造』を見出し，結論を推測し，証明の必要性に気付く

見出した『規則性の構造』を基に，答えを求めることが出来るが，その前提として『規則性の構想』がいついかなる時でも成り立つことを証明しなくてはならないことに気付く． **支**：具体的な場面から成り立つそうな性質を使うと， どの様な答えになると考えられるかな． **意**：答えを求めてしまうことで，次に演繹的な推論を行うことに 生徒の問題意識を焦点化したい． **支**：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』 事は本当に常に成り立つかな． **意**：『規則性の構造』が常に成り立つことを示さないと， 求めた答えが真とならないことに気付かせたい．

・『規則性の構造』を証明する

見出した『規則性の構造』が常に成り立つことを，演繹的な推論を用いて証明する．
支：1つ1つの場面を調べず，nやmのままで考える事は出来ないかな
意：特殊な場面を調べるのではない事に気付かせたい
支：1辺の長さがaの正方形は横向きにいくつ並べられるかな．
支：他にどんな場合を調べたら成り立つ事が示せるかな？
意：用語は導入しないが，数学的帰納法に着目させて証明させたい

・証明から不必要な条件を取り除き，問題場面についての一般化を行う

『規則性の構造』が成り立てば本問題の解答は得られるので，証明中で使われていない条件を取り除けば様々な場面で成り立つ事を示す事が出来る事に気付く．
支：得られた数式が使える場面は他にないかな
支：他の場面があるなら，どんな条件を満たす場面ならいいかな
意：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という関係を満たしさえすればよい事に気付かせたい．
支：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』関係が成り立つために，不必要な要素は無いかな．
意：『規則性を取り出す一般化』から証明が成り立つための条件が縦・横にそれぞれ一定の長さで互いに平行であればよい事に気付かせたい．

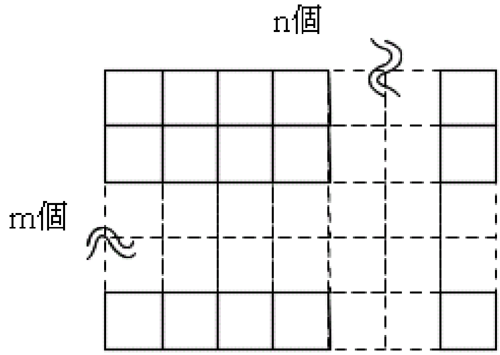
本授業においては，『証明に不必要な条件』をいかに意識させ，把握させる事が最大の問題となる．この点を解決するような支援を重点的に加えていくことで，この問題を解決したい．

4-3. 高等学校2年生における授業

・本時の目的

一般化の過程を通し，着目した性質を基にその性質の使い方を変え，新しい命題を作っていく『問題の一般化』を通し，一般化によって得られた知見を活用する事で新たな命題を作り出していく事が可能なよさを実感させる.

・本時の課題



1辺の1の正方形が，縦にm個・横にn個ずつ並んでいる. この図形の中に正方形がいくつあるかを求めなさい. ただし，$n \geq m$ とする.

・本時で期待される数学的活動

自力解決C

『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という関係から正方形の個数を求め，常に成り立つという証明が出来る.

自力解決B

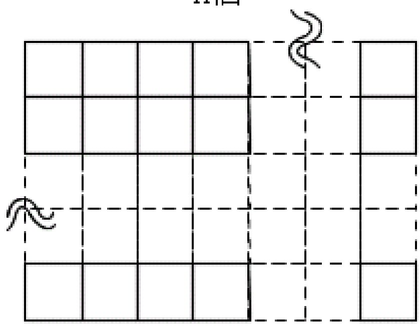
『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という関係の捉え方を変え，『縦の長さが1増えると縦に，横の長さが1増えると横における枚数が1枚ずつ減る』という捉え方にする事で，長方形の個数を求める事が出来る.

自力解決A

正方形の個数・長方形の個数を求めた証明について，それぞれ証明に使われていない条件を取り除く事で『問題を広げる一般化』を行い，正方形の場合と長方形の場合が対応している事に気付く事が出来る.

・本時の活動の流
活：児童の数学的活動　　　　　　　**支**：教師の支援　　　**意**：支援の意図

問題提示



支：この中（上図）にどんな大きさの正方形があるかな.
意：図形中に存在する正方形が1×1以外にも存在し，また最大の大きさがm×mの正方形であることに気付かせたい.
支：全部で正方形は何枚あるだろう，nとmを使って表せないかな.

↓

自力解決C
活：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という関係から正方形の個数を求め，数学的帰納法を用いて常に成り立つという証明が出来る.

支：枚数がmやnで表されているのが問題なら，もっと楽に求められる場面は無いかな.
意：特殊な場面を考えることで，一般を考える足がかりになることに気付かせたい.

支：常に成り立つ，ということをどんな方法で示せるかな.
意：数学的帰納法を用いる事で，『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という関係が常に成り立つ事を証明出来る事に気付かせたい.

↓

自力解決Bへ

自力解決Cから

↓

自力解決B

活：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という関係の捉え方を変え，『縦の長さが1増えると縦に，横の長さが1増えると横における枚数が1枚ずつ減る』という捉え方にする事で，長方形の個数を求める事が出来る.

支：1辺の長さが増えるときの事を考えたけど，縦の長さと横の長さが同じである必要はあるかな.

意：『1辺の長さ』と捉えていた点が縦・横それぞれについて考える事ができ，互いに独立した関係である事に気付く事が出来る.

支：縦と横の長さが違うとどの様な図形になるかな

意：長方形の個数を考える事が出来そうな事に気付く事ができる

支：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という関係を，どの様に用いれば長方形の個数に使う事が出来るかな.

意：正方形の場合とよく似た手法で求める事が出来る事に気付かせたい

↓

自力解決A

活： 正方形の個数・長方形の個数を求めた証明について，それぞれ証明に使われていない条件を取り除く事で『問題を広げる一般化』を行い，正方形の場合と長方形の場合が対応している事に気付く事が出来る.

支：正方形や長方形の個数を求める式が解ったけれども，それを使える他の場面は無いかな.

意：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という関係が維持されている場面なら同様の手法を用いる事が出来る事に気付かせたい.

支：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』事が成り立つ場面は，どんな場面でなくてはならないかな.
意：『規則性を取り出す一般化』で得た証明に注目し，証明に不必要な条件を外す事で様々な問題場面へ広げたい.

支：長方形の場合と正方形の場合，比較して何か気付く事は無いかな.
意：同じような一般化が行われている事に気付かせたい.

・集団での課題の検討

・正方形の個数を求める為に『規則性の構造』を証明する

特殊な場合を調べるなどして見出した『規則性の構造』が常に成り立つことを，演繹的な推論を用いて証明する.

支：nやmが具体的な値だったらどうやって求められそうかな
支：正方形の枚数に何か規則性は見えてこないかな？
意：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という関係が，正方形の枚数を求める際に利用出来る事に気付かせたい.

支：全ての数の場合について成り立つように証明するには，どんな手法が有効かな.
意：数学的帰納法を用いる事で，『規則性の構造』が常に成り立つ事を証明できる事に気付かせたい.

・『規則性の構造』の扱い方を変える

活：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という関係の捉え方を変え，『縦の長さが1増えると縦に，横の長さが1増えると横における枚数が1枚ずつ減る』という捉え方にする事で，長方形の個数を求める事が出来る.

支：縦の長さだけを1増やすとどうなるかな.
支：どんな関係に変化して，何が求められそうかな.
意：縦・横の長さを別々に増やしていくことで，長方形の枚数が求められそうである事に気付かせたい.

・<u>長方形の個数を求める</u>

活：特殊な場合について調べるなどして，規則に気づき，長方形の個数を求める事が出来る． **支**：縦の長さが1で固定すると，長方形はいくつあるかな **支**：計算式から何か規則性が見えてこないかな **意**：縦・横の辺の組み合わせの総数であることに気付かせたい

・<u>証明から不必要な条件を取り除き，問題場面についての一般化を行う</u>

『規則性の構造』が成り立てば本問題の解答は得られるので，証明中で使われていない条件を取り除けば様々な場面で成り立つ事を示す事が出来る事に気付く． **支**：得られた数式が使える場面は他にないかな **支**：他の場面があるなら，どんな条件を満たす場面ならいいかな **意**：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』という関係を満たしさえすればよい事に気付かせたい． **支**：『1辺の長さが1増えると縦・横における枚数が1枚ずつ減る』関係が成り立つために，不必要な要素は無いかな． **意**：『規則性を取り出す一般化』から証明が成り立つための条件が縦・横にそれぞれ一定の長さで互いに平行であればよい事に気付かせたい． **支**：正方形の個数を求める場合と，長方形の個数を求める場合の色々な問題場面や出し方を比較して，気付く事は無いかな． **意**：正方形の個数を求める場合と，長方形の個数を求める場合が非常によくにていることに気付かせたい．

本授業では3種類の一般化を全て取り扱っている．特に命題分析から十分な分析に至らなかった『問題についての一般化』を，どの様な支援で達成するかの検討が不十分である事は否めない．生徒がより『問題の構造』に注目できるような支援の開発が今後の課題である．

第5章：授業の実戦と記録

本章では，4章までに得られた知見を基に，実際の授業実践を行い，その分析を記す.

5ー1：実践の方法

本研究では，鳥取市内のN小学校第6学年の児童28名を対象に授業実践を行った．筆者を授業者とし，45分の授業の中で授業者の支援を通し，児童の活動がどの様に変化したかを観察する.

5–2：授業の分析

支援を通し一般化を促して行く中で，いくつかの支援がある程度有効に機能する事は解った．しかし，説明していく活動をより重視するという点が不足しており，一般化を十分に達成出来なかったので，一般化を志向した授業においては，証明のような要素を持つ説明を行っていくことが重要であるといえる.

5ー1：実践の方法

本研究における課題3：『どの様な支援が一般化を達成するのに有効であるか』を明らかにするために，第4章で作成した指導案及びそこで設定されている支援が，一般化を十分に達成出来るかについて調べるために，授業実践を行う．

・実践の対象
鳥取市内N小学校第6学年の1クラス（児童28名）

・実施時期
2009年1月14日（水）

・実践方法
本研究4–2で示した指導案を基に，筆者を授業者とし45分の授業を行う

実践の目的は，4–2で示した第6学年の指導案において設定した支援が，一般化を達成するという目的に対してどの様に作用したかを調べる事である．

その為に，観察の対象として4人の抽出児を選んだ．4人の抽出児の選び方として，成績で上位・下位の児童（*1）から，事前の授業観察で図形や規則性を見つけ出す事を比較的得意としている児童とそうでない児童を選び観察の対象とした．
（*1：この学校では児童を成績別に2クラスに分けている為）

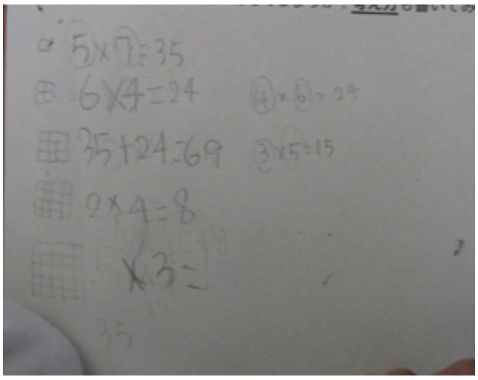
また，授業中に抽出児以外にも顕著な活動が見られた場合，合わせて記録を取った．

（授業実践の様子）

5−2：授業の分析

本実践の中で達成したい一般化は大きく2つである．1つは横に5枚・縦に7枚の正方形が並んでいる場面から規則性を取り出す『規則性の一般化』，もう1つは『場面を広げる一般化』である．そこで，それらが達成されたか，まずは自力解決の場面より探る．

自力解決の終盤，また早い児童は開始早々に数値に表れる規則性そのものには気付いていた．（図1）



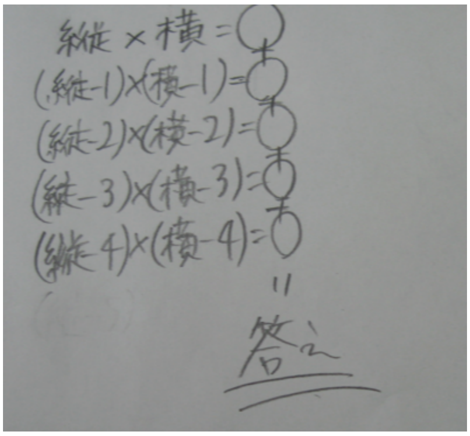
（図1：枚数を求める計算式）

そこで，それらの児童に対しては『支援1：その様な数字の規則性がなぜ表れるかを考えてみよう』という支援を行った．この支援により，規則性に気付くことを狙いとし，次にそれを取り出す活動へと向けようという意図がある．

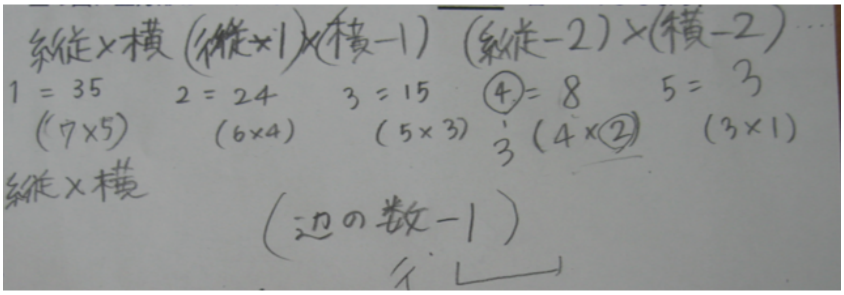
この時，ほぼ全ての児童がその理由を考えられなかった．そこで，多くの児童が計算式を導き出す前に行っていた，正方形を左上詰めで順に書いてみせながら計算式と見比べる支援を行う事で，「1辺の長さが1増えると正方形を並べられる枚数が1枚ずつ減るから」と答えたここから，支援1が有効でなかった理由は，多くの児童が行っていた正方形を詰めて書くという動作と，計算式の数字の関連に着目するような支援になっていなかった事であると考えられる．

つまり，一般化に関する支援は自分が行ってきた活動との関係性に着目していくような支援を考慮していく必要性があるといえる．

次に，支援1を通して規則性に気付けた児童に対して，『支援2：表れた関係を式にしてみよう』という支援を行った．多くの児童は時間切れになったが，この支援によって，2人の児童が式を書いた．（図2・3）



（図2）



（図3）

この時，図2を書いた生徒は最初に与えられた横5・縦7という関係から抜け出せていない事が解る（*2）が，『関係を式に表す』という支援に対してはある種適切である．また，図3を書いた生徒は上手く書き出す事は出来ていないものの，頭の中では1ずつ減らしながらかけていくという規則性が完成している事が伺える．（*3）

この事から，規則性を取り出す事に意識付けるための支援だけでは，それがより広い数についての集合で成り立つということへの意識付けが十分に達成できているとは言えない．これは，今後考えていかなくてはならない課題である．

（*2：児童に聞いた所，縦ー5は0になるからできないと答えた）
（*3：印刷の都合上見えにくいが，右上に…と書いている）

次に，練り上げの場面での支援と児童の活動を考える．『規則性を取り出す一般化』への支援はほぼ自力解決と同様であったが，先に述べたように自力解決の場面で一般性への意識が乏しいと感じたので，図2の式を基に『支援3：このような式はこの場面以外では使えないか』『支援4：どんな場面であればこの式が使えるだろうか』という支援をした．これにより，『規則性を取り出す一般化』・『場面を広げる一般化』を期待した．

その内に児童の1人が「多分枚数が増えてもいいんじゃないか」と言ったことをきっかけに，枚数は関係がないという結論に教室が達した．ただし，その理由までしっかりと説明出来る児童はいなかった．また，『場面を広げる一般化』については全く出てこなかった．

この点について，支援4で意図したような事を児童が殆ど考えていなかったことに着目した．これは，本時の問題設定が『枚数を求めること』であり，それを説明していく事への意識付けがしっかりとなされていなかったことが原因であると考えられる．それにより，支援4が狙った意図通り十分に機能せず，一般化を達成出来なかったと考えられる．

よって，小学校段階において一般化を志向した授業を設計するのであれば，その過程を説明していく事が大切であるといえる．また，その説明も帰納的なものに頼るのではなく，説明の範囲で演繹的な推論に通ずるような事を取り出していく必要性があると考えられる．

第6章：本研究の結論

本章では，本研究で得られた結論と，残された課題について述べる．3種類の一般化とそれを特徴付ける構造が存在する事が明らかになり，ある程度有効であると考えられる支援も考えられたが，3種類の構造それぞれについての緻密な分析は不足しており，またあくまで例題分析から来ているので他の様々な問題に対しても扱えるかは不透明なままであった．

6ー1：研究から得られた結論

一般化には，大きく分けて『規則性の構造』によって特徴付けられる『規則性を取り出す一般化』，『場面の構造』によって特徴付けられる『問題場面を広げる一般化』，『問題の構造』によって特徴付けられる『問題についての一般化』の3種類が存在する事が明らかになった．

また，それらの特徴より証明を振り返っていく活動が一般化を達成していくために非常に需要である事が解った．

6–2：今後の課題

今後の課題としては，3種類の構造の内『規則性の構造』を主軸として捉えたが，他の構造を主軸に捉えるとどうなるかということ．『問題についての一般化』の検討が不十分であったと思うので，十分に検討したいということ．「正方形の個数」問題以外の問題でも同様の事が言えるのかということ．一般化がどの様な段階に分けられるかを検討すること，先行研究が提示した構造と本研究の構造の厳密な対応関係の考察，より踏み込んだ課題3への考察，一般化の妥当性をどの様に授業で保証していくかを考察する事，特殊と一般の関係がどの様になっているかを明らかにするかの8点が考えられる．

今後はこれらの課題の解決を目指し，研究を進めていきたい．

6ー1：研究から得られた結論

一般化には，大きく分けて『規則性の構造』によって特徴付けられる『規則性を取り出す一般化』，『場面の構造』によって特徴付けられる『問題場面を広げる一般化』，『問題の構造』によって特徴付けられる『問題の一般化』の3つの一般化がある事が解った．

また，『規則性の構造』によって特徴付けられる『規則性を取り出す一般化』は，計算式に表れる『縦・横の枚数が1ずつ減っていく』という数字の規則性から一般化が想起される事がわかった．その上で，その規則性が表れる理由を証明し，把握する事が大切である事が解った．実際の学習指導場面では，数値の持つ規則性について着目させ，理由に目を向けるような支援が大切である事が考えられるも解った．

『場面の構造』によって特徴付けられる『問題場面を広げる一般化』は，『規則性を取り出す一般化』で得られた正方形や長方形の求め方が適用できる，他の場面を考えていくような一般化であった．その手法として，『規則性を取り出す一般化』の証明に注目し，『規則性の構造』が成り立つ為に不必要な条件を取り除いていく事で一般化されていく事が解った．実際の学習指導場面では，『規則性を取り出す一般化』の証明をしっかり行っておく事，小学生であるならば説明でよいが，どの様な理由が『規則性の構造』を保証するかについて考えることで，『規則性の構造』が成り立つために不必要な条件を見るような支援が有効であることが解った．

『問題の構造』によって特徴付けられる，『規則性の構造』の扱い方を変えて別の命題を導き出す『問題についての一般化』は，その存在が示唆されたものの，学習指導場面においてどの様な支援が有効であるかを示す事はできなかった．

以上のように，本研究で設定した研究課題1，研究課題2，及び研究課題3に対して一定の成果を得る事ができたが，まだ十分とは言えない．
どの様な点が不十分であるかを次節で検証した．

6–2：今後の課題

今後の課題としては，以下の8点が挙げられる．

①：構造の分類の仕方について

今回の例題分析では，3種類の構造の内『規則性の構造』を主軸として捉えた．他の2つの構造はあくまで『規則性の構造』を最初に捉えた上での話であったので，他の構造を最初に捉え，主軸にするとどうなるのか，新しい分類があるかもしれないし，既存の分類で良いとしても何か異なる学習指導場面の設定があるかもしれない．

②：『問題についての一般化』について

『問題についての一般化』については解らない事も多く，その構造も最もつかみにくいものであった．特に，どの様にして学習指導場面に取り込んでいくかについての検討が不十分であったと思うので，今後十分に検討したい．

③：他の問題場面ではどうなるのかという事

今回の研究では例題分析という手法を取ったので，「正方形の個数」問題以外の問題でも今回考えたような話はいえるのかという事が当然の疑問として挙げられる．

④：一般化の段階はどの様になっているのかという事

今回の分析では，一般化の分類に終始しており，例えば命題B1からC1への一般化と，命題B2から命題Eの一般化では，どちらの方がより一般になっているのか，というような一般化の段階を敢えて考察の対象から外した．もしこれが明らかになれば，学習者が今どの段階の一般化を行っているのかが明らかになると考えられるので，今後は一般化の段階についても検討の対象に加えていきたい．

⑤：先行研究と本研究の厳密な対応

本研究において，van Hieleと中島健三が考える構造を基にして構造を定義し直した．この時，先行研究が提示した『弱い構造』や『厳密な構造』と，どの様に対応しているかの厳密な検討が行われていないので，今後取り組んでいく必要がある．

⑥：課題3の更なる考察

本研究で挙げた研究課題3『どの様な支援が一般化を達成するために有効であるか』についての検討がまだ不十分である．今後他の課題の解決と共に，更なる検証が必要である．

⑦：一般化の妥当性をどの様に保証するか

本研究全体を通して欠けている視点として，一般化を行い命題を導出した後，その命題が妥当であるかをどの様に検討するかという点が挙げられる．今後の研究を通して，明らかにしていきたい．

⑧：特殊と一般の関係について

3章において，一般化の過程で特殊な場合を考える時がある事が示唆された．それが実際の学習指導場面でどの様な役割を果たしているのか，また，一般化の対とでもいうべき特殊化はどの様に特徴付けられ，一般化の授業においてはどの様に取り込んでいけばいいかといった検討がまだなされていない．

今後はこれら8つの課題の解決を目指し，研究を進めていきたい．

参考・引用文献

Bishop,A(1991). Mathematics values in the teaching process.
In Bishop,A(ed),
Mathematical Knowledge ;its Growth through Teaching(P194-214) ,
Kruwer Academic Publishers.

W.Dörfler(1991). Forms and means of generalization in Mathematics.
In Bishop,A (ed.)
Mathematical Knowledge : Its Growth Through Teaching(P. 63-85).
Kluwer Academic Publishers.

van Hiele(1986). Structure and insight: A theory of mathematics education.
Orland, FL: Academic Press.

小原豊(2000). 問題解決行為における数学的な価値判断,
筑波数学教育研究 第19号

中島健三(1981).算数・数学教育と数学的な考え方 - その進展のための考察,
金子書房

山脇雅也(2002).数学教育における図形の見積りに関する研究
ー見積もり過程における図形感覚に焦点を当ててー

鳥取大学数学教育研究　　**ISSN 1881! 6134**

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/