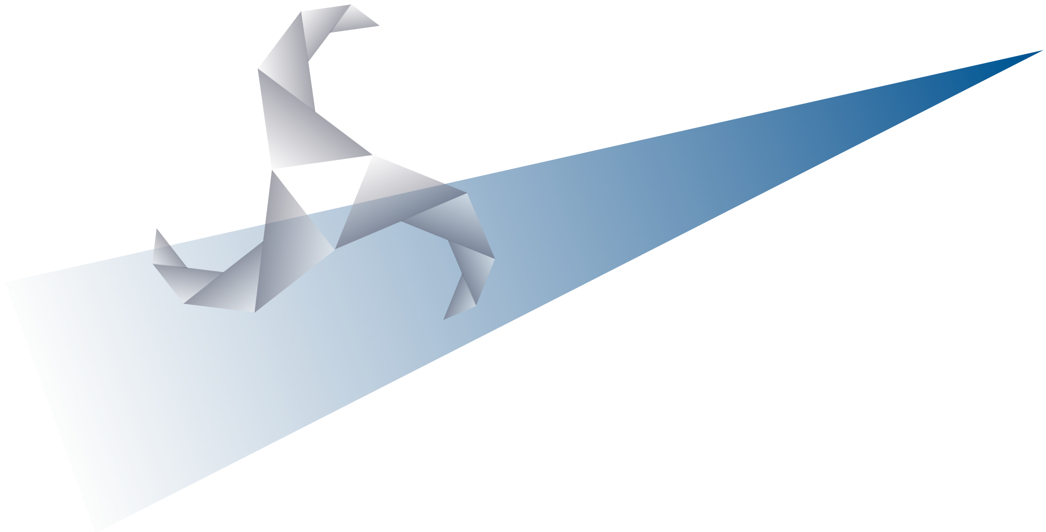
鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

ISSN：1881−6134



文字式による「一般化」について

真野祐輔

vol.10, no.2

Aug. 2007

Site URL：http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html

鳥取大学 数学教育学研究室

文字式による「一般化」について

真野　祐輔
広島大学大学院教育学研究科

1.　はじめに

小学校算数と中学校以上の数学とを，明確に区別するものに「文字（変数）」と「論証（証明）」の出現があると指摘されている（例えば，平林，1986，1996 ; 島田，1990）．いずれも数学の「内容」というよりはむしろ「形式」の側面，さらには数学の「言語」の側面に関わるものである．われわれの課題意識は，文字式による「一般化」を意図した授業設計にあるので，前者「文字（変数）」に関する考察が本稿の主題である．

文字式に関する研究動向について，第 35 回及び第 36 回数学教育論文発表会（日本数学教育学会）での「課題別分科会」WG3【数と計算・代数】を参考にした．そこでは数と計算・代数に関わる学習指導やカリキュラムを捉える枠組みが, 藤井 (2002, 2003)，小山（2002）によってそれぞれ提出されている．藤井（2002）は，式の機能を捉える枠組みとして数学的モデル化過程に基づいた枠組み（「式に表す」「式をよむ」「式の形式的処理」の視点）を設定し，海外の先行研究を整理している．また，小山（2002）は，A. Sfard の具象化理論と E. Gray & D. Tall のプロセプト理論を取り上げ，各理論を比較検討することの必要性を述べている．また藤井（2003）は，小山（2002）において示された各理論に共通する，数学的概念の認識の二重性（duality）を一つの枠組みとして位置づけている．

本稿では，まず,「式」とは何かということを明らかにする．次に，文字式の学習指導の問題性を小学校と中学校での「式」の意味の違いに焦点化して考察し，そこから「一般化（一般性)」の議論を展開したい．その際，上述した数学的概念の認識の二重性（duality）に着目し，文字式による「一般化」を操作的コンセプションから構造的コンセプションへの変容として特徴づけることを提案する．このような「式」の意味の相違に鑑みて，一つの具体例として，平林（1996）を参照し，小学校「から」の視点を考慮した活動を記述する．最後に今後の課題を示す.

2.　「式」とは何か

まず「式」とは何か，ということを明らかにしておく．一般に,「式」は，論理学的・言語学的に明確に規定し得る形式的言語であり，それは，次のように定義することができる（平林，1996）.

> **式とは，定まった記号を，定まった規則に従って並べた，記号の有限系列である**

小学校算数の「式」において,「定まった記号」は，次の 3 種類である．

⑴　対象記号：数字
⑵　演算記号：＋，−，×，÷
⑶　括弧：( )

次に,「定まった規則」は，次のように形式的に述べることができる．

⑴　数字はそれだけで式である．
⑵　A, B が式であれば, (A)＋(B), (A)−(B), (A)×(B), (A)÷(B)はいずれも式である．
⑶　以上のものだけが式である．

このようにして構成された，いくつかの式の間に「変形規則」という一種の同値関係が設定されるが[1]，その形式化は省略する．

以上は,「式」のシンタックス（構文論）

[1]いわゆる「乗除先行の規則」などは，その二次的な要請による補足的規則である．

に相当する．このように「式」が形式的に定義できる概念であることは，算数・数学教育においても，数学言語としての式を語る上で，十分に注目すべきことがらである．

3. 「式」の意味の相違

小学校算数において，「式」は，その最も初期の段階から全学年を通して扱われている．そこでの「式」は，数字を対象記号するいわば「数字式」であり，たとえ□や△，さらにはa，xなどが登場したとしても，それらはいわゆるplace holder[2]として扱われても，計算の対象として扱われることは意図されない．ここでは，文字式の学習指導の問題性を，主として小学校と中学校での「式」の意味の違いに焦点化して考察したい．

3.1 数学的概念の認識の二重性

小学校と中学校での「式」の意味の違いを論じるとき，Sfard (1987, 1991)による操作的コンセプションと構造的コンセプションとしての数学的概念の認識の二重性（duality）に関する研究は，特筆すべきものである．女史は，様々な数学的定義や表現の分析から，同一概念（notion）[3]に対して，対象として構造的に，またプロセスとして操作的に捉えられ[4]，概念形成を操作的コンセプションから構造的コンセプションへの移行として主張する．そこでの分析において，歴史的に多くの数学的概念は，それが構造的な定義や表現として定式化されるより以前に操作的に捉えられてきたということを重要な拠り所として，歴史的に考証されたことが（全てではないが）その順序性を保存したまま，学習過程にも当てはまるとしている．Sfardの操作的コンセプションと構造的コンセプションは，表 1 のようにまとめられている．

表 1：操作的コンセプションと構造的コンセプション（Sfard, 1991, p. 33）

	操作的コンセプション	構造的コンセプション
一般的な特徴	ある数学的実体は，特定のプロセスの所産として捉えられる，あるいはプロセスそれ自身に着目する	ある数学的実体は，静的な構造として捉えられる（まるでそれが一つの実在的な対象であるかのように）
内的表象	言葉による表象によって支持される	視覚的イメージによって支持される
概念発達における位置	概念形成の最初の段階で発達する	操作的コンセプションから進化する
認知過程における役割	効果的な問題解決及び学習のために必要ではあるが十分ではない	認知過程全体（学習，問題解決）を促進する

Sfard (1987, 1991)の研究において注目すべきは，「数学的定義や表現」といった数学の言語的な側面を分析の対象としているという点である．言語の問題は，特定の概念においてのみ言及されるものではない．このような数学の言語的側面に着目しながら，概念形成をモデル化したところに女史の研究の創意があるように思われる．次では，このSfard (1991)によるコンセプションの二重性を一つの理論的視座として文字式の学習指導を考察する．すなわち文字式による「一般化」を操作的コンセプションから構造的コンセプションへの変容として特徴づけることを試みる．

3.2 コンセプションの変容としての「一般化」

小学校の「式」は数字式であり，それは計算手続きの表現であるといえる．ところが中学校の文字式では，式そのものがある構造の表現として対象化されなければなら

---

[2] 「数が入る場所」を示す記号

[3] また，女史は，語「notion」，「concept」，「conception」を明確に使い分けている．これらはすべて「概念」に関わるものであるが，「notion」はその表現が，「concept」はその内容がそれぞれ強調され，そのいずれも《数学的観念が official な形式において，「観念的知識の形式的な世界（universe）」において理論的に構成されたものとして捉えられる》（ibid., p. 3）．これに対して「conception」は，《内的，主観的な「人間の知識（knowing）の世界」における concept の対応物（counterpart）》（ibid., p. 3）として言及される．

[4] 同一の数学的概念（notion）の操作的コンセプションと構造的コンセプションは，互いに排他的ではなく，実際には相補的である（Sfard, 1991, p. 4）．

ない．これらはそれぞれ，「式」という表現に対する，操作的コンセプション，構造的コンセプションに符合するものであると捉えられる．それではコンセプションの二重性を視点すると，文字式による「一般化」はどのように特徴づけられるだろうか．

上述したように，Sfard (1991)は，様々な数学的定義や表現を認識論的に分析し，操作的コンセプションが構造的コンセプションよりも先行することを明らかにしている．さらに女史は，心理学的視座から個人の学習へアプローチし，その移行において，「内面化（interiorization）」,「圧縮（condensation）」,「具象化（reification）」という 3 つの階層的段階を経ることを主張し，概念形成をモデル化している[5]．Sfard (1991)は，「内面化」と「圧縮」が漸次的・量的な変容であるのに対して，「具象化」は瞬時的・質的な飛躍であり[6]，また《「具象化」の段階は，より高次の水準における「内面化」（問題とする対象について実行された過程の中で生じるもの）の始点でもある》（p. 20）と述べている．

この 3 つの継起は以下のように整理できる（文字式を例とした記述を付記）．

① 内面化（interiorization）

学習者が，既になじみのある対象を用いて活動が遂行される過程

- 具体的な数量に関する知識に基づきながら， や分配法則などの基本的な文字の操作を行う
- 数字式に関する操作を通して文字式に関する操作を行う

② 圧縮（condensation）

①での一連の過程や操作をより処理しやすい構成単位にチャンク化し，全体として考察される

- 文字を使った式を効果的に操作し，数量関係に基づいて式に表したり，式をよんだりする
- 数字式と文字式を互いに参照し関連づける

③ 具象化（reification）

①②の活動の中に内在する数学的概念を，実体をもった対象として認識し，その概念を用いて新たな活動に取り組むことができる

- 文字を数の一般的な表現として見なし，数量関係に基づくことなく，文字を使った式を操作したり，式に表したり，式をよんだりする
- 数字式に依存することなく，文字式それ自身を対象として用いる

図 1 は，杜（1991, p. 139）及び秋本（1997, p. 41）を参考にし，上記の 3 段階の立場から数字式と文字式の関係に着目して図式化したものである．

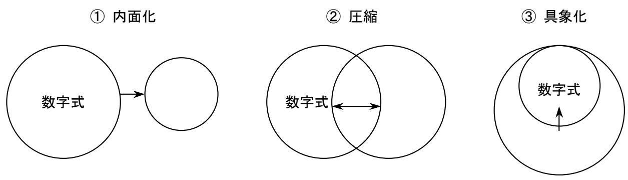


図 1：数字式と文字式の関係図式

杜（1991）によれば，中学校段階では「文字式の世界」と「数の世界」の間に包含関係が成り立っているとし（図 1③を参照），次のように述べている．

> 《中学校の数学のレベルでは，数を特殊な文字式と認めることによって，文字式で数の世界と文字式の世界を一つの範疇にまとめることができる．このときに，文字式に実際の意味を付与するのである．つまり，文字式は数と比べてより抽象的なもので，ある数量あるいは数量関係を表すものである．》（杜，1991，p. 140）

ここで「式」の意味に関して，数字式と文字式が，図 1③に示されたような，特殊と一般の関係にあることに着目できる．本稿では，文字式による「一般化」とは，操作的コンセプションから構造的コンセプションへの移行における「具象化」の状態を指す（図 2）．このとき式それ自身が対象化されたとしても，その文字式の背後には数字式が意識されたままであるという点に注意しなければならない．この「具象化」に関しては，《新しい抽象的対象は，熟知しているプロセスを通して解釈されるような，既

---

[5] 「概念形成の一般モデル」（Sfard, 1991, p. 22）は，当日資料として示す．

[6] 「具象化」は《なじみのある対象を全体的に新たな観点から見るという突発的な能力を要する存在論的変更》（Sfard, 1991, p. 19）とも述べられる．

に十分発達したアイディアを一般化したものとして生ずる》(Sfard, 1992, p. 67) 一方で，《いままで，ある数学的対象の意味に対して主要な源泉であったそのプロセスを，ある数学的対象から高次の対象（version）へ推移していく際に放棄しなければならない》（ibid., p. 67）という「意味論上の譲歩」（Sfardによる術語）[7]が指摘される．卑近な例であるが，演算記号「＋」の意味に関して，数字式においては$2+3$は$2+3=5$と計算できるのに対し，$a+b$を計算することはできないこともこの「意味論上の譲歩」に相当する[8]．このように「具象化」の段階において，数字式に関する特殊な性質が捨象されることも文字式による「一般化」の一つの特徴である．

4. 一つの具体例：小学校「から」の視点として

本稿では，文字式による「一般化」について，小学校と中学校での「式」の意味の相違に焦点化し，コンセプションの二重性という理論的視座からその特徴づけを試みた．A. Sfard の研究における操作的コンセプションから構造的コンセプションへの移行は，二重性に関する他の研究（例えば，E. Gray & D. Tall のプロセプト理論）などと比べて，比較的長いスパンを想定している．その意味で，文字式による「一般化」は，小学校「から」の視点も必要である．このことに関連した一つの具体例として，平林（1996）において提案されている小学校での活動の概要を示しておきたい．

平林 (1996) は，本稿で述べたような「式」それ自身が対象化される以前に少なくとも 2 つの段階が克服されていなければならないことを指摘している．

> 《第 1 は，事物から数観念が抽象されていて，数自体が考察の対象にできる段階である．おそらく，4 年生までには，この段階は超えているであろう．
> 第 2 は，数字が文字（変数）の代わりをしうる段階である．例えば，分数のかけ算の仕方：$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}$は, 特定の数字 2, 3，4，5 を用いるが，どんな数字を用いても同じことができると考えられる段階である．故中村幸四郎先生は，このような定数字を「疑変数」と呼ばれ，数学史的にはヴィエート（Viète, F.: 1540-1603）以前の段階とされている．しかし，この段階も小学校の間にある程度克服されねばならない．》(pp. 8-9)

そして「式」それ自身を考察の対象とできるようにすることを目的として次のような指導を提案している（図 2）.

①「6 になる式をつくりましょう．」
$5+1, 2\times3, 1+2+3, 8-(4\div2), 1+2+9\div3$
などいろいろつくらせる．

②「下のような形の式で，□に数字を入れて，6 になるものをつくりましょう．」
□＋□−□，□×□＋□，□×□−□÷□

③「上で，□のなかへ，式をいれてもよいことにしたら，どんな式ができますか．」
例えば，□＋□−□に対しては，$1\times2+(6\div3+1)-(7-6)$など.

図２：「式」それ自身の対象化を意図した活動の例（平林，1996）

5. おわりに

「式」は言語の一種であり，「式」の学習は言語の学習であるともいえる．数学教育における言語の問題は，特定の概念においてのみ言及されるものではない（三輪，1996；溝口，2001）．むしろそうした言語の機能が算数・数学の学習を促進したり，あるいは抑制したりするのではないだろうか．このような数学言語としての「式」の価値については，より基礎的な検討を要する．実際には，数学の言語的側面から文字式に関わる様々な教材を分析する必要がある．

文字式に関する研究では，「文字式における文字の意味」や「子どもの文字の意味の捉え方」などの観点から類型化されることが多い．このときの「一般化（一般性)」は，文字式による証明などに典型的であるが，

---

[7] 「意味論的な譲歩」に関する記述は，秋本（1997）を参照している．
[8] この点に関して，杜（1991）は，《文字式は数と比べて抽象的なものであるから，それの特性に応じて新しい構文法（syntax）を設けなければならない》（p. 140）と指摘している．

例えば“文字は一般化した数を表す”“数を一般的に表す”のように，未知数，変数などとはその取り扱いにおいて区別される．本稿の主題が，このように類型化されたときの一つの役割を指すのかどうかについては検討の余地があると考える．したがって「一般化」[9]について理論的に考察することが求められる．

最後に，文字式による「一般化」を意図した授業設計上の課題として，次の 2 点を明確にする必要があると考える．

(1) 文字式は，（思考の）「対象」なのか，それとも「方法」なのか

(2) (1)のそれぞれの場合において，「一般化」をどのような活動として実現するか

引用・参考文献

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: operational and structural, *Proceedings of the Eleventh International Conference of PME, Vol.3*, 162-169.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: the case of function. In Dubinsky, E. & Harel, G. (eds.), *The Concept of Function: Aspect of Epistemology and Pedagogy*, *MAA Note, Vol. 25*, 59-84, Mathematical Association of America.

秋本豪（1997）．記号的表現に対する二面的捉え方．中原忠男（研究代表者）「数学教育における表象体系の記号論的･認知論的研究」，科学研究費補助金（基盤研究 C）研究成果報告書．（pp. 27-43）

小山正孝（2002）．数と計算・代数の認識に関わる基礎理論の検討. 第 35 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録，日本数学教育学会，84-88.

島田茂（1990）. 教職数学シリーズ実践編 10 教師のための問題集．共立出版.

杜威（1991）．学校数学における文字式に関する研究．東洋館出版社.

平林一栄（1986）. 数学教育の有効性のために. 奈良教育大学紀要，35(2)，1-17.

平林一栄（1996）．式について−算数優等生を数学落第生にしないために−. 新しい算数研究，No. 309，6-9．東洋館出版社.

藤井斉亮（2002）．数と計算・代数における先行研究の整理と課題. 第 35 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録，日本数学教育学会，74-83.

藤井斉亮（2003）．WG3 数と計算・代数：昨年度の成果と課題. 第 36 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録，日本数学教育学会，83-92.

溝口達也（2001）．数学教育における言語的障害．第 34 回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，577-578.

三輪辰郎（1996）．文字式の指導序説．筑波数学教育研究，第 15 号，1-14.

[9] 例えば，W. Dörfler は，《一般化するとは，変数を構成することである》と結論づけており, 氏が 1991 年に提出した「一般化モデル」は重要な理論的基盤となり得る．

鳥取大学数学教育研究　ISSN 1881−6134

Site URL：http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
- 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
- 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
- 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
- その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/