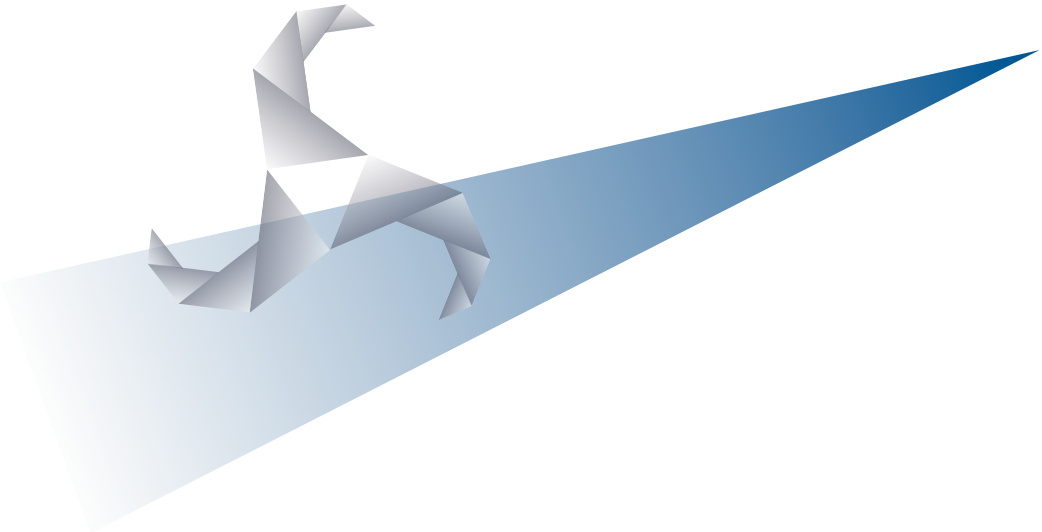
鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education
ISSN：1881–6134



数学教育における目標の検討とその考察

尾崎正和

vol.10, no.8
Feb. 2008

Site URL：http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html

鳥取大学 数学教育学研究室

目次

第 1 章　本研究の目的と方法

1.1　本研究の動機

1.2　本研究の目的と方法

1.3　研究課題

本章では，研究の動機，目的と方法，研究課題について述べる。

1.1　本研究の動機

数学教育の目標は，日々の算数・数学の授業を通して達成されるものであり、その意味では，実践授業の観察，検討は重要である。授業の検討においては，本時の目標や授業の中で展開される算数・数学的活動がその検討の対象となる。「本時の目標」に対する検討は，実際の授業研究において，問題の吟味や授業展開の検討に比べて曖昧にされているのではないかと感じてきた。教師は教材を通して，子どもたちに，どのような見方・考え方や態度が育成され得るかを常に考えておくことは重要なことではないかと考えた。そこで，数学教育における目標に非常に興味を持ち，本研究に至った。

1.2　本研究の目的と方法

本研究の目的としては，第一に，目標はどのような機能と役割を果たすものかを明確することである。第二に，目標が授業にどのように生かされているかを検討し，実践的考察を行うことである。

そのための方法としては，わが国の数学教育における目標を岩合一男氏，中島健三氏，和田義信氏の文献をもとに検討していき，諸氏の主張を明確にし，そこから，目標設定に向けた共通の考え方を検討する。また，アメリカのスタンダードをもとに諸外国との比較を行う。そして，算数・数学の学習において展開される，算数・数学的活動に着目し,「数学的モデル化」の視点から，授業観察を行い，子どもたちが実際に展開する算数・数学的活動から数学教育の目標を検討し，考察するものである。

1.3　研究課題

研究課題 1　わが国の数学教育における目標の検討

岩合一男氏，中島健三氏，和田義信氏の述べている目標をもとに，わが国で言われている目標の検討を行う。

研究課題 2　諸外国における目標の検討

NCTM のスタンダードと研究課題 1 である，日本での目標との比較を行う。また，そのことを踏まえ，義務教育である小学校段階，中学校段階での目標の検討を行う。

研究課題 3　理論と実践の橋渡し

授業観察の対象として，子どもの算数・数学的活動に着目し，分析する。また，そのための視点を明確にする。

研究課題 4　実践的考察と数学教育の目標との関係

授業観察を行い，実際の子どもたちの算数・数学的活動を，本時目標との関連で検討するとともに，数学教育の目標との意味付けを行う。

第 2 章　わが国の数学教育における目標の検討

本章においては，課題 1 である，わが国の数学教育における目標の検討へ対する考察を述べる。

2.1 では，岩合一男氏の教育的価値を直接的な価値，間接的な価値の 2 つに分けて考える場合から考察する。

2.2 では，中島健三氏の一般的な教育の目的を考える立場から考察する。

2.3 では，和田義信氏のなぜ算数・数学を教えるかという立場から考察する。

2.1 岩合一男氏の目標

算数・数学教育の目標について岩合一男氏は教育的価値を直接的な価値，間接的な価値の 2 つに分けて考える場合，以下のように述べている[1)]。

「・直接的な価値…算数･数学で学んだ知識や技能の内容が，そのまま児童・生徒の生活や，将来の行動に役立つ場合の価値である。

・間接的な価値…算数・数学の内容に直接関わるものというよりは，算数・数学で学ぶときに関連して学習される方法や考え方，学習態度に関するものである。」

また，算数・数学教育では，何を目的として学習するかという問題についての視点として，次のように述べている[2)]。

「・数学的な知識技能の育成が目的か，数学的な考え方の習得や思考の育成が目的か

・学習の結果として得られる所産が目的か，学習の過程や経験が目的か」

岩合氏は，どの目的を学習の目的とするかと言っているが，それぞれの目標が別のものではないと感じる。それぞれに関連性があるのではないだろうか。

前者で指摘されている直接的な価値は，算数・数学で学んだ知識や技能であるととらえることができる。言い換えれば，これらの学んだ知識や技能は，後者で指摘する学習の結果として得られる所産にあたると言えよう。

また，前者で指摘されている間接的な価値は，算数・数学で学ぶときに関連して学習される方法や考え方であるととれえることができる。言い換えれば，関連して学習される方法や考え方は，後者で指摘する学習の過程や経験にあたると言えよう。

さらに，直接的な価値を学習の結果として得られる所産にあたるものとして捉えるならば，具体的な事例として，以下のような内容が挙げられよう。

2.1.1 直接的な価値に関連する事例

（1）計算の見積もり

計算は買い物などをする際などの多くの場で活用される。これは，生活をする上で，必要な能力となる。また，買い物を計画通りに行うために，金額を計算しながら商品を考えなければならない。その時に必要となるのが計算の見積もりである。買い物中に複雑な計算をすることは容易ではない。そのような場合に計算を見積もりで考えることで簡単に行うことができる。教科書でも買い物の計算を考えさせ，実生活との関連を持たせ，授業が展開されている。

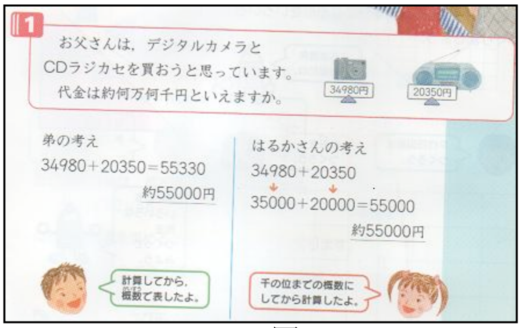


図 1

（2）表とグラフ

表やグラフは，気温の変化や成長などを表す際によく用いられる。また，算数だけにとどまることなく，理科や社会などでも多く利用される。このように，表とグラフを学ぶことは，そのこと自体に価値があると言える。また，表やグラフにすることにより，変化を調べやすくしたり，比べやすくしたりすることができる。さらに，実際に測定していない期間でも表やグラフを読むことにより，その値を予想することができる。このことは，都市の比較などにも活用することができる。

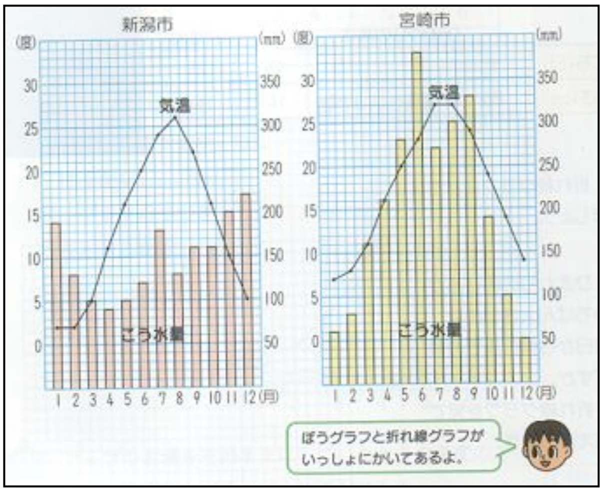


図 2

2.1.2 間接的な価値に関連する事例

また，間接的な価値を関連して学習される方法，見方・考え方や学習態度にあたるものとして捉えるならば，具体的な事例として，「三角形の内角の和」の教材を取り上げて考えてみよう。

この過程にはどのような方法，見方・考え方，学習態度が獲得されるのだろうか。

（1）方法

① 具体的な算数的活動を展開することを通して，ある 1 つの推測を構成する。

具体的には，実測，3 つの角を一箇所に集めることをもとに 180°になるのではないかと推測する。

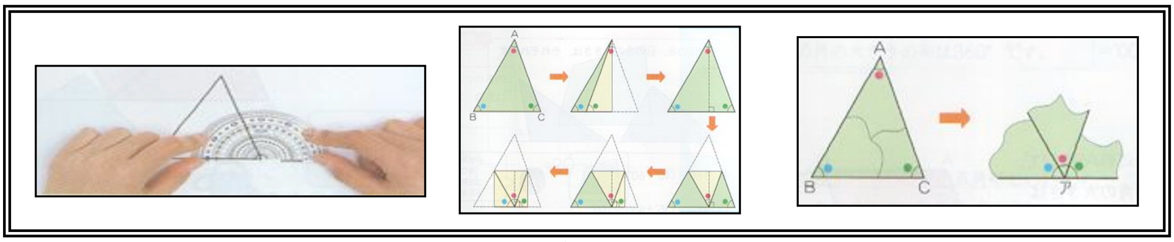


図 3

② 他の三角形についても同様になるか再度，具体的な活動を通して，その 1 つの推測をより確かなものにしたい。

③ その上で，四角形の内角の和，五角形の内角の和と拡げる。

（2）見方・考え方

三角形の内角の和から四角形の内角の和を考える。

① 正方形や長方形の特殊な四角形をもとに，四角形の内角の和を推測する。
② 三角形に帰着し，四角形の中に，すでに学んだ三角形をみることができるようにする。

五角形でも多角形でも言える。

(3) 学習態度

三角形の内角の和を調べる場合や，そこで得られた結果を四角形や多角形に活用できるようにしていく過程で見られる態度とはどういうものであろうか。

身近で単純なものから，より複雑なものへと拡張しようとする態度である。このことは，三角形の内角の和を考えてから四角形の内角の和を考える活動が，その態度にあてはまるであろう。また，新たな問題に直面した際，既習事項を利用し，その問題を解決しようとする態度である。このことは，四角形の内角の和を特殊な四角形の長方形や正方形で考えたり，四角形の中に三角形を作って考えたりする活動が，その態度にあてはまるであろう。さらに，この学ぶ課程には，常に根拠を追求し，問題の本質を見きわめようとする数学的構造を明らかにする態度もあてはまるものだと考える。

オールポート（Allport, G.W）氏は，態度には，少なくとも 5 つの側面があるとしている。その 5 つは,「①精神的神経的状態, ②反応の準備状況, ③組織化されたもの, ④経験を通してつくりあげられたもの, ⑤行動に力学的影響を及ぼすもの」[3] である。シェリフ氏とキャントリル氏（Sherif, M. ＆ Cantril, H.）は，その態度を具体的に規定している。「①態度は本能ではなく，学習を通して形成される反応の準備状態，②態度は一定の対象または状態に関連して形成されるもの　③態度は情動的特性をもつ　④態度は持続的である　⑤関連づけられる刺激の範囲は広狭さまざまであり，特定の刺激または状況と結びついた個別的特殊的な場合もあれば，きわめて広範囲な多様な対象と関連をもつ一般的反応傾向の場合もある」[4]

以上のことから，学習との関連付けるとオールポート氏の「経験を通してつくりあげられたもの」とシェリフ氏とキャントリル氏の「態度は一定の対象または状態に関連して形成されるもの」と「態度は持続的である」がつながる。学習態度を学ぶ経験を経て，身に付けられ得るものであり，新たな学習態度の習得は，一度や二度で必ずしも身についたとは判断できない。つまり，次の学習内容などに活用しようとする態度が比較的持続した状況になったものである。

態度は学習経験を通して学ぶものである。また，刺激を受け，一時的な感情の変化をもたらし，その状態に持続的なものがあると捉えた。この態度には，方法や見方・考え方が含まれた姿ではないかと考えられる。

2.2 中島健三氏の目標

次に一般的な「教育の目的」を考える立場から中島健三氏は次のように述べている[5]。

「(1)社会の一員として生活を実践するのに必要な能力をもつように，若い世代を育て上げること（実用的目的）

(2)過去の生活の実践や創造が文化遺産として蓄積され，学問として体系化されてき

ている。こうした文化遺産は生活に実践されるだけでなく，それ自体に重要な価値をもつもので，次世代に受け継がれるようにすること（文化・教養的または伝承的目的）

(3)人が本来具えている諸能力を可能な限り引き出して育てること（陶冶的目的）[注]

(4)創造的な実践活動を行うことができ，その美しさ楽しさを認めることができるようにすること（創造的活動の実践）」（陶冶については，注をふかして後述する）

中島氏の言う実用的目的，文化・教養的または伝承的目的は，生活で役立ったり，教養としての知識であったりするので，岩合氏の述べている直接的な価値にあたると考えられる。また，陶冶的目的は，数学という外界の刺激により能力を引き出すので，その刺激が数学ということは，間接的な価値の 1 つではないかと考えることができる。

創造的活動の実践は，直接的な価値と間接的な価値の両者を兼ね備えているのではないだろうか。なぜならば，活動を通したことと考えれば間接的な価値といえるが，数学の美しさ楽しさという面から考えれば，直接的な価値とも考えられる。そのような考えから，両者の価値があると言える。価値とは，その教材そのものがもつことを意味しながらも，学習においては，その学びである学習者自身が作り上げるものと，捉えることができる。中島氏は，「創造的な実践活動を行うことができ，その美しさ楽しさを認める」と創造的な実践活動と美しさ楽しさを分けているように取ることができる。しかし，創造的な実践活動の中に，数学の美しさ楽しさがある。このように捉えるならば，創造的活動の実践は，創造的な実践活動の中に，数学の美しさ楽しさを認めることができるようにすることと言い換えることができる。

さらに，文化・教養的または伝承的目的と創造的活動の実践には共通点がある。美しさ楽しさを感じる中に，文化的な高さがある。両者に美しさ楽しさを感じるような目的があるので，別々のものではなく，深い関わりがあると言える。

両者の価値があると捉えるならば，具体的な事例として，以下のような内容が挙げられよう。

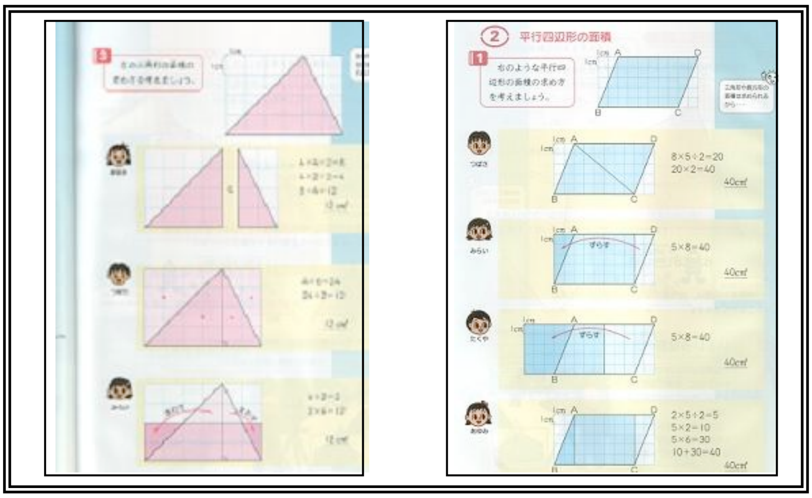


図 4

三角形の面積や平行四辺形の面積を考える学習が 5 年生で行われる。直接的な価値から考えれば，面積は家，部屋やその他の場所の広さを考えたり，比べたりする際に用いられる。また，測量を行う際には，複雑な形を三角形に分けて求めていることな

どから，この学習は将来の仕事にも役立つことができる。
では，間接的な価値から考えればどのようなことが言えるのであろうか。
面積を考える際，その図形の中に 1cm×1cm の正方形が何個入るかで考えることができる。このことは，面積のみでいえることではない。既習事項である数の数え方や，長さの測り方も基準 1 を決め，その何個分かと考えている。これから学習する体積も基準を作り，考えることがなされている。基準を作り，数えたり，比べたりすることは，数学的な見方・考え方の 1 つであるばかりか，人間がある対象に対する考察の見方・考え方である。また，面積を考えるために図形操作を行なう。
この活動は，先ほど述べている《方法》と考えられる。さらに，今まで考えていない図形をより単純な図形にする考え方も，重要な考え方の 1 つと言える。

注）陶冶
・人間のもって生まれた性質を円満完全に発達させること。人材を薫陶（くんとう）養成すること（広辞苑）
・才能・性質などをねって作りあげること（国語辞典）
・ヘンダーや W.フンブルトによって代表される 18 世紀後半のドイツの新人文主義の中で重視された概念。ヘンダーによれば人間は，さしあたって素地として与えられているにすぎないとしている。フンブルトは，人間性の形成が，人間の諸力の全体的な，そして調和した発展，つまり道徳的，知的，あるいは芸術的な面をも含めた人間のあらゆる力のつり合いのとれた発展を通して可能になるとしている。ヘーゲルにおいては，個別的なものがその直接性を否定し，普遍性を獲得することを意味する。（哲学・思考事典）

2.3 和田義信氏の目標

目標を考える際に，なぜ算数・数学を教えるかということを考えたい。そのことについて和田義信氏は以下のように述べている[6)]。
「第一番に，教育というのは文化の伝承にある。今までのねらいは，答えを出すこと，結論を出すことに重きがおかれて，そのうしろにどんな“mode of thought（思考の様式）”を考えているか，どんな角度からもってこようとしているのか明らかにしなかった。ここで，提案したいことは，単に数学的な事実が伝承されていくのではなくて，“mode of thought”いわゆる日本人，あるいは東洋人，皆，顔色がかわっているだけに，かわったことをやる。つまり個性的なものの考え方というものがあるはず。
第二番に，役立つ，有用性ということである。これは，第一と別ではなく，兼ね備えなくてはいけない。
第三番に，感性面であります。」
まず，第一番目では，一人一人の考え方の大切さを述べている。今までの数学の目標としては，問題を解き，答えを出すことに重きがおかれていた。しかし，数学で大切にしなければいけないのは，どのような考え方をしているかということにある。そうすることにより，思考の工夫を考えることができる。このことは，岩合氏

の述べている間接的な価値にあたると考えられる。
第二番目では，役立つ，有用性。このことは，岩合氏の直接的な価値と言い換えることができる。
和田氏は有用性について次の 4 つのことを述べている[7]。
「・言葉として，言語として
・訓練の基礎になるものであるということ
・道具・用具としての数学
・数学は数学のためにおもしろい」
言語として使われるには，十分に理解をしなければ使うことはできない。数学の用語は，生活をする中で多く用いられる。数学の内容を理解しなければ，それらの言葉を使うことはできない。数学で学ぶ，確率，統計や論理的に考えることは，他の教科ともつながりがある。理科の実験では，このような考えを多く用いられる。このようなことから，訓練の基礎になると捉えることができる。
道具・用具として考えた場合，数学は，計算や測定など，実生活を意識した内容が多くあることからも，学ぶ理由と実生活とは区別することはできないであろう。昔は，生活に利用するだけで，数学に価値はないと考えられていたことからもそのことは言える。このことは，数学的な見方・考え方との関係があるであろう。
数学を学んでいき，数学者になる人がいるだろう。その人にとっては，他との関係がなくとも，数学自体に価値があり，数学は何も他のことがなくてもいいのである。
第三番目では，感性面が述べられている。数学にも「美しさ」があり，そのことを感じ，その感性を引き出すために学ぶ必要がある。このことは，岩合氏の直接的な価値と言い換えることができる。和田氏は，感性面を「審美的価値」[8]とも言い換えている。美術や，音楽のように芸術を楽しむように，数学も美を楽しむものである。数学の美しさは，規則性や，関係のなさそうなものが関係をもっていたりすることではないだろうか。
また，第一と第二とは兼ね備えなければいけないとしている。このことは，中島氏の述べている創造的活動の実践と考えることができる。思考を大切にしながら，新しいことを学び，有用性を感じる。この内容は，中島氏の項で，事例としてあげた面積の学習が具体例として考えられるであろう。直接的な価値のある活動と同様に，そのもととなっている数学的な考えを学習しているのである。そのように考えられるのであれば，直接的な価値の中にも間接的な価値が隠れているのではないかと考えることができる。そうであるならば，今まで別に考えていた 2 つの価値は関係性を強くもっているのではないだろうか。第二番目の役立つ，有用性について，直接的な価値と言ったが，主としてはそうだが，間接的な価値も隠れている。

第 2 章のまとめ

本章においては，課題 1 である，わが国の数学教育における目標の検討へ対する考察を述べた。

2.1 では，岩合一男氏の教育的価値を直接的な価値，間接的な価値の 2 つに分けて考える場合から考察してきた。直接的な価値は，算数・数学で学んだ知識や技能であるととらえることができ，言い換えれば，これらの学んだ知識や技能は，学習の結果として得られる所産にあたると言える。また，間接的な価値は，算数・数学で学ぶときに関連して学習される方法や考え方であるととれえることができ，言い換えれば，関連して学習される方法や考え方は，学習の過程や経験にあたると言える

2.2 では，中島健三氏の一般的な教育の目的である，実用的目的，文化・教養的または伝承的目的，陶冶的目的，創造的活動の実践の 4 つの立場からから考察してきた。実用的目的，文化・教養的または伝承的目的は，岩合氏の述べている直接的な価値にあたると考えられ，陶冶的目的は，間接的な価値の 1 つではないかと考えることができた。また，創造的活動の実践は，直接的な価値と間接的な価値の両者を兼ね備えているものと考えることができた。

2.3 では，和田義信氏のなぜ算数・数学を教えるかということを mode of thought，役立つ・有用性，感性面の 3 つに考える立場から考察した。mode of thought は，岩合氏の述べている間接的な価値にあたると考えることができ，役立つ，有用性は，岩合氏の直接的な価値と言い換えることができた。感性面は，岩合氏の直接的な価値と言い換えることができた。

それぞれの挙げている目標は，別のことを言っているのではなく，共通なものであることが言えた。では，諸外国ではどのような目標を挙げられているのか次章で考察する。

第 3 章　諸外国における目標の検討
—特に NCTM のスタンダードを中心に—

3.1　21 世紀に向けたアメリカの主張
—生徒のための新しい目標—

3.1.1　NCTM の目標
3.1.2　わが国と NCTM の目標の比較

3.2　世界の数学教育の動向

3.2.1　小学校段階の目標
3.2.2　中学校段階の目標

本章では，課題 2 である，諸外国における目標の検討へ対する考察を述べる。

3.1 では，NCTM のスタンダードと研究課題 1 である，日本での目標との比較を行う。

3.2 では，そのことを踏まえ，義務教育である小学校段階，中学校段階での目標の検討を行う。

3.1　21 世紀に向けたアメリカの主張―生徒のための新しい目標―

3.1.1　NCTM の目標

1989 年，NCTM のスタンダードでは，生徒のための目標として以下の 5 つの目標を述べている[9)]。

「1. Learning to value mathematics.
2. Becoming confident in one's own ability.
3. Becoming a mathematical problem solver.
4. Learning to communicate mathematically.
5. Learning to reason mathematically.」

スタンダードの序章では，数学する力を単に問題を解く力ではなく，さらに探求したり，新たな推測をしたり，友と語り合ったり，あるいは文脈の中で深く考えたりする力も含んでいる。また，自信や感性の発達をも含んでいるものとして捉えている。そのことから，数学教育を行ううえで，当然何を学ぶかは大切だが，そのこと以上に，いかに学んでいるかが重要である。いかに学んだかを言い換えれば，どの程度，どのように学んだかということが重要になると言える。

新しい目標 1 から，数学は，自然科学，生命科学，社会科学，人文科学と関係をもって発展してきた。その関係は，切っても切り離すことのできないほど深い関係を持っている。この数学の価値を学ぶことは，数学以外との関係を含んでいるものである言える。具体的には，グラフから温度の変化や，けが人などの割合を比較するような内容と考えることができるのではないだろうか。

目標 2 は，数学をしている自分の能力に自信を持つことを述べている。数学は実生活で行われている。そのことを理解させる必要がある。何気なくしていることも数学をしていることがあり，そのことを通し，数学している自分に自信を持たせる必要があるだろう。ここで述べられている測定や幾何学に加えて，前述した計算の見積もりをする授業は，このことにあてはまるだろう。数学を通して，数学に自信を持たせることは，単に発展させるばかりではなく，子どもたちが生活している中で行なっていること自体が数学と意識させることが重要である。

目標 3 の問題解決能力を発達させることは，欠くことのできないことである。時間がかかっても自分で問題解決を行うことは，能力を高めるとともに，2 で述べている「自分の能力に自信を持つ」ことともつながりを持っているであろう。簡単な問題をとくだけではなく，より難しい問題を考え，解けたときこそ，自信へとつながるからである。また，この問題解決は，答えを導き出すことも大切であるが，「どのように考えたか」を大切にしなければならないであろう。

目標 4 では，コミュニケーション能力についてである。数学で学ぶサイン，シンボル，用語は人間の会話する言語であるならば，学習者の会話の中にその用語を取り入れていく必要がある。

数学の基本は推論にある。目標 5 は，数学的に推論することの必要性である。論理的に物事を考えることは，数学をしていく上で重要なことである。推論をすることは，答えを導くことより重視される。答えを導くより，考え方を重視することは，3 の内

容とつながりがある。また，推論を行う際には，そのことが論理的に行われているか検討したり，対話したりすることも必要であろう。そのことは 4 のコミュニケーションとも関係してくるであろう。

3.1.2　わが国と NCTM の目標の比較

生徒のための新しい目標 1 と 2 では，数学の価値を学んだり，自分の能力に自信をもったりすることを目的としている。これは，自分の活動を見つめさせていると考えられる。新しい目標 3 では，問題解決を強調している。このことは，正解を導くこと以上に，問題を解決するための思考の重要性を述べていると捉えられる。新しい目標 4 と 5 は，コミュニケーション能力，推論を強調している。

新しい目標 5 の推論は，3 の問題解決の思考と深く関係があるであろう。また，数学的なコミュニケーション能力がなければ，問題解決者となり，推論することはできないであろう。そして，これらの活動を通したり，日常との関係性を知ったりすることによって，自分の能力に自信がもてるようになるであろう。その中で，数学以外の内容と関係を学び，価値を知ることになる。

そのようなことから，この 5 つの目標には関係性があり，それぞれの目標を別のものとしては考えていない。言い換えれば，1 つの目標を順に達成していくのではなく，1 つの問題の中でそれぞれの目標を達成させなければならないのである。

1 の「数学の価値を学ぶこと」は，岩合氏の「直接的な価値」，中島氏の「文化・教養的または伝承的目的」と同様のことを述べている。2 の「自分の能力に自信を持つよになること」は，生活との関係を学ぶことから，「実用的目的」，「役立つ，有用性」との結びつきがある。「良き問題解決者」になることは考え方や思考を大切にすることから和田氏の述べている「mode of thought」とつながりを持っている。和田氏は，「有用性」の中に「言葉として，言語として」の数学の目標を述べている。これは，4 の「コミュニケーション能力」を述べていることと同様なことであろう。岩合氏の述べている「間接的な価値」は数学を学ぶときに関連して学習される方法や考え方，態度である。5 の「推論をすること」は，この方法や考え方と言い換えることもできるであろう。

スタンダードでは，数学教育の視点を，何を学ぶかは大切だが，そのこと以上に，いかに学んでいるかということに重点を置いている。このことは，今まで見てきた三者も言っていることである。数学教育で大切なことは，いかに学んできたかという事に重きを置かれなければならないのである。

日本で言われてきた目標の中には，アメリカで言われている目標がある。反対に，アメリカの目標の中にも，日本の目標がある。全く別のものではなく，表現は違うにせよ，同様なことが言われている。

3.2　世界の数学教育学の動向

3.2.1　小学校段階の目標

小学校の算数の目標として数学教育新動向研究会は以下のように述べている[10)]。

「限られた分野の中できまりきった問題を解く技術を子どもたちに習得させてやることではなく，これらの技術に結びついた数学的な概念に対する正しいアプローチとほんとうの理解とが子どもに備わるようにすること，そして，後に続く教育に対して強固な基礎となるものを与えることである。」

今までの数学のなかでは，問題を解くことに重きが置かれてきていた。それでは，数学的な見方・考え方を学んでいるのではなく，単に，問題を解くための方法のみを学んでいるのではないだろうか。それでは，数学を学んでいるのではなく，一部の解法を習得したに過ぎない。重要なことは，決まりきった解く技術を学ぶのではなく，その解く技術に結びついた数学的な概念を学ぶことである。

また，次のことをはっきりとした目標として述べている[11)]。

「・探求的態度の育成

・指導の知性化

・集団的な創造としての数学」

探求的態度の育成をすることは，社会的基盤と心理的基盤を持った目的である。社会的基盤というのは，数学には，多種多様な問題が出てくる。子どもたちはこれから，どの問題に出会うかはわからない。必ずしも同じ問題に出会うかもわからない。従来のように，きまりきった解く技能では，新たな問題に出会ったときに，新たな解き方を学習しなければならない。しかし，探求的態度を育成すれば，自分の学んだ技能から，その問題を解くアプローチをしていくことができる。また，きまりきった型の解き方しか学んでいないと，答えがわからないと不安を感じ，情緒的に不安定になる子どももいる。きちんとした型でない問題に当面すると，その子どもは，救いのないまま放置されてしまう。そのような不安を除くためにも，探求的態度の育成が必要である。そのためには，能力や形式的な技能の異なった水準に応じて可能な解決へのアプローチが数個ある場面を提示しなければならない。

上記の目的の相補的な目的として，「知性的なアプローチ」が目指されている。知性的アプローチは，「規則性，異なる場面の間の類似性，共通なモデルなどへの研究」と言い換えている。このことは，探求した内容を点で終わらせるのではなく，点を結んで線にすることであろう。そうすることで，学んだ知識を活用しやすくなり，有用性を高めることができる。

小学校の数学教育では，学級でのグループ創造をしていく。このことは，個々で考えた解き方を全体として共有することができる。このためには，探求的態度の育成が必要となる。探求的態度があると，どの子どもも，何かをやることができ，学級内での討議に刺激を受けることができる。ある水準での解決から他の水準の解決に移ることができるのである。また，学級内で討議することにより，考えを深めることができ，話し合いの中から社会性を高めることも可能となる。

これらのことより，探求的態度とは，多様な解決を導き出せ，既習事項を活用しようとする態度である。このことは，スタンダードで強調されていた良き問題解決者になることである。そのために教師がしなければならないのが，多様な解決が可能な問題を提示することである。また，子どもが探求した内容の規則性や類似性を探求していく「知性的なアプローチ」が必要となってくる。そのことを行う場面が，「練り上げ」

である。このことは，「グループ創造」と言い換えることができる。一つの問題の多様な解決を「知性的なアプローチ」をしたり，既習事項との「知性的なアプローチ」をしたりする必要がある。こうすることで，子どもたちの探求的態度の育成を行うことができる。このような学習をすることにより，一部の限られた解法を学ぶのではなく，「数学的な概念に対する正しいアプローチ」を行うことができる。

3.2.2 中学校段階の目標

中学校の数学の目標として数学教育新動向研究会は以下のように述べている[12)]。
「（a）数学の研究は，特殊な事象についてでなく抽象的なモデルについであること，またそれゆえに数学の学習は，モデルの科学として広い応用をもっているから有用であるということを各生徒に知らせる
（b）各生徒にモデルを作り上げさせ，それを実際的，技術的あるいは経済的な応用をもつ，生徒のレベルにふさわしい問題の解決に用いさせる」

（a）の内容は，「統合的・発展的学習の展開」について述べている。特殊な場合について学ぶのではなく，抽象的なモデルから学習を進めていく。抽象的なモデルについて学習することは，その抽象的なモデルのみを学ぶことはでない。そのモデルを学んでいき，一般化して学んでいく。こうすることで，一つのモデルから幅広い内容へと発展させることができるのである。このことは，数学の有用性について学ぶこともできる。有用性の高い学問であるため，抽象的なモデルから学んでいない内容も見ることが可能となる。また，今まで学んだり，考えたりしてきたものを統合すると，共通点が見えてきたり，新たな発展をしたりすることも可能となってくる。

（b）では「日常事象への活用及び，個に応じた指導」について述べている。日常の生活で数学が活用される場面は多くある。その場面は一人一人によって違いがある。当然，数学の能力は個人によって差がある。そうであるならば，皆が同じような考え方をしたり，教師が全員に同じ支援をしたりすることはできない。教師は一人一人の能力に適した問題解決を行える問題を提示しなければならない。また，単にその問題を解くだけではなく，その解法と数学的な見方・考え方を結びつけることにより，日常場面や他の問題に直面した際に，活用することができるのである。

第 3 章のまとめ

本章では，研究課題 2 である，諸外国における目標の検討の考察を述べた。

3.1 では，NCTM スタンダードと，前章で考察したわが国の目標を比較してきた。スタンダードでは，何を学ぶかは大切だが，そのこと以上に，いかに学んでいるかということに重点を置いている。このことは，今まで見てきた三者も言っていることである。数学教育で大切なことは，いかに学んできたかという事に重きを置かれなければならないと考えることができた。

3.2 では，前節の内容を踏まえ，諸外国と義務教育である小学校段階，中学校段階での目標の検討を述べた。わが国，アメリカ，諸外国の目標の比較を述べる中で，それぞれの主張に大きな違いがないことがわかる。そのことを踏まえ，実践的考察に向け，理論と実践の橋渡しを次章で考察する。

第 4 章　理論と実践の橋渡し

本章では，課題である，理論と実践の橋渡しの考察を述べる。

4.1 では，前章までで述べたことを踏まえ，特に数学的モデル化に着目し，考察を行う。

4.2 では，算数的活動を本時目標との関連で検討し，算数・数学教育の目標との意味付けを行うための実践的考察に向け, 授業観察・考察の視点についての考察を述べる。

4.1　数学的モデル化

モデル化の定義について岩合氏は以下のように述べている[13)]。

「あるもの M があるもの P のモデルであるといわれるのは，それらの間のある種の同型性に基づいて，P における事柄が M における事柄に反映されるとき，また，その逆もいえるときである」

このことを言い換えると，原型 P を考える際，P についてあまりわからない時に，P より単純であったり，分かりやすかったりする M に置き換え，考える。M について知られていることを具体的活動，思考によって解決し，その結果から，P に置き換え、P の理解をしたり，新たに事実を発見したりすることができるのである。このことは，図で表すと図 1 のようになる。

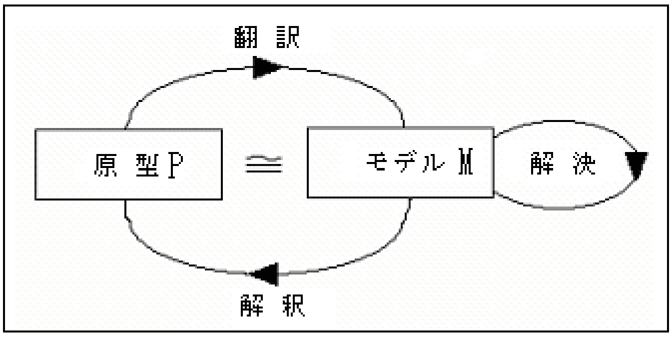


図 1　原型とモデルの関係

数学的モデルについて岩合氏は「数学的概念形成や原理・関係」を原型とするものと，「現実世界の事象」を原型とする 2 つの面から数学的モデルを捉えている。そして，「数学的概念形成や原理・関係」を物的モデル，図的モデル，言語的モデルの 3 つに分ける場合，以下のように述べている[14)]。

「(1) 物的モデル…操作などの対象として用いられる

(2) 図的モデル…思考の対象や視覚的にイメージ化された表現として用いられる

(3) 言語的モデル…推論や演算などの対象として用いられる」

この 3 つの例として，「円」で考えた場合，「物的モデル」は，紙を切り抜いた円や円板である。「図的モデル」は黒板やノートに描いた円形であり， $x^2+y^2=r^2$ という方程式は，「言語的モデル」と言えよう。このときの同型性は，一点から等距離にある点の集合ということが言える。

「奇数と奇数の和が偶数になる」ことについて考える。「物的モデル」では，2 種類の奇数個の果物などを寄せ合わせるという操作。「図的モデル」は，3+5，5+7 といったような奇数の組み合わせを図 2 のように表す。そして，言語的モデルは $(2m+1)+(2n+1)=2(m+n+1)$ と考えることである。この言語的モデルは，図 2 を一般化した図 2−2 で表すことができ，単に式としてではなく，図的モデルとの関係性を深く持っている。また，図 2 を一般化したものが図 2−2 であり，この図では，5＋7 という一つの式にあてはまる図ではなく，奇数＋奇数のすべてを表すことができるの

で，この図の有用性の高さを感じることができる。この問題での同型性は，どちらの数も 2 で割り切れない数同士の足し算であると言える。

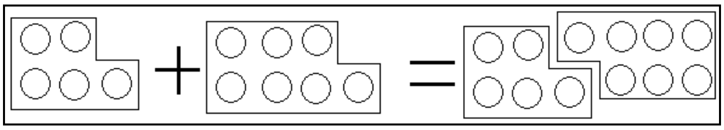


図 2　奇数＋奇数＝偶数

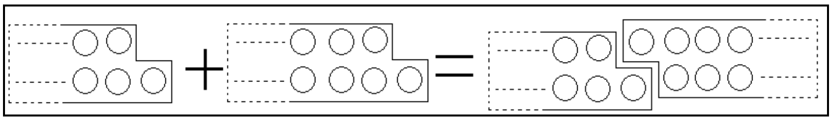


図 2－2　奇数＋奇数＝偶数の一般化

（1）の物的モデルは，小学校段階で多く用いられる必要があるであろう。そして，思考が発達していくにつれ，(2)，(3) と発展させる必要があるであろう。そのことは，実例を挙げた 2 つの内容からも考えることができる。当然，それぞれのモデルに価値があり，教師は，それぞれのモデルで考えている子どもに対し，知性的なアプローチを行わなければならない。

後者の「現実世界の事象」を原型とするものについては，このように述べている[15]。「現実世界の事象あるいは現実的事象（例えば，現実世界の事象を言葉で表現したもの）を原型とし，数学的な処理ができるように，それぞれを図表や数式などの数学的表現手段によって表されたものを**数学的モデル**と呼ぶ」としている。

このことを実例で考えてみると，小学校 1 年生で，店でいくつかの品物を買い物するという現実世界の事象や，小学校 3 年生での，水の量や，物の重さを数値化した数や文字，あるいは，値段や重さの合計を表す数式や中学校で用いられる文字式などの言語数式的モデルを挙げることができる。また，文章題は現実世界の事象そのものとは言えないが，原型として，それを表，グラフ（小学 3，4 年）の図的モデルや，数式や方程式，不等式，関数の言語数式的モデルなどの考えることがあり，このことも「現実世界の事象」の場合である。

数学的モデルは現実の領域から数学の領域へ繋げる役割をするものである（図 3)。

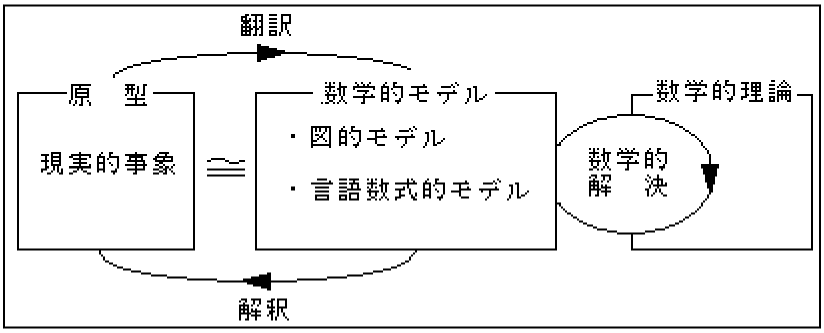


図 3　数学的モデル

このような数学的モデルの算数・数学教育での用いられ方を「数学的概念の形成」をねらう場合と「数学的問題解決能力の育成」を図る場合との 2 つに岩合氏は分けて

いる。

概念の形成は抽象活動の産物であると言われている。そうであるのならば，概念形成は，単に言葉よって定義され，言葉の伝達によってなされるものではない。抽象活動の産物である数学的概念を言葉のみの伝達では，概念を理解できる児童・生徒は少ないであろう。なぜならば，概念はボールを投げて渡すように，教師から児童・生徒に受け渡すことができないからである。それまでに培ってきた感覚やすでに形成している諸概念から，長い時間かけて，概念を形成していくのである。そこで必要となってくるのが数学的モデルの活用である。今までに形成されている概念を活用し，考え，新たな問題を解決することにより，概念は形成されていく。形成させたい数学的概念に適したモデルを示すことが，教師の必要な役割である。

数学教育において，問題解決が 1980 年頃から重視されている。数学的モデルの構成を重視する学習は，数学的問題解決学習と一致すると考えることができる。岩合氏は「数学的モデルは，そこに数学を適用・応用できるような状況を提供する。」と述べている。そのことを言い換えると，数学的モデルは現実世界の事象を数学的に処理していくことであり，現実の領域から数学の領域へ橋渡しする役割をはたしているということである。一般的な数学的問題解決過程は，次のようにしている[16)]。

「(1) 現実問題をつかむ段階
(2) 現実的モデルをつくる段階
(3) 数学的モデルをつくる段階
(4) 結果を得る段階
(5) 得られた結果を現実世界と比較してテストする段階
(6) モデルを修正し改善する段階」

この問題解決の過程を図に表したものが図 4 である。

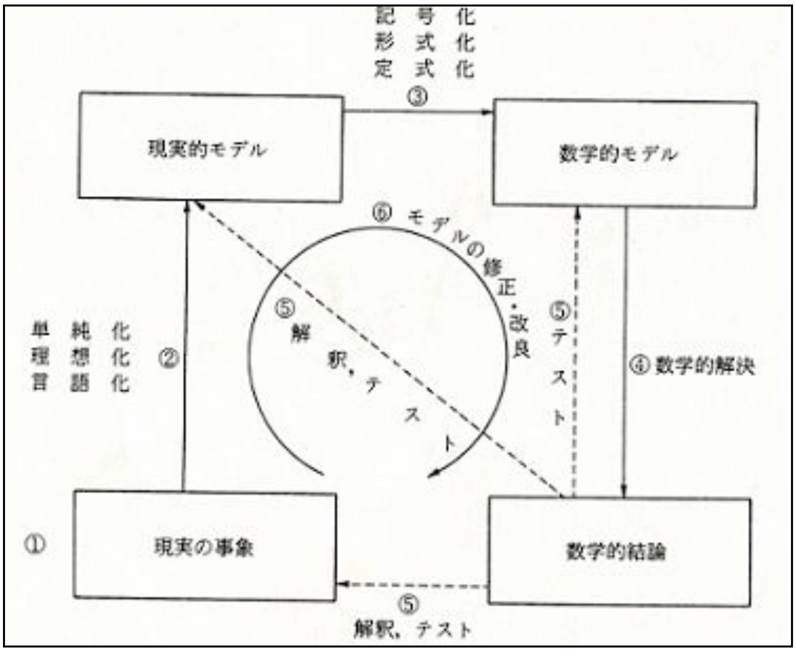


図 4　数学的モデル構成による問題解決過程

この課程を数学的モデルに当てはめて考えるとこのようになる。具体例として，以下の問題で行ってみる。

（1）現実問題をつかむ段階－おはじきを1辺に6個ずつ並べ，正方形を作った。このとき，おはじきの数は何個必要でしょう。

(2)現実的モデルをつくる段階－おはじきを1辺に6個ずつ並べて正方形を作るには，何個おはじきがいるか。

（3－1）数学的モデルをつくる段階－図 5－1 のように，おはじきを分けることによって，問題を解決しようとする。

（4－1）結果を得る段階－おはじきの 6 つのグループと 4 つのグループがそれぞれ 2 つずつあるので，6×2+4×2=20 という言語的モデルを作り，問題を解決する。

（5－1）得られた結果を現実世界と比較してテストする段階－得られた結果はおはじきの数として正しいことが言える。

（6－1）モデルを修正し改善する段階―（3－2）図 5－2 のように考えることで，ほかの見方ができるのではないかと考え，問題を解決しようとする。

（4－2）結果を得る段階－おはじきの 6 つのグループが 4 つある。しかし，重なっているおはじきが 4 つあるので，6×4－4=20 という言語的モデルを作り，問題を解決する。

（5－1）得られた結果を現実世界と比較してテストする段階－得られた結果はおはじきの数として正しいことが言える。

（6－2）モデルを修正し改善する段階－図 5－3 から図 5－5 のようにおはじきの分け方を変えていき，おはじきの数を図的モデル，言語的モデルで表わし，問題を解決していく。

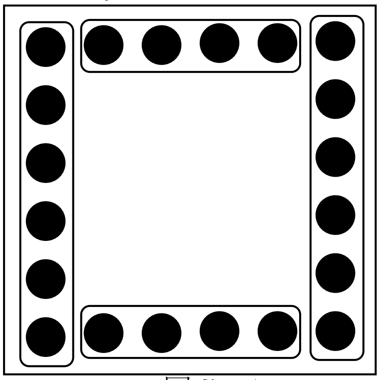


図 5―1

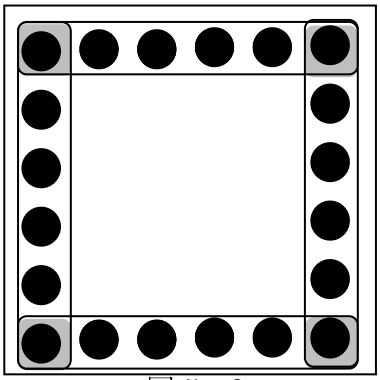


図 5―2

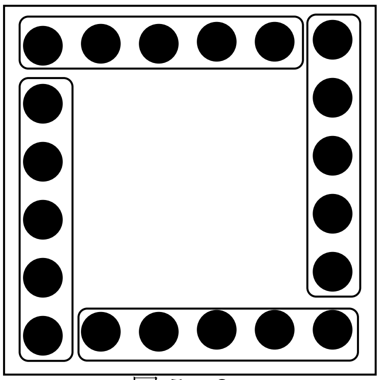


図 5―3

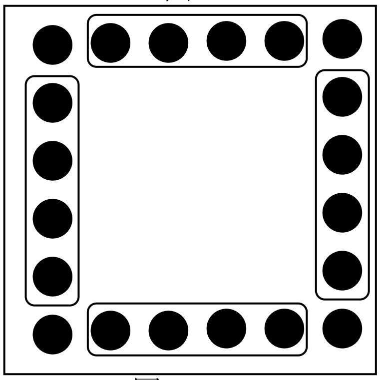


図 5―4

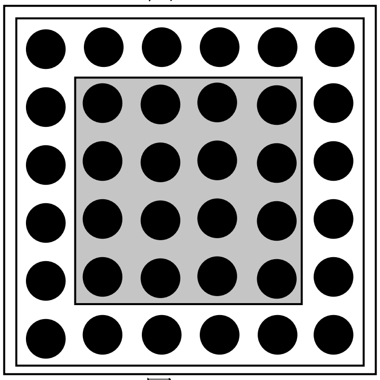


図 5―5

このように問題解決を行ううえで，モデルは重要である。単にその問題を解く事に限らず，そのモデルから自ら発展することも可能となる。モデル化は，問題解決能力の育成に必要なことであり，そのことから，探求的態度の育成にもつなげることが可能となる。(6）のモデルの修正は，はじめの考えが誤っていることを正しい考え方にすることでもあるが，はじめの考え方を元にほかの方法や，より手際のよい表現・処理に変えていくことも含んでいる。

この数学的モデルは「統合的・発展的学習の展開」，「日常事象への活用及び，個に応じた指導」そのものとして考えることができる。また，小学校段階での探求的態度の育成ともつながりがあり，小学校段階と中学校段階での目標には，大きな違いはないのではないだろうか。岩合氏は小・中学校の目標の共通点として，以下の 3 つをあげている[17)]。

「(1）事象を数理的に考察し処理する態度の育成

(2）数理的な処理あるいは数学的な見方や考え方のよさの感得

(3）数学的な知識・技能や考え方を進んで活用する態度の育成」

この 3 つの共通の目標は，個々別々にねらって達成できるものではない。子どもに事象を数学的に考察・処理することによって達成させるものである。ここで挙げられている（2）は，「よさの感得」である。習得ではない。このことから，感じることが重要性であると捉えることができる。子どもたちの数学的概念は，言葉によってできるものではなく，活動を通し，必要性やよさを感じることから定義されることともつながりを持たせることができる。感得するためには，問題解決が必要になると考えられる。抽象的なモデルを探求していくことで，問題解決を行い，よさを感じ，感得していくであろう。抽象的なモデルを探求していくことから，(3）の態度の育成を可能にするのである。このことは，探求的態度の育成そのものである。

4.2　授業観察・考察の視点

わが国における目標では，中島氏の実用的目的，文化・教養的または伝承的目的や和田氏の役立つ，有用性が岩合氏の直接的な価値に言い換えられ，中島氏の陶治的目的や，和田氏の mode of thought は岩合氏の間接的な価値であることを述べた。直接的な価値と間接的な価値は，一見別なものであるようだが，中島氏の創造的活動の実践のように，相互関係を持っていることが言える。日常に使われている数学を用具としての理解で終わらせるのではなく，その概念を学ぶことにより，より実生活でもより活用できることともつながる。概念形成は抽象活動の産物である。概念形成は長い時間をかけて，今までに形成されている概念を活用し，考え，新たな問題を解決することにより，概念は形成されていく。数学的モデル化を活用することによって，上記の目標を達成することができる。また，数学的モデル化は， NCTM スタンダードの 5 つの目標でも同じようなことが言える。数学の解き方を単に教えるのではなく，問題解決者となり，数学的推論を行い，数学をしている自分への自信へとなると言っている。諸外国における目標では，子どもたちへの目標として，探究的態度の育成に重きが置かれていた。

これらのことから，算数・数学教育では，「何を学んだか」ではなく，「どのように・

どの程度学んだか」が重要となる。4.1 で述べたように，数学的モデル化は「統合的・発展的学習の展開」，「日常事象への活用及び，個に応じた指導」そのものとして考えることができる。また，数学的モデル化は単にその問題を解く事に限らず，そのモデルから自ら発展することも可能となる。モデル化は，問題解決能力の育成に必要なことであり，そのことから，探求的態度の育成にもつなげることが可能となるので，子どもたちの数学的活動を「数学的モデル化」の視点で観察することにより，子どもたちが「どのように・どの程度学んだか」ということを見ることができる。

このことを踏まえ，以下の 6 つの項目から授業観察を行うことにした。

「 a…現実問題をつかむ段階
b…現実的モデルをつくる段階
c…数学的モデルをつくる段階
d…結果を得る段階
e…得られた結果を現実世界と比較してテストする段階
f…モデルを修正し改善する段階」

これらの視点から授業観察を行い，授業考察では下記の視点で行う。

「α…事象を数理的に考察し処理する態度の育成
β…数理的な処理あるいは数学的な見方や考え方のよさの感得
γ…数学的な知識・技能や考え方を進んで活用する態度の育成」

上記の視点から，小学校第四学年で授業観察・考察を行った。算数を比較的得意としている A 児，平均的な B 児と比較的苦手としている C 児を抽出し，A 児と C 児，B 児と C 児の比較を行った。具体的な活動は次章で述べる。

6 つの授業観察の視点と，3 つの授業考察の視点から授業観察を行い，モデルを作り比較を行った。A 児と C 児，B 児と C 児では数学的活動の量的にも質的にもあきらかな違いがあった。

4.2.1　考察に向けて

例えば，結果を得る段階において A 児は多様に解決を試みる態度がみられるとともに，得られた結果に対してもその正しさを検討する態度もみることができた。また，教師の支援によって数理的な処理はより手際のよい方法へと自ら修正する。さらに，集団による練り上げ過程では，他者の表現・処理を試み，自らの数理的処理に修正を加える態度もみられた（図 6)。一方，C 児は，例えば二等辺三角形の作図に関して，一辺（底辺）の垂直二等分線の作図は思いつくものの，その後数理的な処理を進めることができなかった。教師の度重なる支援を受けても自らの考えに固執し，他の方法による二等辺三角形の作図を試みることはできなかった（図 7)。

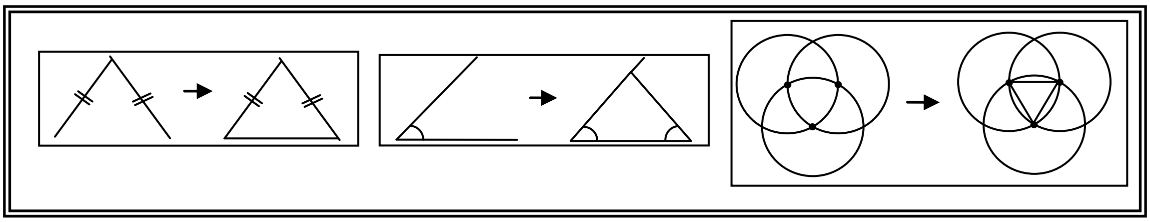


図 6　A 児の活動

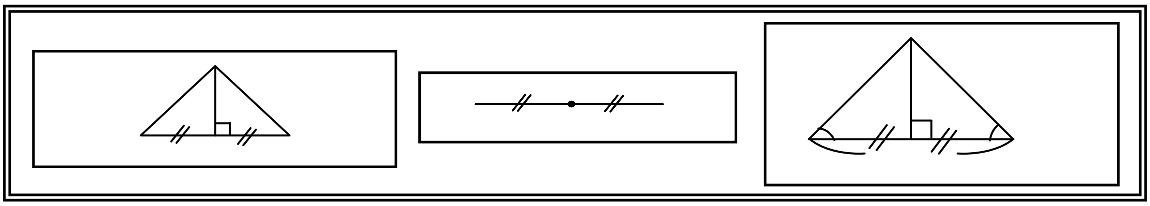


図 7　C 児の活動

同様な算数的活動の違いは B 児と C 児においてもみることができた。例えば，正三角形の作図に関して B 児は，正三角形の性質に着目して多様な作図を試みた。また，自ら用いた手続きについてその操作をふり返り，等しい辺を別なる操作で確かめていた（図 8)。他方，C 児ははじめの操作を単に繰り返すのみであった（図 9)。集団による練り上げの過程では，B 児は自ら数理的な処理した方法について，なぜ正三角形になるのかと自らに問い，その問いに自ら答えるといった態度もみることができた。他方，C 児は他の子どもの数理的な処理が示されてもその作図に関心を示さず，自力解決で用いた数理的処理をくり返し続けていた。

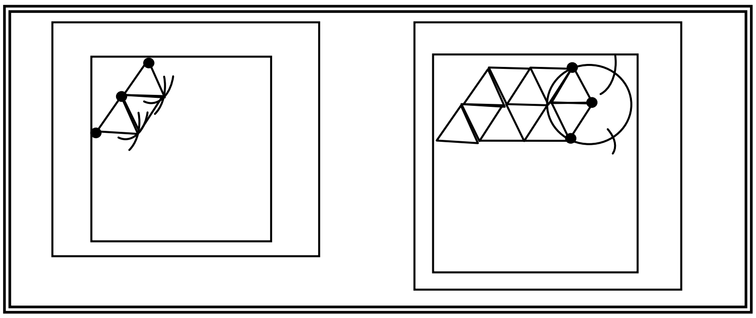


図 8　B 児の活動

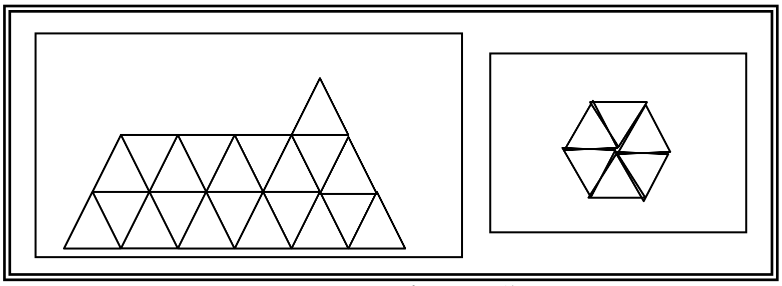


図 9　C 児の活動

4.2.2　新たな視点の再構成

授業観察の視点として設定した数学的モデル化の 6 つの具体的な活動，考察の視点として設定した数学的な処理，数学的な見方・考え方及び活動の態度は上述してきた通り，算数的な活動の「質」と「量」において明らかに A 児と C 児，B 児と C 児には違いを捉えることができる。

しかし，その数学的な活動の違いはどこから生まれているのだろうか。

・自力解決の過程において，一方は二等辺三角形の作図を 3 通りもの方法で作図を試み，他方は 1 通りの方法でのみ作図をする。

・教師の支援によって，一方は別の作図の方法を試みようとし，他方は別の視点か

ら作図を試みることができない。

つまり，二等辺三角形のいくつかの性質をもとに，それぞれの性質から作図を試みる子どもと，作図を試みられないこどもの違いは何であるかである。

・集団による練り上げの過程において，一方は他者の作図方法を理解し，他方は作図方法を理解できない。

・集団による練り上げの過程において，一方は他者の作図方法で作図を行うことができ，他方は作図をおこなうことができない。

・教師から示された新たな作図方法について，一方は正三角形の性質に着目し，条件に沿った作図を行い，他方は正三角形の別なる性質に着目することができないのである。

授業観察及び考察記述から明らかになった抽出児 A と C 児，抽出児 B と C 児の算数的な活動の「質」と「量」の違いは，抽出児それぞれが獲得している知識（授業観察においては，二等辺三角形や正三角形の性質についての理解)，抽出児それぞれがもつ知識についての獲得の仕方（例えば，単なる定義や性質を知るにとどまらず，操作や数学的処理まで含めた定義や性質の理解）に依存するのではないかということである。

もし，上記の点が言えるのであれば，本授業観察の中でみることができた A 児と C 児，B 児と C 児の自力解決の様相をはじめ，教師の支援後の算数的な活動の様相や集団における他者の考えに対する抽出児 A，B，C 児の反応等は説明できるのかもしれない。

今までは，あまり意識していなかったが，知識に 2 つの種類があることをエレン・D・ガニエが以下のように述べている [18]。

「宣言的知識とはそれが何であるかについての知識であり，手続き的知識とはどのように行うかについての知識である。」

授業考察においては宣言的知識は，何かを知っているということだと捉えることができる。そして、手続き的知識は，知っているだけではなく，そのことを活用できる知識であると捉えることができる。また，宣言的知識は「何を学んだか」と考えられ，手続き的知識は「どのように活かすか」と考えられるのではないだろうか。

そこで，次章においては，授業観察によって得られた抽出児それぞれの算数的な活動の違いを，知識の理解，その理解の仕方に視点を当てて考察を行うものである。

第 4 章のまとめ

本章では，研究課題 3 である理論と実践の橋渡しについて考察してきた。

4.1 では，数学的概念の形成や問題解決能力の育成に注目し，数学的モデル化について述べた。数学的モデル化をすることで，単にその問題を解く事に限らず，そのモデルから自ら発展することも可能となる。モデル化は，問題解決能力の育成に必要なことであり，そのことから，探求的態度の育成にもつなげることが可能となることが言えた。また，数学的モデル化と小・中学校の目標の共通点としている「処理する態度の育成」，「よさの感得」，「活用する態度の育成」は 2 章，3 章でみてきた重きを置かなければいけないと述べてきた目標と言えた。

4.2 では，算数的活動を本時目標との関連で検討し，算数・数学教育の目標との意味付けを行うための実践的考察を行うための視点を明確にしてきた。算数的活動の質的・量的な比較とともに，宣言的知識と手続き的知識に着目し，実践的考察することについて述べた。それらの視点か，実践的考察をした内容を次章で述べる。

第 5 章　実践的考察

本章では，研究課題 4 である，実践的考察と算数・数学教育の目標との関係について述べる。

5.1 と 5.2 では，算数を比較的得意としている A 児と，比較的苦手としている C 児の算数的活動の様相を比較し，考察を行う。

5.3 と 5.4 では平均的な B 児と，比較的苦手としている C 児の算数的活動の様相を比較し，考察を行う。

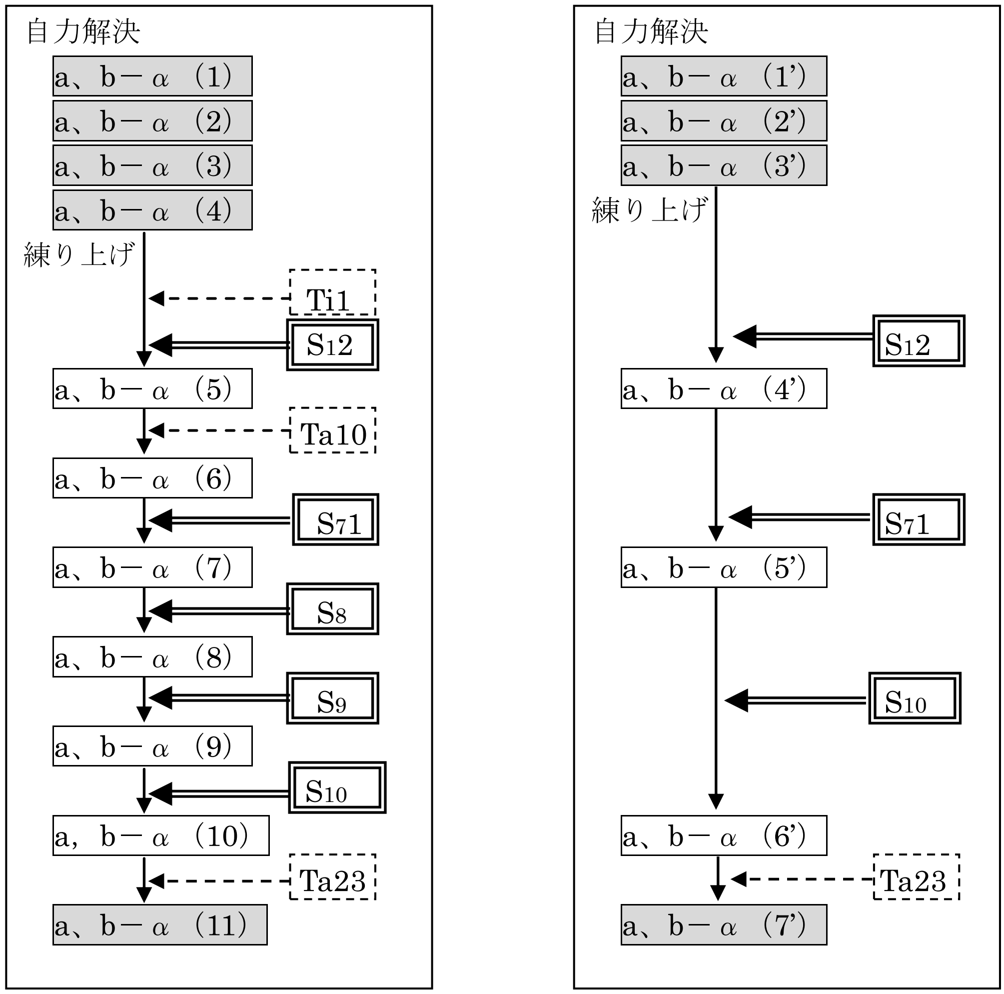
5．1　A 児と C 児の算数的活動の様相

（1）観察記録

2007/10/30

授業者　姫田先生

A 児　　　　　　　　　　　　　　C 児



図式化－1　A 児と C 児の数学的活動の展開

観察の枠組み

a…現実問題をつかむ段階

b…現実的モデルをつくる段階

c…数学的モデルをつくる段階

d…結果を得る段階

e…得られた結果を現実世界と比較してテストする段階

f…モデルを修正し改善する段階

考察の枠組み

α…事象を数理的に考察し処理する態度の育成

β…数理的な処理あるいは数学的な見方や考え方のよさの感得

γ…数学的な知識・技能や考え方を進んで活用する態度の育成

教師の支援

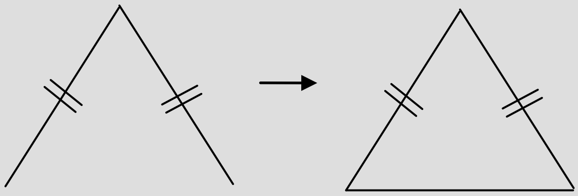
Ta…全体への支援
Teaching all

Ti…個への支援
Teaching individual

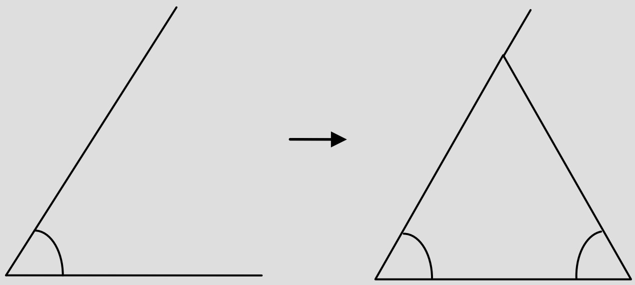
A 児の活動

a、b－α（1～4）

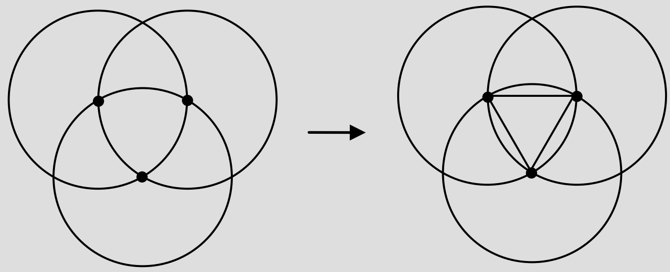
A－Ma1：定規を用いて，等しい 2 辺をとり，その間に線分を引いて二等辺三角形を描く。



A－Ma2：適当な線分を引き，その両端に 70°をとり二等辺三角形を描く。



A－Ma4：コンパスを使おうとする。

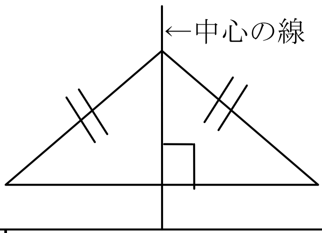


Ti1：「二等辺三角形は，正三角形から条件が 1 つ減ったんだよね。だから，1 つ自由にしてあげたらいいんじゃない。」

S12：定規で底辺を引く。
「半分の所で直線を引きます。」そのあとに，垂直二等分線を引く。

a、b－α（5）

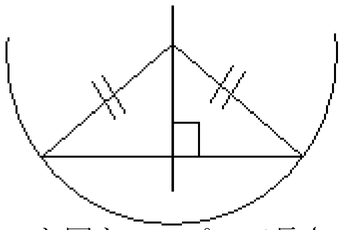
A－Ma8：



Ta10：「ならこれで確かめてみよう。」コンパスを出す。
長さをコンパスで確認させる。

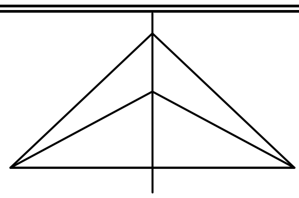
a、b－α（6）

A－Ma9：



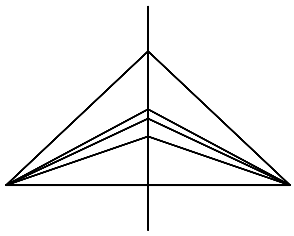
先ほど描いた図をコンパスで長さを測る。

S71：

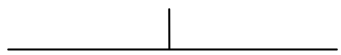


a、b－α（7）

A－Ma10：

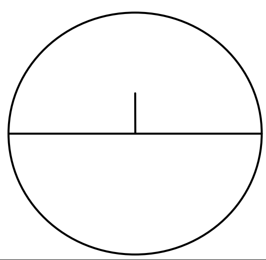


S81：



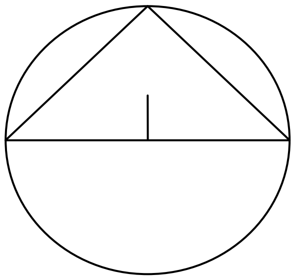
「こうして。」

S72：

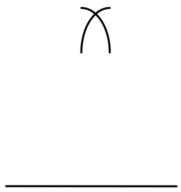


a、b－α（8）

A－Ma11：板書から，二等辺三角形を考えて描く。



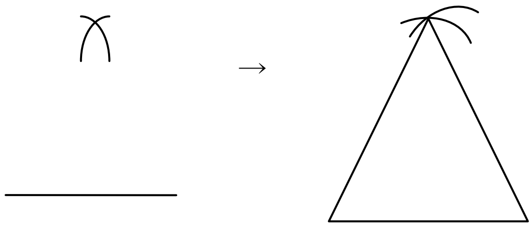
S_{9}1：



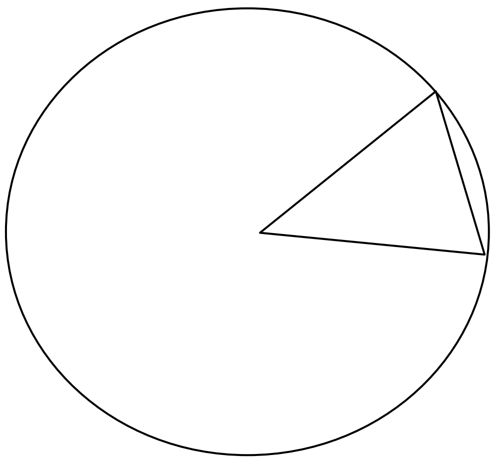
S_{8}2：交点と線分の端とを結び，二等辺三角形を作る。

a、b－α（9）

A－Ma12：新たな方法で二等辺三角形を描く。

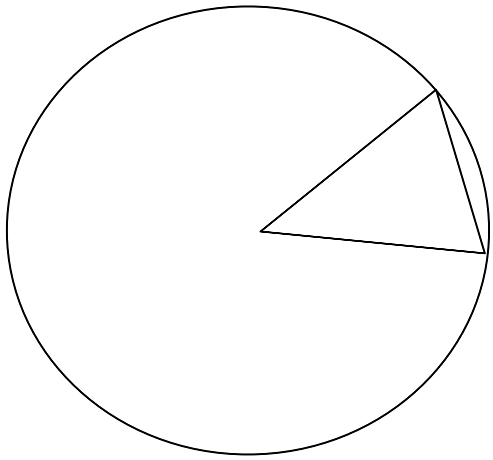


S_{10}：



a、b－α（10）

A－Ma6：コンパスで円を描く。
演習から中心に線分を2本とり，二等辺三角形を作る。



Ta23：「そうだね。どの方法でもいいから描いてみよう。」
「ここの長さ7センチ，こことここが5センチのを描いてみよう。」

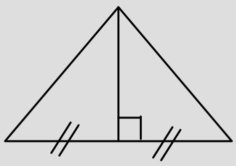
a、b－α（11）

A－Ma13：全部の方法で描いてみる。
長さのみを考える際には，S_9の方法が最も描きやすい事に気付く。

C児の活動

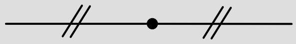
a、b－α（1’～3’）

C－Ma1：向きに線分を引き，中点を取る。
線分の垂直二等分線をとり，二等辺三角形を作る。



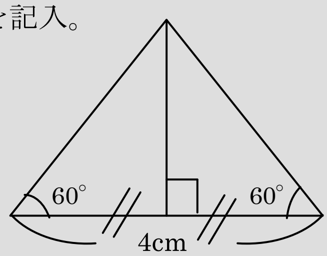
C1：C－Ma1でしてきたことを消す。

C－Ma2：一点をとり，そこから左右に等しい長さの線分を引く。



C2：C－Ma2でしたことを消す

C－Ma3：線分を引き，分度器で垂線を引く。
垂直二等分線を引き，二等辺三角形を描く。描いた図形に長さと，角度を記入。

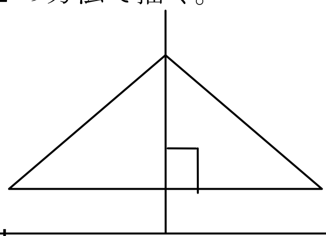


C3：<u>C－Ma3 でしてきたことを消す。</u>
C4：コンパスを手にするが，何もしない。

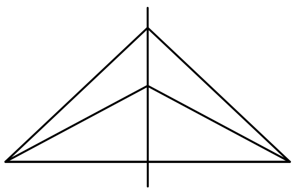
$S_{1}2$：定規で底辺を引く。
「半分の所で直線を引きます。」そのあとに，垂直二等分線を引く。

a、b－α（4’）

A－Ma4：$S_{1}2$ の方法で描く。

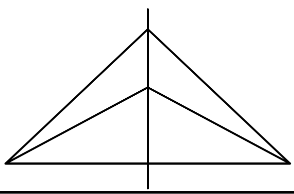


$S_{7}1$：

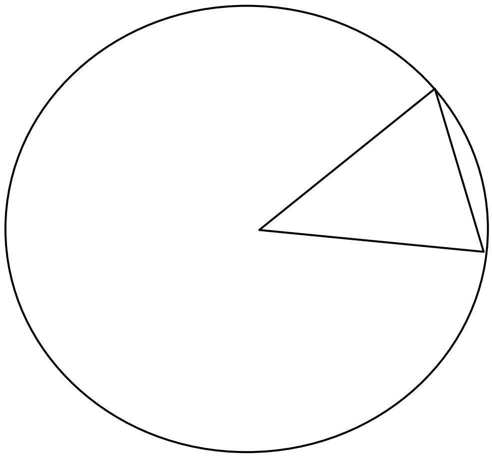


a、b－α（5’）

C－Ma6：ノートに「このように書いたらどんどんできる」とメモし、三角形を描く。

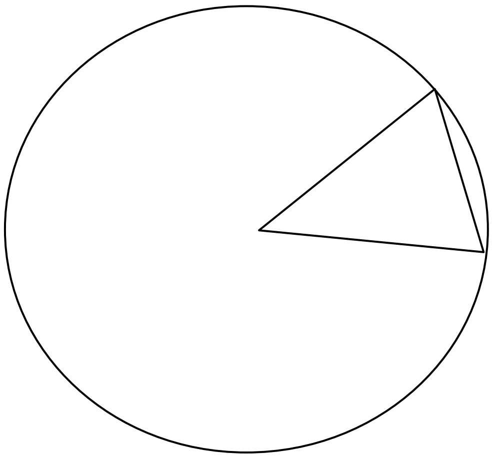


S10：



a、b－α（6’）

C－Ma6：コンパスで円を描く。
演習から中心に線分を 2 本とり，二等辺三角形を作る。



Ta23：「そうだね。どの方法でもいいから描いてみよう。」
「ここの長さ 7 センチ，こことここが 5 センチのを描いてみよう。」

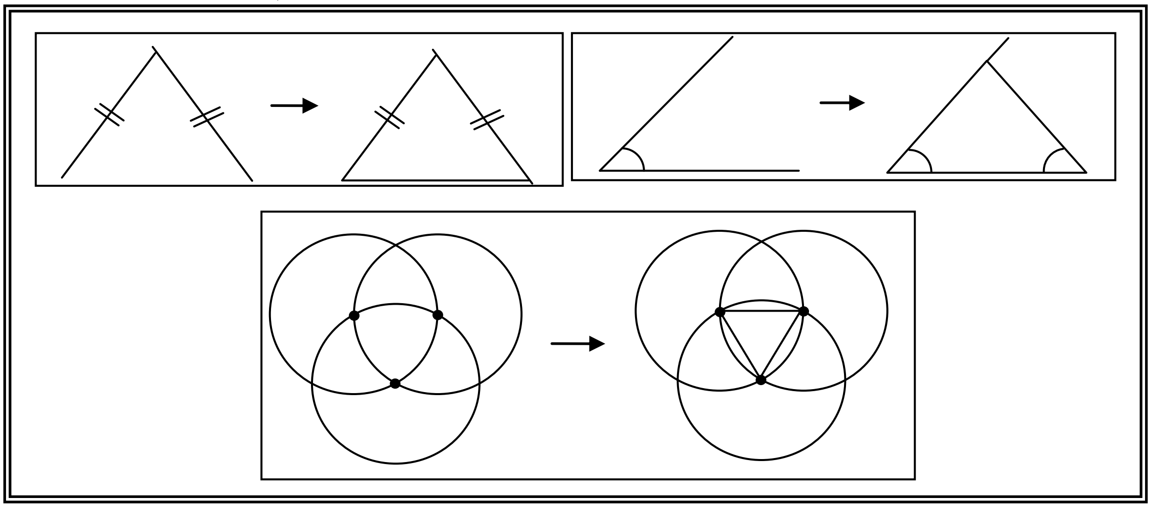
a、b－α（7’）

C－Ma7：S1 の方法で作図を行う。
角度を測り，記入するが，長さは測らない。

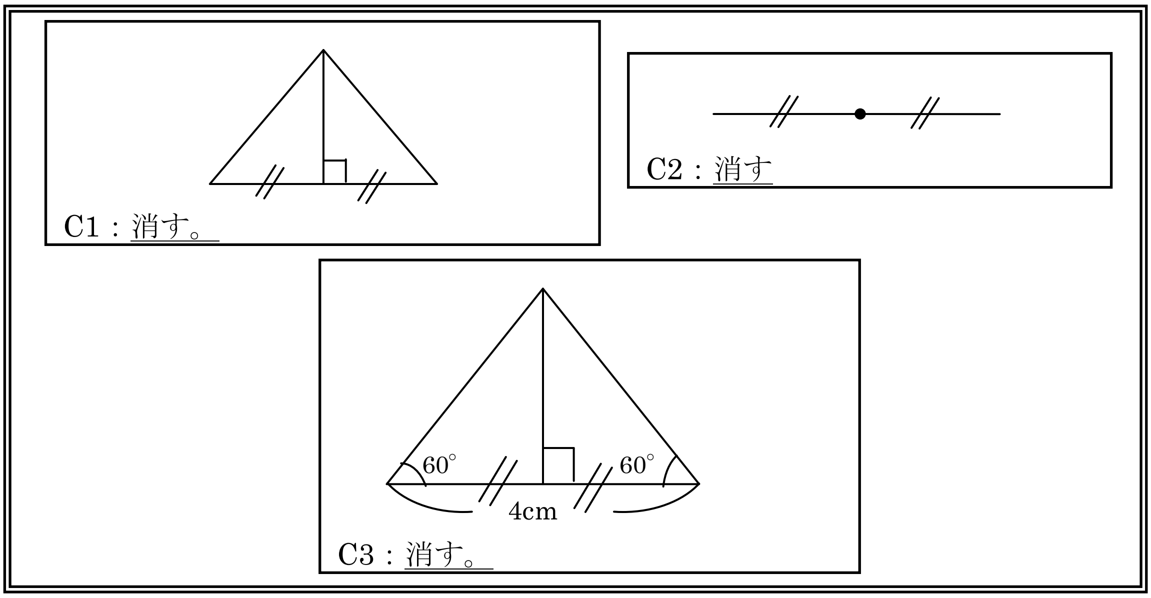
（2）観察記述からの考察

観察の視点に基づき考察をしていく。自力解決の際，A 児は二等辺三角形を 3 つの方法で描いていった。1 つ目の方法は，「2 つの辺の長さが等しい三角形」を二等辺三角形と言うことから，等しい長さの 2 辺を描いて，二等辺三角形を描いた。2 つ目は，二等辺三角形の 2 つの角が等しいと言うことを利用し，1 辺とその両端に等しい角度を取り，二等辺三角形を描いた。3 つ目の方法は，コンパスを利用し，円を活用して描いている。（図－1）円は 1 点から等距離にある点の集合である。等しい長さの 2 辺を描く際に，円は活用できると考えたのである。結果としては，正三角形を描いていたが，新たな方法で二等辺角形を描こうとする態度が見えた。

それに比べ C 児は，二等辺三角形を描く姿勢を見せるが，少し描いては消すことを繰り返していた。方法としては，1 つの線分に垂直二等分線を引き，二等辺三角形を描く 1 つの方法であった。（図－2）少しの作業をしては，描いたものを消すということを繰り返していて，探求していくことができていなかった。



図－1　自力解決における A 児の活動



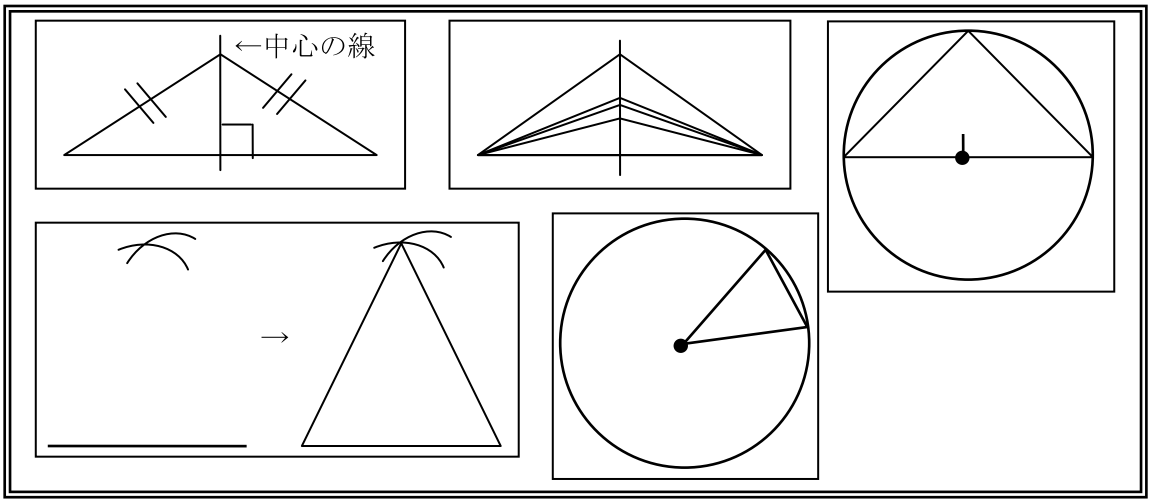
図－2　自力解決における C 児の活動

1）算数的活動の量的及び質的な様相

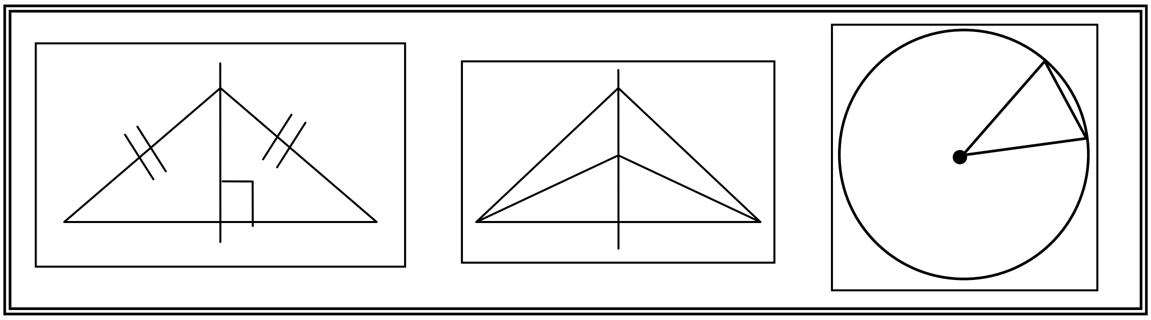
A 児と C 児の間にまず，算数的活動の量に明らかな違いがある。A 児は 3 つの方法で描いているのに対し，C 児は 1 つの方法でのみの解決となっている。また，質でも差がある。A 児は二等辺三角形の二辺の長さや，2 つの角度に注目して描いている。そして，今までに学んでいる，円を利用して，新たな解決方法の探求をしている。本単元で学んだことのみで解決をするだけではなく，既習内容なども活かそうとする態度を見ることができた。C 児は，2 辺の長さを同じにするにはどのようにすればいいのかのみを考え，他の条件や方法を活用することはできなかった。自力解決では，A 児と C 児の間に，算数的活動の量的及び質的な違いを見ることができた。

2）探求的態度を促す知識の様相

集団における練り上げでは，A 児は，他の児童の方法や教師の支援を聞き，新たな 5 つの方法で二等辺三角形を描いていった。その際には，解法を聞いてから解決を行うのではなく，説明を聞きながら，その次にどのようにすれば二等辺三角形を描けるのか推測しながら聞いていた。そのことにより，発表の途中からその方法で二等辺三角形を自ら描いていた（図－3）。一方 C 児は，3 つの方法で二等辺三角形を描くにとどまっている。その方法で描く際は，発表をすべて聞いてからその方法で描いていた。A 児のように，自ら先のことを推測するような姿を見ることはできなかった（図－4）。そのようなことからも集団による練り上げの際にも，自力解決と同様に算数的活動の量的及び質的な差があるといえる。



図－3　練り上げにおける A 児の活動



図－4　練り上げにおける C 児の活動

これらのことは，探求的態度の違いがあるといえる。A 児は積極的に解決を行っている。一方，C 児は探求していくことはできなかった。探求する前に，今自分がしていることに自信が持てていない為，自分の描いた図を消すことを繰り返していた。これは，知識の違いによるものである。A 児は手続き的知識を身に付けているため，既習の事項を今回の問題である，二等辺三角形を描く算数的活動と結びつけることができている。それに対し C 児は，既習の内容が宣言的知識にとどまり，既習の内容と，今回の問題とを結びつけることができないため，このような結果になったと言える。

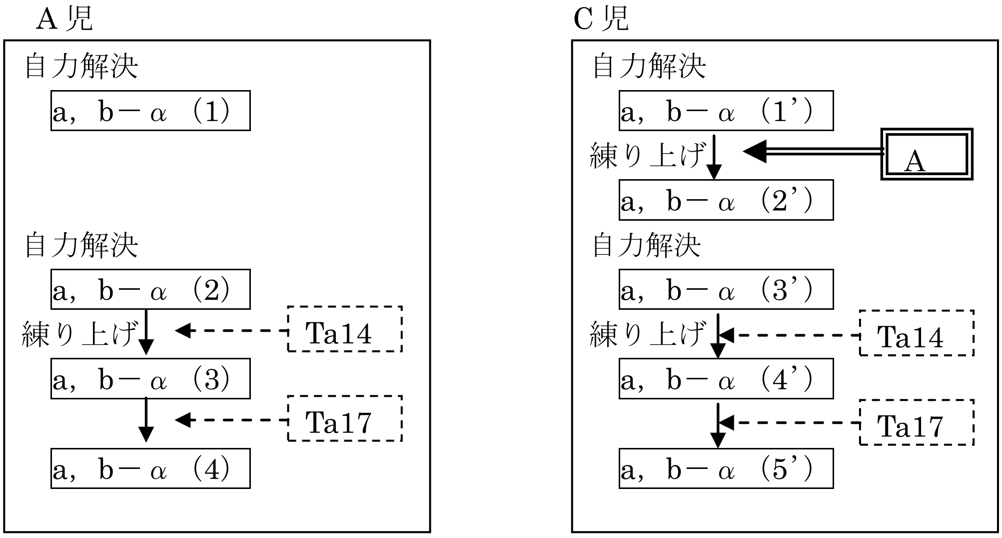
また，評価問題でも差が見られる。教師に出された問題を A 児は今までに考えてきたすべての方法で二等辺三角形を描いた。そして，どの方法がもっとも描きやすいかを比べていた。これは，統合的・発展的学習の 1 つではないだろうか。それに対し C 児は，一つの方法で二等辺三角形を描くだけに終わった。その描いた二等辺三角形は指定された形にはなっていなかった。二等辺三角形の描き方の学習としては，両者はしている。しかし，両者には大きな違いがある。その違いは，単に正解かそうでないかではない。何を学んだかではなく，どの程度，どのように学んだかということである。A 児は多くの方法を探究し，体験している。そのことによって，どの方法が最も効率的で，便利かを学んでいる。C 児は，問題を解くにあたって 1 つの方法でしか解かないため，二等辺三角形の描き方は学んだが，それのみに終わってしまっている。算数の学習で大切なことは，A 児の行っているような，探求していく態度であり，解法を身に付けること以上に，その解法に基づく数学的な考えを学んだりすることである。

5．2　A 児と C 児の算数的活動の様相―その 2―

（1）観察記述

2007/11/01

授業者　姫田先生



図式化－2　A 児と C 児の数学的活動の展開

観察の枠組み

a…現実問題をつかむ段階

b…現実的モデルをつくる段階

c…数学的モデルをつくる段階

d…結果を得る段階

e…得られた結果を現実世界と比較してテストする段階

f…モデルを修正し改善する段階

考察の枠組み

α…事象を数理的に考察し処理する態度の育成

β…数理的な処理あるいは数学的な見方や考え方のよさの感得

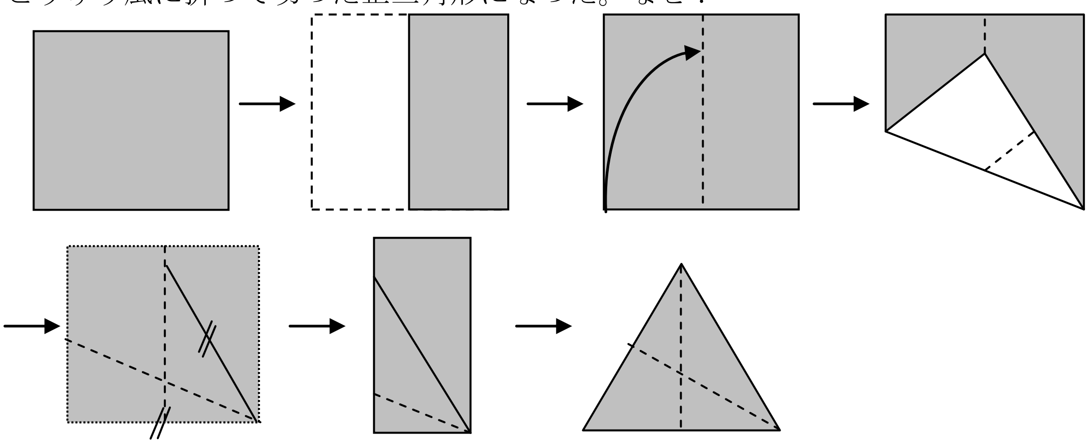
γ…数学的な知識・技能や考え方を進んで活用する態度の育成

教師の支援

Ta…全体への支援
Teaching all

Ti…個への支援
Teaching individual

こうゆう風に折って切った正三角形になった。なぜ？

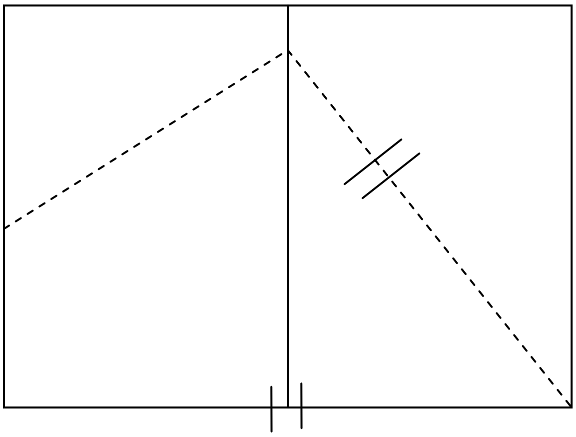


A 児

a，b－α（1）

A－Ma2：新しい折り紙でゆっくり折り，頂点を半分の線にあわせる。

A－Ma3：ノートにまとめる。



C 児

a，b－α（1’）

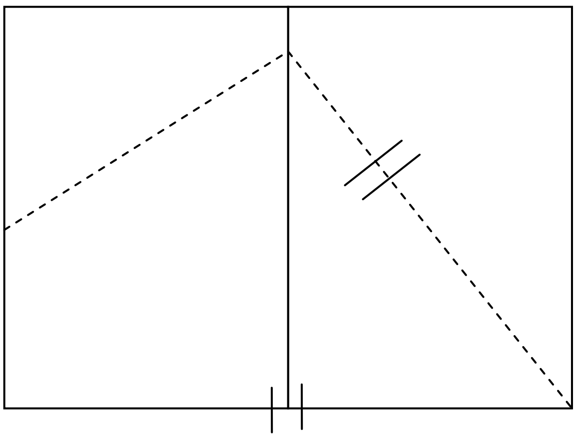
C－Ma2：切り取った正三角形を切れ端とあわせ、正方形にしてみる。

切れ端の紙を張り合わせたり、折ったりする。

正三角形を折ってみる。

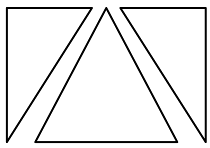
裏返したりする。

A：「正三角形は長さが等しくないといけないから。こことここはこう折るから長さが等しくないといけない。」

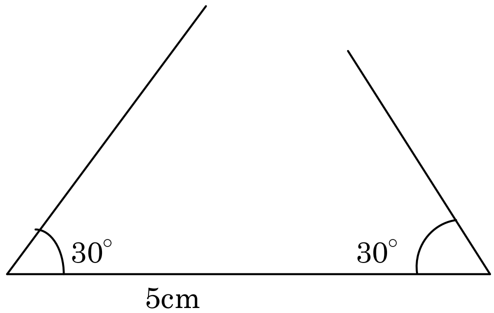


a，b－α（2’）

C－Ma4：はん分におってそのときの四角形は、同じで、ななめにおって切るから、正三角形になる。



今日は，角度と長さを使って，正三角形を描いていこう。二等辺三角形を描いてもらおうと思います。



「こんな二等辺三角形描いてみよう。」

A 児

a，b－α（2）

A－Ma6：長さを測り，その両端に 30°をはかり，作図する。

A－Ma7：縦に 6cm をとり，6cm，70°の二等辺三角形を描く。

Ta14：「同じ方法で正三角形を描きたい。どうする？」
「5 センチ。その両端の角はどうしたらいい？」

a，b－α（3）

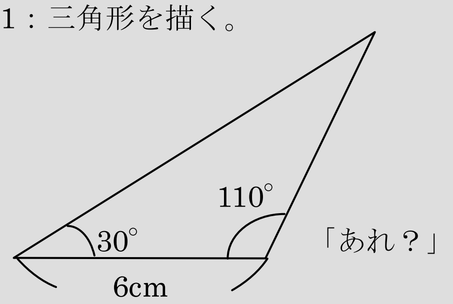
A－Ma9：一辺を描き，1 つの角度を測り，そこに描いた線分の長さを測り，正三角形を描く。
ノートに『かた方の角度だけはかる
↓
両方とも同じ角だから』と書く。

A－Ma10：A－Ma9 の方法で三角形を描いていく。

Ta17：「二等辺三角形でも，正三角形でもない三角形描きます。底辺が 6 センチ，その両端の角度が 35°と 110°の三角形を描きましょう。」

a，b－α（4）

A－Ma11：三角形を描く。



A－Ma12：角度を測り，「二等辺三角形だ。」

A－Ma13：三角形を 2 つ描く。

A－Ma14：三角形を描き，2 つの角から，もう一つの角度を求める。

C 児

a，b－α（3’）

C－Ma5：ものさしと分度器を手にし、作図する。

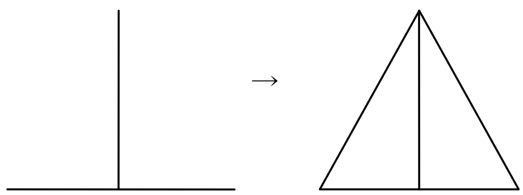
C－Ma6：自分で考えた三角形を作図する

C－Ma7：そのまま作図を行う。その際には、線分の二等分線をとって行う。角度には注目していない。

Ta14：「同じ方法で正三角形を描きたい。どうする？」「5 センチ。その両端の角はどうしたらいい？」

a，b－α（4’）

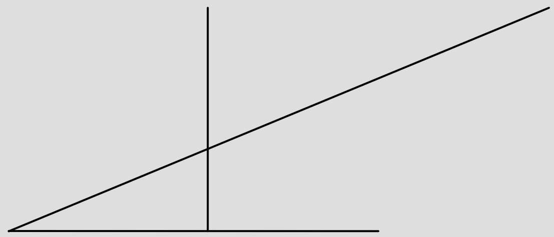
C－Ma8：角度を測らず、垂直二等分線を利用して正三角形を描く。角度は測らず、辺の長さのみで作図する。



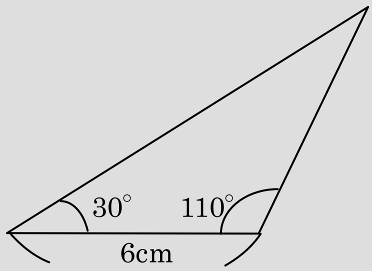
Ta17：「二等辺三角形でも，正三角形でもない三角形描きます。底辺が 6 センチ，その両端の角度が 35° と 110° の三角形を描きましょう。」

a，b－α（5’）

C－Ma9：底辺と垂直二等分線と一辺を書く。



C－Ma10：隣に新しく角度と底辺だけで作図する。



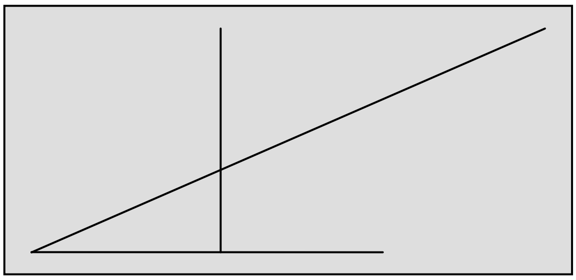
（2）観察記述からの考察―宣言的知識と手続き的知識―

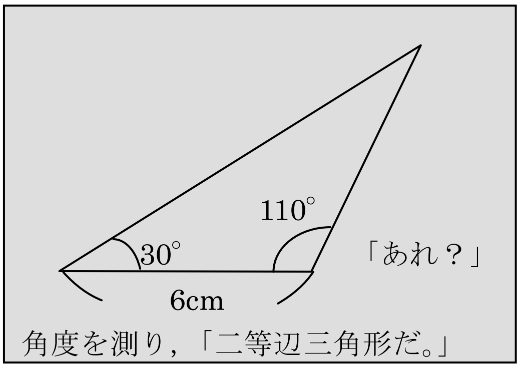
観察の視点に基づき考察をしていく。まず，1 問目の折り紙を切って正三角形になる理由についてである。自力解決で A 児は，もう一度折り，解決方法が分かりノートにまとめて活動をやめた。一方，C 児は折り紙の切れ端や，作った正三角形を折り曲げたり，重ねたりして，なぜ正三角形になるのか様々試していた。算数的活動の量としては，C 児の方が多かったようにも見えるが，C 児はどのように解決していいのか分からず，漠然と折り紙を触っていただけである。それに対して A 児は，正三角形の 3 つの辺の長さが等しいと言うことをどうすればわかるのか考えながらしていた。どのような三角形かが正三角形かと考えながら活動していることにより，より質の高い算数的活動を行っている。

2 問目の底辺が 5cm で両端が 30° の二等辺三角形を描く問題である。A 児は，定規と分度器を使って指定された二等辺三角形を描き，同様の方法で他の大きさの二等辺三角形を描いていった。また，他の大きさの三角形を書く際には，同様の方向ではなく，様々な向きで二等辺三角形を描いていた。C 児は，定規と分度器を手にするが，分度器を使わず，今までに C 児がやっていた線分とその垂直二等分線を利用した二等辺三角形の描き方で二等辺三角形を描いていた。そのため，底辺が 5cm で両端が 30°の二等辺三角形を書くことはできなかった。二等辺三角形の辺の長さに着目することができているが，角度に目を向けることができなかった。性質は理解していることから，二等辺三角形の宣言的知識は身についていると言える。しかし，より難しい問題に直面した際に，指定の二等辺三角形を描くことができないのは，その知識が手続き知識となっていないためと考えられる。A 児のように 1 つのことから発展させ，探求していくことを可能としているのは図形の性質を利用しようとした活動へと移す知識

である。この知識を手続き的知識と呼ぶならば，前項で指摘したように A 児と C 児の算数的活動の違いが説明できる。

評価問題である，底辺が 6cm，その両端の角度が 35°と 110°の三角形を書く際に，C 児は底辺の垂直二等分線を描き，三角形を描こうとした（図―1)。しかし，頂点は垂直二等分線上にないので，三角形をなかなか書くことはできなかった。A 児にとっては，何の困難もなく，三角形を描くことができた（図―2)。また，三角形を描くことで終わらず，その三角形が二等辺三角形であることにも気付いた。


図―1　評価問題での C 児の算数的活動



図―2　評価問題での A 児の算数的活動

2 問目や評価問題の解決の際，A 児と C 児が今まで「どのように学んだか」ということの違いがある。A 児は三角形の描き方を統合的・発展的に学習してきたため，新たな問題に直面した際に，その問題を解くために今までに考えた条件をなくしたり，新たに加えたりし，その時により簡単に描ける方法を探求していた。しかし，1 つの描き方でしか描いていない C 児は，今までにない条件を出された場合に，描くことができない。学習してきた内容が静的な宣言的知識にとどまっているため，探求していくことができていない。そのため，新たな条件で二等辺三角形を描くことができない。評価問題で描いた図形が二等辺三角形であると A 児が気付けたのは，今までの学び方にある。A 児は様々な方向で二等辺三角形を描いていた。二等辺三角形を一定の向きからだけではなく，様々な向きで見てきた。そのため，問題の三角形が二等辺三角形であることに気付けたのである。これは，解き方のみを考えていてはできないであろう。探求していった結果ではないだろうか。

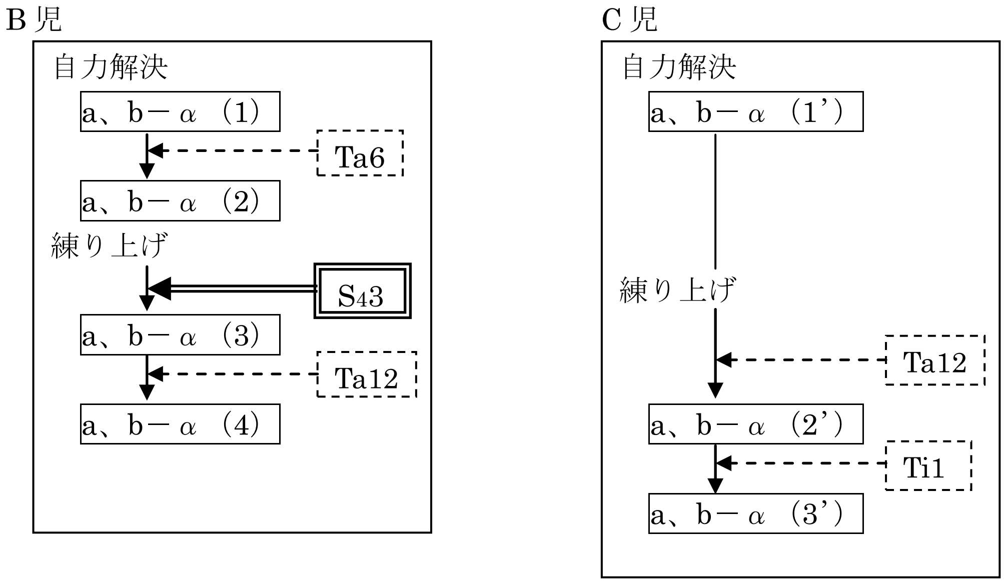
A 児と C 児の間には，宣言的知識にまして，手続き的知識の違いと判断できる。またそのことによって，探求的態度も大きく異なったものと考えられる。このような結果は，図式化－1 でも同様なことが言えた。

5．3　B 児と C 児の算数的活動の様相

（1）観察記録

2007/11/6

授業者　姫田先生



図式化－3　B 児と C 児の算数的活動の展開

観察の枠組み

a…現実問題をつかむ段階

b…現実的モデルをつくる段階

c…数学的モデルをつくる段階

d…結果を得る段階

e…得られた結果を現実世界と比較してテストする段階

f…モデルを修正し改善する段階

考察の枠組み

α…事象を数理的に考察し処理する態度の育成

β…数理的な処理あるいは数学的な見方や考え方のよさの感得

γ…数学的な知識・技能や考え方を進んで活用する態度の育成

教師の支援

Ta…全体への支援
Teaching all

Ti…個への支援
Teaching individual

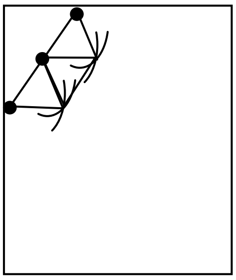
Ta0 :「正三角形を敷き詰めて模様を作りましょう。昨日，二等辺三角形や正三角形をやったので，描くスペシャリストになったと思う。自分で正三角形をノートに描きながら，同じ大きさの正三角形でノートを敷き詰めていく。」

B 児の活動

a、b－α（1）

B1：悩む。

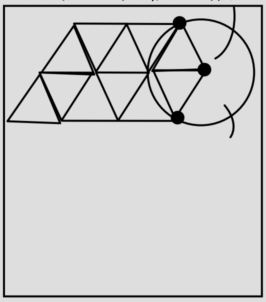
B－Ma1：



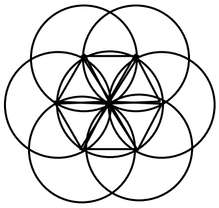
Ta6：「スペシャリストたち。1 つずつ描かなくても何か見えてこないかな？」

a、b－α（2）

B－Ma2：B－Ma1 の方法で何個か描いた後に円を描いて描く

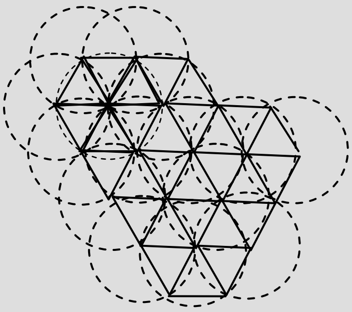


S43：



a、b－α（3）

B－Ma3：

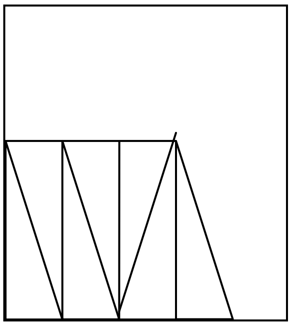


「こんな短時間でこんなにかけた。」

Ta12：「円の中心をどこにするかだね。」
「正三角形のスペシャリストになってきたから，二等辺三角形でやってみよう。」

a、b－α（4）

B－Ma4：

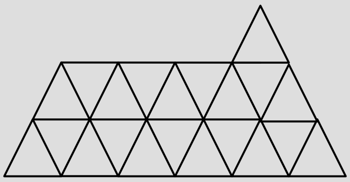


「二等辺三角形じゃない。」

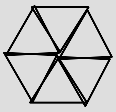
C 児

a、b－α（1’）

C－Ma1：パターンブロックで敷き詰めを行う。



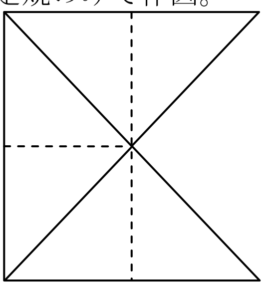
C－Ma2：パターンブロックで正六角形を作る。



Ta12：「正三角形のスペシャリストになってきたから，二等辺三角形でやってみよう。」

a、b－α（2’）

C－Ma3：定規のみで作図。

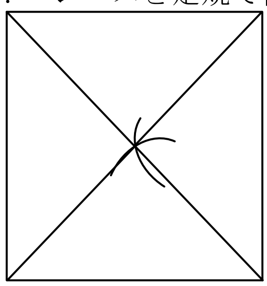


C1：消す。

Ti1：「それだけじゃ難しいから，コンパスを使ってやってごらん。やり方習ったでしょ。」

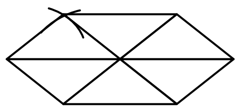
a、b－α（3’）

C－Ma4：コンパスと定規で作図。



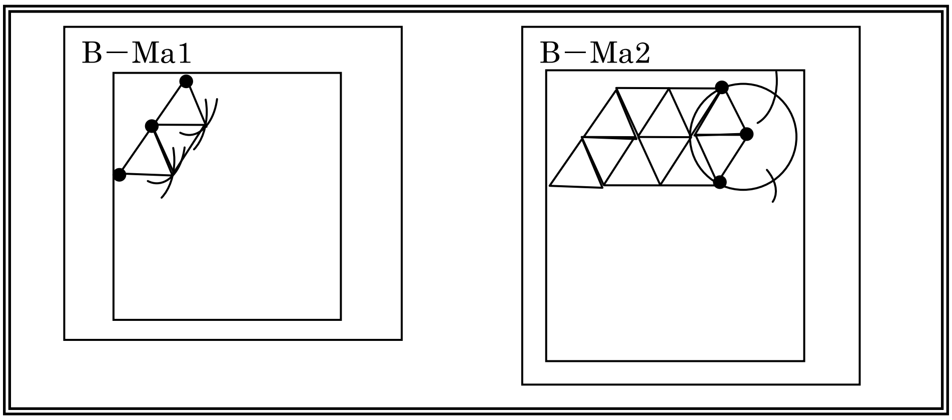
C2：消す。

C－Ma5：コンパスと定規で作図。

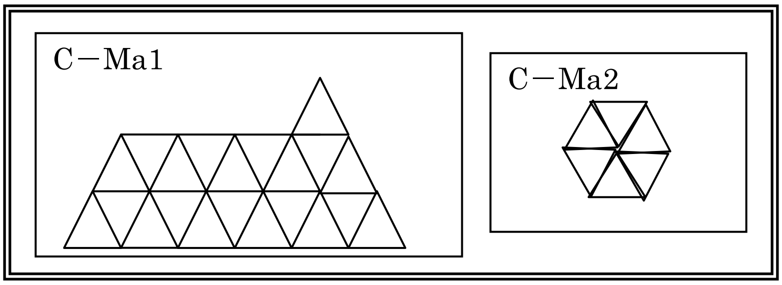


（2）観察記述からの考察

自力解決では，B 児は既習事項である正三角形の作図を利用して，敷き詰めをしている。最初は，1 つずつ正三角形を描いていたが，教師の「スペシャリストたち。1 つずつ描かなくても何か見えてこないかな？」という支援によって，いくつかの正三角形を描けるように工夫して描いていた（図－1)。一方，C 児は今までに習っている正三角形の作図を使うことなく，パターンブロックで敷き詰めを行っていた（図―2)。B 児は 2 つの方法で作図を行い，敷き詰めを行っていたのに対し，C 児はパターンブロックの敷き詰めのみで，算数的活動の量は，B 児の方が多い。また， B 児は既習事項を活用し，どのようにすれば効率よく敷き詰めを行えるのか考えているのに対し，C 児は，考えて敷き詰めをしているように見えるが，既習の内容を活用しようとする態度は見られず，どのようにすれば，活用できるのか探求していく態度も見ることができなかった。このことから，算数的活動の質的にも，B 児の方が高いことが言える。その要因としては，A 児と C 児の間でも見られた，知識の違いだと言える。B 児も C 児も作図方法は学んでいる。その作図方法を B 児は手続き的知識とし，活用することができている。しかし C 児は，正三角形の性質は理解しているものの，作図方法へと活用できていない。

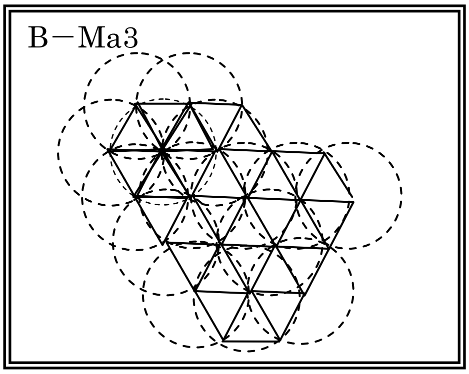


図―1　自力解決における B 児の算数的活動

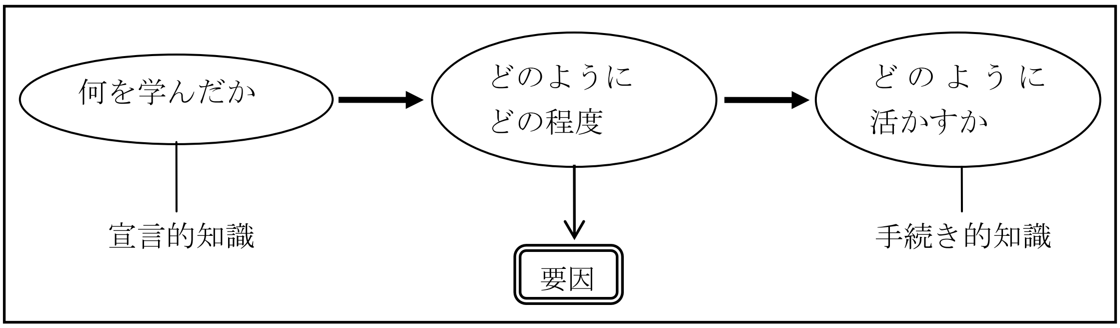


図―2　自力解決における C 児の算数的活動

集団による練り上げの際にも違いがあった。C 児は，パターンブロックで敷き詰めを続け，他の児童の方法をあまり聴こうとはしなかった。発表の後も，C 児はパターンブロックで敷き詰めをしていて, 他の児童の方法を活用することはなかった。一方, B 児は他の児童の解き方を聞き，その作図方法でやっている（図―3)。今まで自分のしていた方法と，その方法と比較し，その方法の方が早いことに気付いていた。これは，探求的態度の姿である。人の意見も活用し，自分の算数的活動の質を高めているのである。このことは，今まで重要としなければいけないと指摘してきた，何を学んだかではなく，どの程度，どのように学んだかということにつながる。さらに，本時の観察を通して，その学んだ知識をどのように活用するか，あるいは，活用することができるのかについてもその重要性を指摘することができる。どのように学ぶかによって，探求的態度に大きな差があるのではないだろうか。多くの方法を経験し，比較することにより，児童はその方法のよさを感じ，手続き的知識とでき，探求することができるのではないだろうか（図―4)。



図―3　練り上げにおける B 児の算数的活動



図―4

宣言的知識は,今まで言ってきた何を学んだかと言い換えることができる。また，手続き的知識は，どのように活かすかと言い換えることができる。この知識の違いをもたらす要因は,学び方にあるのではないだろうか。どのように・どの程度学んだかによって違いがあるといえる。

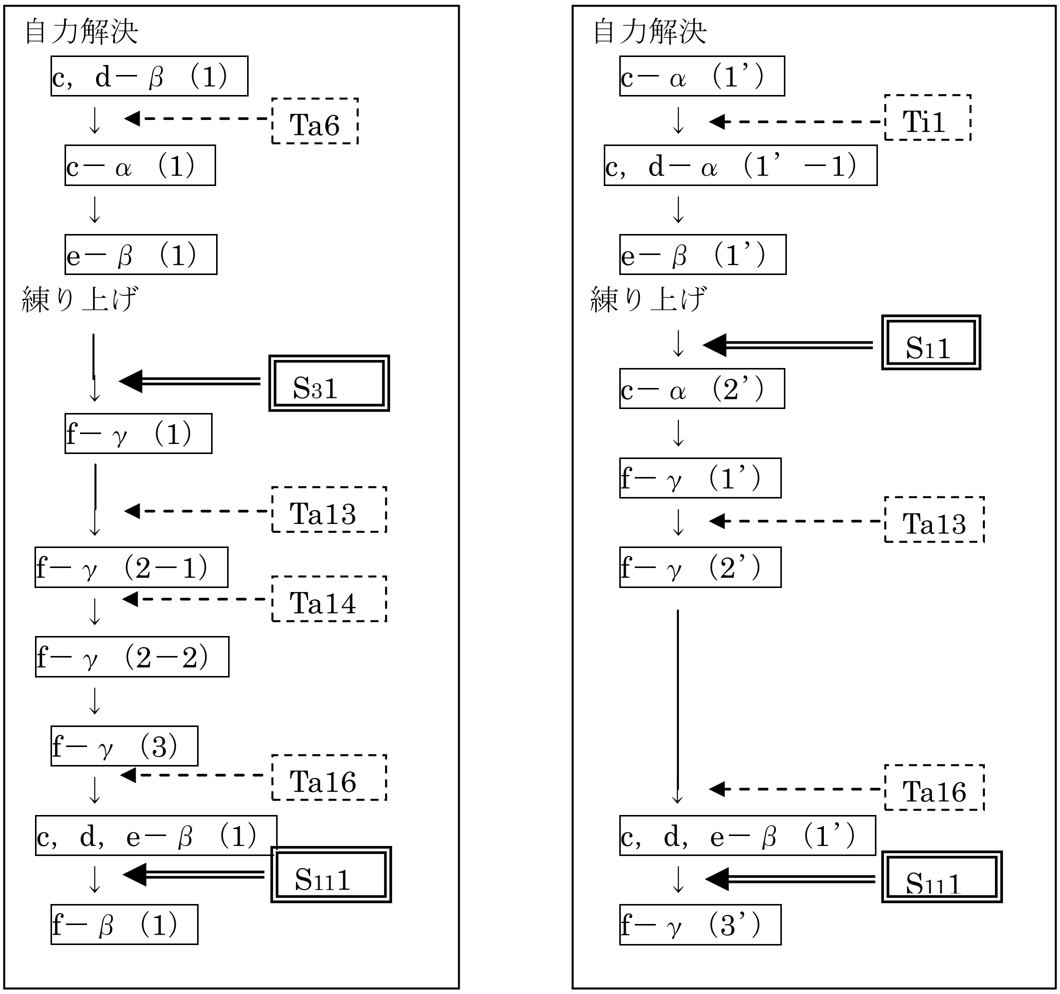
5．4　B 児と C 児の算数的活動の様相―その 2―

（1）観察記述

2007/11/07

授業者　姫田先生

B 児　　　　　　　　　　　　　　　　C 児



図式化－4　B 児と C 児の数学的活動の展開

観察の枠組み

a…現実問題をつかむ段階

b…現実的モデルをつくる段階

c…数学的モデルをつくる段階

d…結果を得る段階

e…得られた結果を現実世界と比較してテストする段階

f…モデルを修正し改善する段階

考察の枠組み

α…事象を数理的に考察し処理する態度の育成

β…数理的な処理あるいは数学的な見方や考え方のよさの感得

γ…数学的な知識・技能や考え方を進んで活用する態度の育成

教師の支援

Ta…全体への支援

Teaching all

Ti…個への支援

Teaching individual

Ta0：「おかしやさんに買い物へ行きました。いろんな物があるんだけど，ジュース 180 円，ドーナツ 1 個 90 円，プリン一個 120 円，チーズケーキ 150 円，チョコレート 220 円，クッキー80 円。こういう品物が置いてある。」

Ta4：「1 コイン，500 円持っていきました。ジュース 1 本とドーナツ 3 個買いました。お釣りは何円でしょう？」

B 児の活動

c，d－β（1）

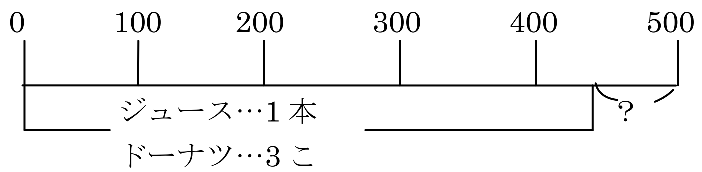
B－Ma1：(90×3)+180=450　500-450=50

A.　50 円

Ta6：「線分図で描いてるね。いいね。」

c－α（1）

B－Ma2：



e－β（1）

B－Ma3：㊟50+450=500

f－γ（2－1）

B－Ma5：500 円でチーズケーキ 2 個とクッキー2 個買ったとき

S31：「まとめて。」500－(180＋90×3)＝50　　50 円

f－γ（1）

B－Ma4：（ノートに書く）　もっとまとめられる

500－(180＋90×3)＝50

Ta13：「自分でこんな風に問題考えてごらん。」

f－γ（2－2）

B－Ma5：500 円でチーズケーキ 2 個とクッキー2 個買ったときのおつりは？

150×2＋80×2＝

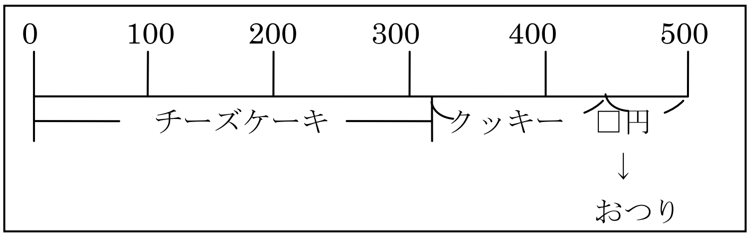
Ta14：「言い方悪かったね。1 つにまとめられる式にして。」

f－γ （2－3）

B－Ma6：500－($\underline{150\times2+80\times2}$)＝40

460

㋟40＋460＝500



f－γ （3）

B－Ma7：1000 円持って行きました。

クッキー…4 こ 320　　ドーナツ…3 こ 270

プリン…2 こ 240　　ジュース…1 本 180

Ta16：「1000 円持って行きました。チョコレート 2 ことクッキー2 こを買うと，おつりはいくらでしょう？」

c，d，e－β （１）

B3：前の問題を解くスペースを空けて問題を解く。

B－Ma8：1000－(220×2＋80×2)＝400

440　160

㋟600－400＝1000　　A. 400

S111：1000－(220＋80)×2

f－β （1）

B7：「わかった。」ノートに　1000－(220＋80)×2

C 児

c－α （1’）

C－Ma1：180＋(90×3)＝386

500－386＝

Ti1：「よく計算してみな。1 の暗いがゼロなのに，足していったらこうなる？」

c，d－α （1’ －1）

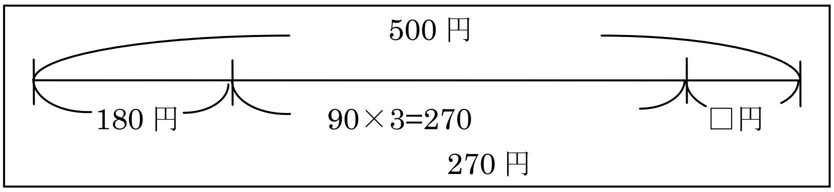
C－Ma2：180＋(90×3)＝450

500－450＝50 <u>おつりは 50 円</u>

e－β （1’）

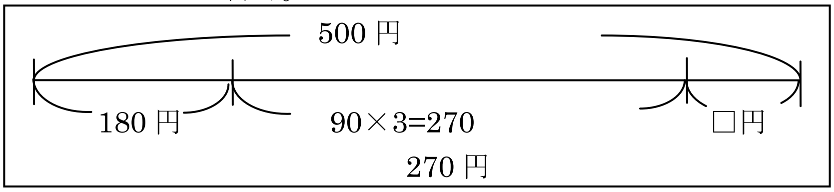
C－Ma3：500－(180＋90×3)＝50

S1１：「これが 500 円で，ジュース 1 本が 180 円で，ドーナツ 3 個で 270 円で，あまっているところがおつり。」



c－α （2’）

C－Ma4：ノートに書く。



500－(270－180)＝50

f－γ （1’）

C－Ma5：ノートにまとめる。

あわせてから

500－(180＋90×3)

500－180－90×3

順々にひく

Ta13：「自分でこんな風に問題考えてごらん。」

f－γ（2’）

C－Ma5 : 1000 円もっていきました。チーズケーキ 2 コと，クッキー1 コ買いました。おつりは何円でしょう？

1000－(150×2＋80)＝620

1000 円

150×2

＝300 円

80 円

おつり□円

<u>おつりは　620 円</u>

C－Ma6 : 2000 円もっていきました。プリン 3 コとチョコレート 2 コ買いました。おつりはいくら？

2000－(120×3＋220×2)＝1200

360　440　<u>おつり 620 円</u>

Ta16 :「1000 円持って行きました。チョコレート 2 ことクッキー2 こを買うと，おつりはいくらでしょう？」

c，d，e－β（1’）

C－Ma7 : 1000－(220×2＋80×2)＝400

<u>400 円</u>

代金　1000 円

400 円

（220×2＝440）

80×2

160 円

おつり

400 円

S111 : 1000－(220＋80)×2

f－γ（3’）

C－Ma8 : ノートに書く

1000－(220＋80)×2＝1000－300×2

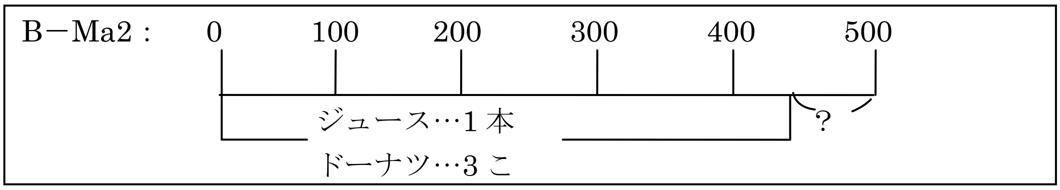
＝400

（2）観察記述からの考察

自力解決では，B 児は(90×3)+180=450　500-450=50 という式を書き答えを導き出していた。その後，数直線を書き，確かめをしていた。その後，自分で問題を作り，他の場合ではどうなるか考えようとしている。B 児は 4 つの算数的活動をしていた（図

—1)。C 児も B 児と同じ式をつくり，解決をしていた。そして，確かめをしている（図—2)。この場面では，B 児は 4 つの算数的活動をしたのに対し，C 児は 2 つの算数的活動となっている。算数的活動の量としては，B 児の方が多いことが言える。また，B 児は提示された問題を解決した後に，自分で新しい問題を考え，解こうとしている。この問題のみを考え，終わるのではなく，自ら問題を考え，探求していこうとしている。このようなことから，算数的活動の質は，B 児の方が高いということが言える。

B−Ma1：(90×3)+180=450　500-450=50
A.　50 円



B−Ma3：た50+450=500

B−Ma5：500 円でチーズケーキ 2 個とクッキー2 個買ったとき

図—1　自力解決における B 児の算数的活動

C−Ma2：180＋(90×3)＝450
500−450＝50　　おつりは 50 円

C−Ma3：500−(180＋90×3)＝50

図—2　自力解決における C 児の算数的活動

集団による練り上げでは，どちらの児童も他の児童の発表を聞き，式を 500−(180＋90×3)＝50 とし，式の改善を行った。その後，B 児は自力解決で考えようとした問題と，それとは別のもう 1 問を考えていた（図—3)。自力解決では C 児は自ら問題を作ることはなかったが，教師の支援もあり，自分で問題を 2 問考え，解いていった（図—4)。B 児と C 児共に，問題を 2 問考え，集団による練り上げでは差はないように見えるが，教師の提示した問題と C 児の考えた問題は，2 つの品物であった。しかし，B 児の作っている 2 問目の問題は，4 つの品物で考えようとしていた（図—3 の B−Ma7)。より難しい問題へ挑戦する姿も探求的態度である。このことから，練り上げにおける算数的活動の質が，自力解決同様，B 児の方が高いことが言える。

B−Ma5：500 円でチーズケーキ 2 個とクッキー2 個買ったときのおつりは？

B−Ma7：1000 円持って行きました。
クッキー…4 こ 320　　ドーナツ…3 こ 270
プリン…2 こ 240　　ジュース…1 本 180

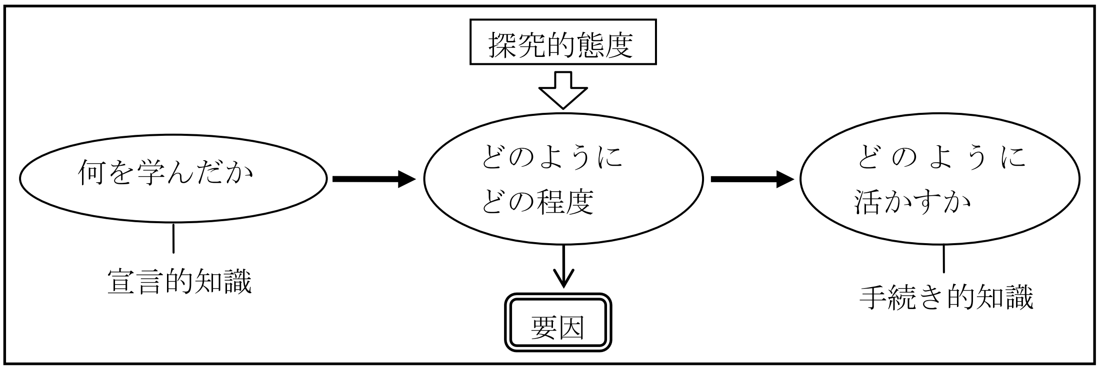
図—3　B 児の考えた問題

C－Ma5 : 1000 円もっていきました。チーズケーキ 2 コと，クッキー1 コ買いました。おつりは何円でしょう？

C－Ma6 : 2000 円もっていきました。プリン 3 コとチョコレート 2 コ買いました。おつりはいくら？

図―4　C 児の考えた問題

集団による練り上げの際，C 児にも探求する姿を見ることができた。しかし，本時では見ることができたが，今までの時間からはあまり見ることはできなかった。態度は，刺激を受け，一時的な感情の変化をもたらし，その状態に持続的なものがあると捉えている。そうであるならば，C 児に探求的態度が身についているとは言えない。言い換えると，本時で C 児に見えた探求していく姿を持続させることによって，C 児にも探求的態度が身につくのである。このように探求していくことにより，問題の数学的概念を形成することができ，そのことを活かすことができる。このことから，前節で指摘している「どのように活かすか」という手続き的知識の要因としての「どのように・どの程度学んだか」ということは，探究的態度が重要となることが言える（図―5）。



図―5

第5章のまとめ

本章では，研究課題4である実践的考察と数学教育の目標との関係について，の授業観察を抽出児A，B，C児の数学的活動の「量」と「質」比較を行い，考察してきた。5.1，5.2では，A児とC児の比較を行った。二等辺三角形の作図では，自力解決の過程においてA児は3通りの方法で作図するのに対し，C児は1通りの方法でのみ作図を行った。教師の支援によってA児は別なる方法を試みようとしたが，C児は別なる視点から作図を試みることができなかった。また，教師から示された正三角形を作図する際，A児はその指定された条件を満たすために今までに行ってきたどの方法で作図をすればよいのか考え，作図を行えたのに対し，C児は二等辺三角形の性質を1つの視点からしかみることができないため，作図を行うことができなかった。A児とC児の間には，数学的活動の「量」と「質」の違いがある。このことは，宣言的知識の違いばかりでなく，手続き的知識の違いでもあると判断できるのではないか。またそのことによって，探求的態度も大きく異なっていた。

5.3，5.4では，B児とC児の比較を行った。正三角形の敷き詰めでは，自力解決の過程においてB児は正三角形の性質に着目して多様な作図を試み，その後の集団による練り上げの過程において他者の方法との比較を行い，操作をふり返っていたが，C児ははじめの操作を単にくり返すのみであった。自らで問題を作る際，B児はより難しい問題を作り，試みようとするが，C児は同じような問題に試みるのみであった。B児とC児の間にも，数学的活動の「量」と「質」の違いがあり，宣言的知識の違いばかりでなく，手続き的知識の違いでもあると判断できるのではないか。

宣言的知識の獲得に際しては，正三角形の性質を見出す様々な算数・数学的活動と結びつけ，活動の意味から捉えられることが必要であり，他方，手続き的知識の獲得の際には，さらに今まで見いだされなかった様々（新しい正三角形）な性質が見出されるような学習が必要かもしれない。

これらのことから宣言的知識は，今まで言ってきた「何を学んだか」と言い換えることができる。また,手続き的知識は,「どのように活かすか」と言い換えることができる。この知識の違いをもたらす要因は,学び方にあり「どのように・どの程度学んだか」によって違いがあると言えた。また,「どのように・どの程度学んだか」という ことは，探究的態度が重要となることが言える。

第 6 章　本研究のまとめ

本章では，研究から得られた結論，さらに本研究を考える中で明らかとなった今後の課題について述べる。

6.1　本研究のまとめ

本研究の目的は，第一に目標はどのようなものでなければいけないのかを明確することであり，第二に目標が授業にどう生かされているかを検討し，実践的考察を行うことである。この目的を達成するために以下の課題を設定した。

課題 1　わが国の数学教育における目標の検討
課題 2　諸外国における目標の検討
課題 3　理論と実践の橋渡し
課題 4　実践的考察と数学教育の目標との関係

これらの課題に対する結論を以下に示すことで，本研究のまとめとする。

第 1 の課題「わが国の数学教育における目標の検討」については，以下の結論を得た。

2.1 において，岩合一男氏の教育的価値を考える場合から，直接的な価値は，算数・数学で学んだ知識や技能であり，言い換えれば，学んだ知識や技能は，学習の結果として得られる所産にあたると言えた。また，間接的な価値は，算数・数学で学ぶときに関連して学習される方法や考え方であり，言い換えれば，関連して学習される方法や考え方は，学習の過程や経験にあたると言えた。

2.2 では，中島健三氏の一般的な教育の目的の立場から考察してきた。実用的目的，文化・教養的または伝承的目的は，岩合氏の述べている直接的な価値にあたると考えられ，陶冶的目的は，間接的な価値の 1 つではないかと考えることができた。また，創造的活動の実践は，直接的な価値と間接的な価値の両者を兼ね備えているものと考えることができた。

2.3 では，和田義信氏のなぜ算数・数学を教えるかということから考察した。mode of thought は，岩合氏の述べている間接的な価値にあたると考えることができ，役立つ，有用性は，岩合氏の直接的な価値と言い換えることができた。感性面は，岩合氏の直接的な価値と言い換えることができた。

これらのことから，それぞれの挙げている目標は，別のことを言っているのではなく，共通なものであることが言えた。算数・数学教育では，知識・技能の習得を目標とする以上に，学習過程で学んだ見方・考え方を学ぶことを目標としていることが考えられた。

次に，第 2 の課題「諸外国における目標の検討」については，以下の結論を得た。

3.1 では，NCTM スタンダードと，わが国の目標を比較してきた。スタンダードでは，何を学ぶかは大切だが，そのこと以上に，いかに学んでいるかということに重点を置いている。このことは，わが国で言われている学習過程で学んだ見方・考え方を目標と同じであった。数学教育で大切なことは，何を学んできたかではなく，どのように学んできたかという事に重きを置かれなければならないのである。

3.2 では，諸外国と義務教育である小学校段階，中学校段階での目標の検討をしてきた。諸外国でも今までに考えてきた目標との共通点があり，探究的態度の必要性を指摘してきた。また，「日常事象への活用及び，個に応じた指導」が述べられ，このことでは，数学的モデル化について述べられていた。

わが国，NCTM，諸外国の算数・数学教育の目標の比較から，「何を学んだか」は大切であるが，そのこと以上に「どのように・どの程度学んだか」ということを目標とすべきであると考えられた。

第 3 の課題である「理論と実践の橋渡し」については，以下の結論を得た。

4.1 では，数学的概念の形成や問題解決能力の育成に注目し，数学的モデル化について述べてきた。数学的モデル化をすることで，単にその問題を解く事に限らず，そのモデルから自ら発展することができ，統合的・発展的学習の展開を可能とする。数学的モデル化は，問題解決能力の育成に必要なことであり，そのことから，探求的態度の育成を行えるものと考えられた。数学的モデル化を行うことで，「処理する態度の育成」，「よさの感得」，「活用する態度の育成」を行え，このことは，今までに指摘した「どのように・どの程度学んだか」ということであると考えられた。

4.2 では，算数的活動を本時目標との関連で検討し，算数・数学教育の目標との意味付けを行うための実践的考察を行うための視点を明確にしてきた。数学的モデル化から算数的活動を観察し，算数的活動の質的・量的に明らかな違いがあった。しかし，数学的モデル化では, その違いを説明することができなかったため, 知識に注目した。授業考察では，算数的活動の質的・量的な比較とともに，宣言的知識と手続き的知識に着目することで，実践的考察を行うこととした。

最後に，第 4 の課題である「実践的考察と数学教育の目標との関係」については，以下の結論を得た。

5.1，5.2 では，算数を比較的得意としている A 児と比較的苦手としている C 児の比較を行った。二等辺三角形の作図では，自力解決の過程において A 児は 3 通りの方法で作図するのに対し，C 児は 1 通りの方法でのみ作図を行った。教師の支援によって A 児は別なる方法を試みようとしたが，C 児は別なる視点から作図を試みることができなかった。また，教師から示された正三角形を作図する際，A 児はその指定された条件を満たすために今までに行ってきたどの方法で作図をすればよいのか考え，作図を行えたのに対し，C 児は二等辺三角形の性質を 1 つの視点からしかみることができないため，作図を行うことができなかった。A 児と C 児の間には，数学的活動の「量」と「質」の違いがある。このことは，宣言的知識の違いばかりでなく，手続き的知識の違いでもあると判断できるのではないかと考えられた。

5.3，5.4 では，比較的平均的な B 児と C 児の比較を行った。正三角形の敷き詰めでは，　自力解決の過程において B 児は正三角形の性質に着目して多様な作図を試み，その後の集団による練り上げの過程において他者の方法との比較を行い，操作のふり返っていたが，C 児ははじめの操作を単にくり返すのみであった。自らで問題を作る際，B 児はより難しい問題に試みようとするが，C 児は同じような問題に試みるのみであった。B 児と C 児の間にも，数学的活動の「量」と「質」の違いがあり，宣言的知識の違いばかりでなく，手続き的知識の違いでもあると判断できる。これらのことから数学的活動の量的・質的な違いには，知識の違いによるものと考えることができる。宣言的知識は，今まで言ってきた「何を学んだか」と言い換えることができる。また，手続き的知識は，「どのように活かすか」と言い換えることができる。この知識の違いをもたらす要因は,学び方にあり「どのように・どの程度学んだか」によって違

いがあると言える。また，「どのように・どの程度学んだか」という ことは，探究的態度が重要となることが考えられる。算数・数学教育では，宣言的知識，手続き的知識を身につけることを図り，子どもたちの探究的態度の育成を目標としなければならないと考えられた。つまり，「何を学んだ」ではなく，「どのように・どの程度学んだか」を重視した授業を行うことが大切なのである。

6.2　今後の課題

子どもたちの算数的活動や態度の違いを宣言的知識，手続き的知識の違いから見てきた。授業観察・考察においては，前者を「何を学んだか」，後者を「どのように活かすか」。そして，実際の算数的活動の違いを「どのように・どの程度学んだか」によって考察を進めてきた。果たして，その捉え方でよいのか再検討することである。

また, 理解と知識の関係については, 考察の新たな視点として設定したものである。よって,

（1）知識そのものの数学教育における研究

（2）理解そのものの数学教育における研究

これが必要であり，今後，理解と知識の関係を理論的にも進めていくことが課題である。

以上のことが，残された課題である。

引用・参考文献

1)　岩合一男「教職科学講座 20　算数・数学教育学」福村出版　1990　11－12

2)　同　上　12

3) 細谷俊夫　ほか 3 名「新教育学大事典」第一法規　1990　69－70

4)　同　上

5) 中島健三・大野清四郎「現代教科教育学大系　第 4 巻　数学と思考」第一法規　1974　108－118

6) 和田義信　「和田義信　著作・講演集 3　講演集（1）数学と数学教育」東洋出版　1997　13－21

7)　同　上

8)　同　上

9) National Council of Teachers of Mathematics　「Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics」　1989

10)　数学教育新動向研究会「世界の数学教育」共立出版　1980　10－15

11)　同　上

12)　同　上　48－51

13) 岩合一男「教職科学講座 20　算数・数学教育学」福村出版　1990　202－206

14)　同　上

15)　同　上

16)　同　上　209－214

17)　同　上　214－215

18) エレン・D・ガニエ「学習指導と認知心理学」壮行舎印刷　1989　66－71

資料

『Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics』

National Council of Teachers of Mathematics

1989.3

New Goals for Students. Educational goal for students must reflect the importance of mathematical literacy. Toward this end, the K-12 standards articulate five general goals for all students; [1] that they learn to value mathematics, [2] that they become confident in their ability to do mathematics, [3] that they become mathematical problem solvers, [4] that they learn to communicate mathematically, and [5] that they learn to reason mathematically. These goals imply that students should be exposed to numerous and varied interrelated experiences that encourage them to value the mathematical enterprise, to develop mathematical habits of mind, and to understand and appreciate the role of mathematics in human affairs; that they should be encouraged to explore, to guess, and ever to make and correct errors so that they gain confidence in their ability to solve complex problem; that they should read, write, and discuss mathematics; and that they should conjecture, test, and build arguments about a conjecture's validity.

The opportunity for all students to experience these components of mathematical training is at the heart of our vision of a quality mathematics program. The curriculum should be permeated with these goals and experiences so that they become commonplace in the lives of students. We are convinced that if students are exposed to the kinds of experiences outlined in the Standards, they will gain mathematical power. This term denotes an individual's abilities to explore, conjecture, and reason logically, as well as the ability to use a variety of mathematical methods effectively to solve nonroutine problems. This notion is based on the recognition of mathematics as more than a collection of concepts and skills to be mastered; it includes methods of investigating and reasoning , means of communication, and notions of context. In addition, for each individual, mathematical power involves the development of personal selfconfidence.

Toward this end, we see classroom as places where interesting problems are regularly explored using important mathematical ideas. Our premise is that what a student learns depends to a great degree on how he or she has learned it. For example, one could expect to see students recording measurements of real objects, collecting information and describing their properties using statistics, and exploring the properties of a function by examining its graph. This vision sees students studying much of the same mathematics currently taught but quite a different emphasis; it also sees some mathematics being taught that in the past has received little emphasis in schools.

1. Learning to value mathematics. Students should have numerous and varied experiences related to the cultural, historical, and scientific evolution of mathematics so that they can appreciate the role of mathematics in the

development of our contemporary society and explore relationships among mathematics and the disciplines it serves; the physical and life sciences, the social sciences, and the humanities.

Throughout the history of mathematics, practical problems and theoretical pursuits have stimulated one another to such an extent that it is impossible to disentangle them. Even today, as theoretical mathematics has burgeoned in its diversity and deepened in its complexity and abstraction, it has become more concrete and vital to our technologically oriented society. It is the intent of this goal —learning to value mathematics —to focus attention on the need for student awareness of the interaction between mathematics and the historical situations from which it has developed and the impact that interaction has on our culture and our lives.

2. Becoming confident in one's own ability. As a result of studying mathematics, students need to view themselves as capable of using their growing mathematical power to make sense of new problem situations in the world around them. To some extent, everybody is a mathematician and does mathematics consciously. To buy at the market, to measure a strip of wallpaper, or to decorate a ceramic pot with a regular pattern is doing mathematics. School mathematics must endow all students with a realization that doing mathematics is a common human activity. Having numerous and varied experiences allows students to trust their own mathematical thinking.

3. Becoming a mathematical problem solver. The development of each student's ability to solve problems is essential if he or she is to be a production citizen. We strongly endorse the first recommendation of An Agenda for Action [National Council of Teachers of Mathematics 1980]: "Problem solving must be the focus of school mathematics" [P. 2]. To develop such abilities, students need to work on problems that may take hours, days, and even weeks to solve. Although some may be relatively simple exercises to be accomplished independently, others should involve small groups or an entire class working cooperatively. Some problems also should be open-ended with no right answer, and others need to be formulated.

4. Learning to communicate mathematically. The development of a student's power to use mathematics involves learning the signs, symbols, and terms of mathematics. This is best accomplished in problem situation in which students have an opportunity to read, write, and discuss ideas in which the use of the language of mathematics becomes natural. As students communicate their ideas, they learn to clarify, refine, and consolidate their thinking.

5. Learning to reason mathematically. Making conjectures, gathering evidence, and building an argument to support such notions are fundamental to doing mathematics. In fact, a demonstration of good reasoning should be rewarded even more than students' ability to find correct answers.

In summary, the intent of these goals is that students will become mathematically literate. This term denotes an individual's ability to explore, to conjecture, and to reason logically, as well as to use a variety of mathematical methods effectively to solve problems. By becoming literate, their mathematical power should develop.

生徒のための新しい目標　生徒の教育目標は数学的知識能力の重要性を反映しなければならない。この目的にそえば，K-12 スタンダードでは，すべての生徒のために，5 つの一般的目標を述べている。[1] 数学の価値を学ぶこと，[2] 数学をする能力に自信をもてるようにすること，[3] 数学的な問題解決者になること，[4] 数学的にコミュニケイトすることを学ぶこと，[5] 数学的に推論することを学ぶこと。これらの目標は, 生徒が数学的冒険心を価値づけることや, 精神的な数学の習慣をつけること，そして，人の問題における数学の役割を理解し味わうことを勇気付けるような多くの多様な相互関係のある経験をさせることを意味している。つまり，彼らが探したり，推測したりすること，そして作ること自体も勇気付けられるべきである。そして，複雑な問題を解決するための能力において，自信を得るために，間違いを集めなければいけない。数学を読んだり，書いたり，議論しなければならない。推測したり，試験したり，推測の重要性について議論しなければならない。

数学の課程の構成要素を経験するすべての生徒の機会は，質の高い数学のプログラムを私たちの視野に入れた心臓部である。このカリキュラムは，生徒たちが生活するときに, ごく普通になるために, これらの目標と経験をしみわたらさなければならない。私たちは，もし，生徒がこのスタンダードの概説したいくつもの経験にさらされたならば，数学的な力を獲得できるだろう。このことばは，ノンルーチン問題を効果的に解くための，多くの数学的方法を使う能力と，探求し，推測し，論理的思考をする個々の能力のことである。この概念は，数学で習得される概念やスキルを得る以上のものであるという認識を基本としている。つまり，それは，調査し，練習し，コミュニケーション手段，文脈の考えを探求する方法を含んでいる。加えて，一人一人の子どもにとっては，数学的な力が自信の成長とも関係している。

この目的に沿えば，私たちは教室を興味深い問題が，いつも（regularly）重要な数学的考えを使い，探求される場として見る[注3]。私たちの前提として，生徒がどの程度学び，彼，または彼女がどのように学んだかに大きく依存するということである。例えば，生徒たちが現実の事象を測定し，記録したり，情報を集めたり，それらの特徴を述べたり，グラフを調べることにより，関数の性質を探求することを期待している。

この見通しは，一般に教えられている数学と同じことを学んでいる生徒と違う視点（emphasis）をみることができる。つまり，学校での少ない視点を受けるようなほぼ同じの数学を学ばせられることが見えてくる。

１．数学の価値を学ぶ　生徒は社会の発展における数学の役割を正しく評価し，数学と数学が役立つ分野，自然科学，生命科学，社会科学，人文科学との関係を探求できるよう，文化的，歴史的，科学的発展のための数学をたくさんの多くの経験をするべきである。

数学の歴史を通して，現在の問題と論理的追求は，とき解くことのできないほど，お互いに刺激している。今日でさえ，多様に芽を出し，複雑さと抽象概念を深めてきた論理的数学は，具体的で，きわめて重要な私たちの科学思考を社会がめざすようになる。この目標ー数学を評価することを学ぶーの趣旨は，数学と数学が発展してきた歴史的背景の間の相互作用と，それが，私たちの文化と生活に与える衝撃を，生徒が意識する必要を中心にすることである。

2．自分の能力に自信を持つようになる　数学の学習を通して，生徒は，世界の新しい問題状況を意味するように，数学の力を伸ばし，活用できると彼らが自覚する必要がある。程度の違いこそあり，すべての人は，数学者であり，意識的に数学をする。店で買い物をする際，壁紙の一辺を測るとき，セラミックのポットを規則正しく飾りつけることは，数学をしている。学校数学は，すべての生徒に数学をすることは普通の人間活動であるという意識を与えなければならない。多くの多様な経験は，生徒に，彼らの数学的思考を信頼するようになる。

3．数学的な問題解決者になる　生徒の問題解決能力を発達させることは，彼もしくは彼女が生産的市民になるならば，欠くことができない。私たちは An Agenda for Action [National Council of Teachers of Mathematics 1980]の第 1 勧告の「問題解決は，学校数学の中心とならなければならない」を強く支持する。能力の発達には，生徒が解決に何時間，何日，何週間もかかる問題をする必要がある。一人で成し遂げる比較的単純な問題もあるだろうが，小グループやクラス全体の協力的な学習を含むべきである。正しい正解のないオープンエンドな問題も，定式化しなければならない問題もある。

4．数学的にコミュニケイトすることを学ぶ　数学を使った生徒の力の発達は，数学のサイン，シンボル，用語を学習することを含む。これは，生徒が，数学の言語が自然に使えるようなアイデアを読み，書き，議論する機会のいる問題状況において，最も達成される。生徒は，自分の考えを話すとき，彼らの考えを明確にし，洗練し，確立することを学ぶ。

5．数学的に推論することを学ぶ　考えを支えるために推測したり，証拠を集めたり，組み立てたりすることは，数学をする基本である。実際，よい推論を示すことは，正

しい答えを見つける生徒の能力より報われるべきである。

要約すると，目標の意図は，生徒が数学的な教養のあるようになることである。このことは，問題を効果的に解く様々な数学的方法を使うことのみならず，探究し，推測し，論理的な推論をする個人の能力を意味している。教養があるようになることによって，数学の力は発達する。

鳥取大学数学教育研究　ISSN 1881−6134

Site URL：http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/