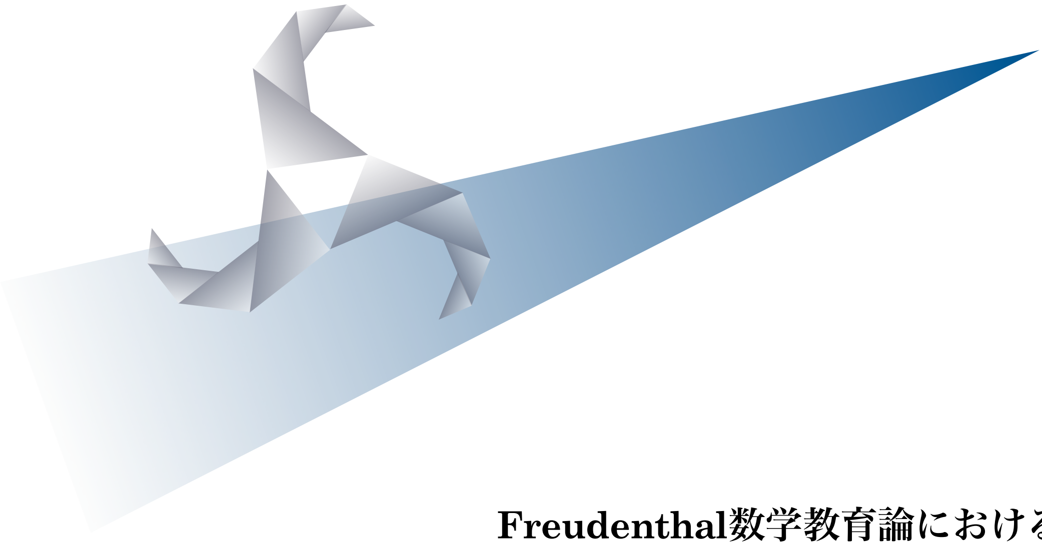
鳥取大学数学教育研究
Tottori Journal for Research in Mathematics Education
ISSN：1881-6134



Freudenthal数学教育論における数学観

-Brouwerからの影響に焦点をあてて-

塩見拓博

vol.10, no.11
Mar. 2008

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

鳥取大学 数学教育学研究室

Freudenthal 数学教育論における数学観

―Brouwer からの影響に焦点をあてて―

塩見　拓博
鳥取大学　地域学研究科

１．はじめに

Hans Freudenthal（1905-1990）は優れた数学者であり，優れた数学教育学者でもあった。今日では，氏の数学教育思想に基づいた RME 理論が開発され，世界的に注目されている。しかも，わが国の学校数学においては伝統的に学習者の活動を重視してきており，Freudenthal による数学教育研究は現在の日本の数学教育を考える上でも示唆に富むと考えられる。しかし，わが国の数学教育研究は「いかに教えるべきか」という教授方法的研究に主たる関心があり，そうした研究では数学教育の根底にある数学の教育的意義まで見通すことは稀である。Freudenthal が見るであろう数学の「陶冶価値」がわが国に即したものであるならば，「数学的な見方・考え方」の育成や，近年強調されている「生きる力」の育成に対して，例えば Freudenthal の「数学化」という概念や，「再発明」という教授原理から示唆を得ようとする際，それらを用いる意義と共に，それらの内容からも有効な示唆を得ることができると考える。

そこで，Freudenthal が見るであろう数学の「陶冶価値」が肝要となるわけであるが，先行研究を見てみると，数学の「陶冶価値」ということについて，必ずしも十分な議論がなされているとは言えない。この数学の「陶冶価値」は，Freudenthal 数学教育論と呼ばれるものの中で構造的体系的にとらえられてこそ明確になると考えられる。そのため筆者は，Freudenthal の数学教育論を「基底的観念」という枠組みにより，根底にどのような観念が位置づくかを検討し，Freudenthal が考えるであろう数学の「陶冶作用（注１）」を明らかにすることを大きな目的としている。

これを受け，本研究では，Freudenthal の数学教育に対する考え方について，Brouwer の影響を検討することを通して，Freudenthal の数学教育論における数学観の基礎を組織することを目的とする。

２．先行研究における Freudenthal の数学観

２－１．「教授学的現象学」

岡田（1981）は，Freudenthal が「教授学的現象学」という用語で意味することとして，本質（現象の整理手段：数学的観念，知的対象物，数学的構造）と現象の関係のうち，教授学的要因（後述）を強調することを述べる。そして，現象と本質の関係は絶対的な関係にあるのではなく，ある水準では本質であったものが，より高次の水準ではそれらが現象としてとらえられるというような相対的な関係にあることを示した。この教授学的現象学の役割を以下のようにまとめている。

（1） 1つの水準における役割
・本質が整理手段として働くような現象の追究
・概念の知的対象物の構成の条件の追究
概念は，他のことがらと孤立してとらえられるのではなく，それが生きて働くようにとらえられることこそ，現象の本質たるゆえんである。
（2）学習水準の移行の場面における役割
・1つの水準から次の水準へ移行する必要性の追究
例）直観的水準からアルゴリズム的水準へ移行するときの必要性

岡田(1981)はこのような教授学的現象学がFreudenthal の数学観に起因していると述べる。その数学観とは以下である。

①数学を活動とみること
その活動とは，経験の分野をより高い水準へ向けて組織化することである。
②学習過程の不連続性
1つの水準から次の水準に移行するときには，学習の対象が全く変わってくることから。

このように，1つの水準において経験を組織する手段が，次の水準においては，研究の対象となり，今度はそれを組織化する。

この文章の「経験」を「現象」で，「組織化の手段」を「本質」で置き換えることにより，上述した教授学的現象学と同一のものとなる。このことから，岡田氏は，Freudenthal の数学観と教授学的現象学の理念を同一（注2）のものであると考える。

2-2.「教授学的現象学」における教育的視点

先ほどの，教授学的要因について説明する。それは，岡田(1977)が「我々は，Mathematics for Education を意味し，Education for Mathematics を意味しない」と述べる趣旨のものである。つまり，数学そのものの正しい認識に基づいた大域的な組織化だけをよいとするならば数学者にその組織化を語らせればよい。Freudenthal はそれだけでは不十分とし，「教授学的逆転」でないかを判断するための視点として，以下の「教育的視点」を強調するということである。

5つの教育的視点（注3）
(1)operational（注4）な方法での組織（1977）
(2)発見的でなければならない（1977）
(3) comprehension による習得と apprehension による習得での領域の分離（1979）
(4) 概念指導と演算指導を区別しない（1979）
(5)直観的水準からアルゴリズム的水準へ移行するときの必要性の認識(1981)

このような教育的視点を踏まえた組織化が語られるとき，Freudenthal の「教授学的現象学」を意味する。

2-3. 人間の活動としての数学

Freudenthal のもうひとつの数学観は数学を「人間の活動としての数学」とみる数学観である。

Wittmann(2005)は，Freudenthal が「数学を我々の文化にしっかりと根ざし，外在的要因（「応用的」）と内在的要因（「純粋的」）によって定められる一つの知識領域として見ること」を明らかにし，そのような豊富な関係性（Beziehungshaltigkeit）を，児童生徒が自らの言葉でもってそれを能動的に再構成することで意味づけたときに限り，その児童生徒にとって生きたものとなることを述べている。

そしてそのような活動を「人間の活動」とする所以は，柳本(1997)が「数学を神がつくり給ふた絶対的なものと考え，それを教えていく教育，そのような教育から子どもたちが自らの手で数学をつくり上げていくことによって数学を

学ぶことができるような新たなる教育への転換」という，Freudenthal の観念により述べている。

この「人間の活動としての数学」を具体的に述べているのが，小林（2006）であり，「人間の活動としての数学」を，「現実を数学化すること」と「数学を数学化すること」に特徴付けている。

また，このような数学観は，高橋（2003）大野，越後，清野（2007）などによって，ＲＭＥ理論の根底を成す観念であることも明らかにされてきている。

2-4. Freudenthal の数学観における直観主義の影響

伊藤(2003)は，再発明原理が Freudenthal のどのような数学観から導きだされたかを明らかにすることを目的とし，直観主義の数学観が Freudenthal の数学観の主要な位置を占めており，それが数学教授論にも影響しているということを明らかにした。

具体的には，Freudnethal が立つ基本的立場である「人間の活動としての数学」という数学観は直観主義と共通の前提であり，発明という用語も直観主義の影響を看取できることを述べている。

しかし，「活動」という用語が，直観主義の数学観においては，数学的対象の直観による構成を意味するのに対し，Freudenthal においては，直観主義とは限らない一般の数学者が用いるような数学的方法を用いる点で違いがみられることも明らかにしている。

３．本研究の意義

本研究の目的は，Freudenthal の数学教育に対する考え方について，Brouwer の影響を検討することを通して Freudenthal の数学教育論における数学観の基礎を組織することである。

というのも，Freudenthal が Brouwer のもとで仕事をしていたこともあるが，Freudenthal の数学観における中心的なテーゼは，様々な文献で強調されているように，数学を「人間の活動」とみることである。そして，これは明らかに，数学を「知性の自然な機能であり，建設的な精神の創造的活動」とみる Brouwer の数学観の影響を看取できる。それにもかかわらず，Freudenthal は，自身の 3 部作のひとつである『Mathematics as an Educational Task(1973)』の序文で「私の数学についての教育的解釈は，L.E.J.ブラウアーの数学観（教育についてではないが）の影響を裏切っている」と述べる。わざわざこのように述べることからも，Brouwer の影響の大きさをうかがい知ることができる一方，裏切りの真意を解することで Freudenthal の数学教育論における「基底的観念」(注５) の一つである数学観が，重要さを伴ってうきぼりになると予想される。

2-3 であげたように，「人間の活動としての数学」という Freudenthal の数学観は様々な文献で述べられており，この数学観に対する直観主義との関連についても伊藤(2003)が明らかにしている。しかし，2-1 であげている「教授学的現象学」という数学観に対する Brouwer の影響については必ずしも十分な議論がなされているとはいえない。

４．本研究の方法と課題

「直観主義は，カントルの集合論に対抗する形で，クロネッカーやポアンカレによって唱導された。」(注６) それを定式化したのが Brouwer である。そこで，カントルの集合論やフレーゲの論理学も含む古典数学との関わりの中でこそ，Brouwer の数学観が見えてくると考えられる。このことは，Brouwer の古典数学に対する批判が，特定の論理的諸原理（特に，排中律）の使用に

向けられたのではなく，古典数学者が論理の使用に割り当てている認識論的な役割に向けられているのであり，まさにこの点が Freudenthal と対称をなす点であることからも述べることが望ましいと考える。そのため，古典数学の基底にある認識論（以下「古典的認識論」）を明らかにしていきながら，Brouwer の数学観について述べていくこととする。

このような考察を，主に『Readings in the Philosophy of Mathematics : After Godeled. IIDA Takashi の第 6 章，ブラウワー的直観主義（1995)』で行った結果，明らかとなった Brouwer の数学観が以下である。

１）数学（的知識）は，内省的で構成的な活動または経験の一形式

２）知識の拡張は，活動の拡張，新たな証明経験の創造というように，現象学的変換によって行われる

３）先の２つとも関係するが，論理的推論一般に重要な認識的価値を付与しないという記号嫌いとでもいうべき態度

このような結果を踏まえた本研究の課題が以下である。

課題Ⅰ：Brouwer の数学観と「人間の活動としての数学」との相違を明らかにする

課題Ⅱ：Brouwer の数学観と「教授学的現象学」との相違を明らかにする

課題Ⅲ：先述の課題の解決を踏まえ，Freudenthal の数学教育論における数学観を組織する

課題Ⅰについては，先行研究で述べられている知見を基に，「人間の」という部分と「活動」という部分に分け，より Brouwer に焦点を合わせた形で言及する。

課題Ⅱについては，主に岡田（1977，1979，1981）が明らかにしている「教授学的現象学」の概念を参考に，Brouwer の「現象学的変換」という概念との対応について述べる。

課題Ⅲについては，Freudenthal の教授原理として知られる「再発明」や，そこでの中心的活動である「数学化」の基底にある数学観を検討することを通して，Freudenthal の数学教育における数学観を組織する。

５．Brouwer の数学観

5-1.「古典的認識論」

Brouwer の数学観を明らかにする準備として，それに対立する主要な考え，いわゆる「古典的認識論」を提示する。

古典的認識論を一言で述べるならばその特徴は，「認識的拡張についての一般的な論理-集約的ないし表現－集約的な考え方（飯田 1995,pp199)」である。つまり，知識の内容的成分を強調し，その認知様態の問題には力点を置かない。このことから，認知様態（知覚，経験，直観など）の保存に対して相対的に弱い要請（保証作用：命題の確実性を重要とする）を行うとき，古典的認識論はそれに応じて，より大きな役割を推論による正当化に対して残すのである。

日常の例(注7)をあげる。

私は窓の外の芝生を見ており，それが緑であることがわかっている。私の椅子を反対の方向に向けると，入口に敷かれたじゅうたんが眼に入り，それがグレーだとわかる。こうして得られた知識から，論理的には，窓の外の芝生が緑であり，かつ入口に敷かれたじゅうたんがグレーであることが推論できる。

数学の例(注8)をあげる。

次のような属性を持つ２つの無理数 a と b があることを証明する。

a^b は有理数である。

$\sqrt{2}$ が無理数であることは知られている。そこで，次のような数を考える。

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

排中律に基づくと，明らかにこの数は有理数か無理数かのどちらかである。これが有理数なら証明が完了する。もし無理数なら，次のような数を考える。

$$a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \text{ および } b=\sqrt{2}$$

すると

$$a^b=\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})}=\sqrt{2}^2=2$$

2 は明らかに有理数である。従って証明が完了する。

この見解の背後にある考え方はこうである。知識というものはおそらくある種の直観や経験から始まるだろうが，それにもかかわらず，知識は，そうした直観や経験の拡張を伴うことなく拡張できるし，多くの場合，そのように拡張されるべきである。それは，経験そのものが，拡張の際，実際的な困難（範囲と種類）か，あるいはそうすることにかかるコストという問題をはらんでいるからであり，それゆえ論理的推論は，困難や付随的な代価なしに，経験の拡張という認識的な利益をわれわれにもたらしてくれる。したがって，知識が始まるために経験が必要なのかもしれないが，経験は，知識を拡張するための手段としてはきわめて限定された価値しかもたない。

5-2. Brouwer による「古典的認識論」批判からみる Brouwer の数学観

結論から述べるならば，Brouwer は直観あるいは経験こそ，知識を拡張するための手段と考えており，古典的認識論と真逆の立場をとる。つまり，数学的知識とその成長の「経験-集約的性格」を主張し，「論理-集約的性格」を否認する。それは，Brouwer が，論理を自律的なものと考え，数学を（存在という点からではないとしても，機能的には）論理に従属する[注9]ものと考える古典的見解に対し，数学を本質的には内省的で構成的な活動または経験の一形式であると捉えるからである。

では，論理的諸原理（論理的推論）は何の役割も果たさないかというとそうではない。Brouwer は，直観主義的証明-経験が見出されるような命題を同定したり，記憶したり，コミュニケートしたりするための道具的な装置として，一定の限定された役割を認めている。

ここで，一般的な直観主義の主要な批判対象について述べておくことにしよう。すなわち，排中律批判である。Brouwer の高弟ハイティングはこう述べる。

「答えがあらかじめ存在するとみなすことは，カルナップ流の表現を用いて言えば，「神学者」の発想であって，問題に挑んでいる数学者が採ってよい態度ではない。なかんずく排中律を使って問題が解決されているかのように議論を進めることは許されない。（佐々木，2001，pp45）」

これは，数学を論理に従属する立場に反対する Brouwer の学説に従ったものであるといえよう。そして Brouwer 自身も，排中律は，一定の諸命題が実際にそうした特質（直観主義的な証明の内容となる潜在性をもつかどうか）をもっていないのに，そうした特質をもつものとして同定するように導いてしまう。したがって，どの命題が直観主義的な証明-経験の内容となる潜在性をもつかを「計算する」道具的装置（の

一部）として，排中律は満足できるようなものではない，と述べている。

しかし，Brouwer にとって，排中律批判は「古典的認識論」に対する主要な批判とはいえない。それは以下の言明に表れている。

「いかなる古典論理的枠組みにも適合させられない直観主義的構造が存在し，またいかなる内省的描像にもあてはまらない古典的論証がある。（飯田，1995，pp204)」

この主張の最初の部分は，古典的な道具の不完全性に負うところの不正確さを強調しており，第二の部分は，その不健全性から帰結する不正確さを強調している。

そして，基本的には，排中律批判は健全性に対する批判であり（排中律は内省的描像ができないということ），完全性の問題が位置確定および記憶上の装置の正確さにとって健全性の問題とまったく同様に重要だという事実にもかかわらず，排中律批判は完全性の問題の評価に対してほとんど寄与しない。それゆえ，排中律批判を主要なものだと考えず，一般的な直観主義者による「どの論理が数学の論理か」という問い（そして特に「排中律は数学の論理に属するか」という部分的な問い）が二次的な重要性しかもたない，ということを主張している。より根本的な問いは，「何であれ論理というもの（「正しい」論理をも含めて）が，直観主義的な証明の構成においてどのような役割をはたさねばならないか」である。この立場から判断すると，「どの論理が数学の論理か」という問いは誤解を招くような問いとみなさざるをえない。

このような不完全性から，「古典的認識論」の動機である，直観や経験による知識の拡張の「困難や代価」という問題を払拭する。

それでは，知識の拡張についての詳細をみていくこととする。

Brouwer に従うと，数学（的知識）の成長や発展は，（古典的認識論者が主張するように）その内容の論理的外挿を媒介にして進行するようなことはありえず，むしろそうした活動や経験の「現象学的ないし経験的展開」―すなわち，認識的に同じ種類の，別の経験（活動）への拡張（変換，創造）によってのみ可能なのである。それゆえ，命題ｐという数学的知識が命題ｑという数学的知識へと拡張されるとすれば，その内容がｐであるような経験ないし活動が，ｑという内容の経験や活動へ変換されなければならない。内容の論理的外挿―つまり論理的推論―は，Brouwer の言うところでは，決して「数学的な事態を演繹」できない。

ここでいう現象学的変換とは以下の通りである。現象学の創始者として知られるのは，E.Husserl(1859－1938)である。19 世紀末より，20 世紀初頭にかけて，ヨーロッパの学問論的動向には，すでに構築された理論への依存から脱却し，生や経験への還帰によって，近代科学をその発生基盤に戻して見なおそうとする気運が生じた。Husserl の現象学もまたこうした同時代の課題意識をラディカルに遂行しようとしたものである。そして，この「事象そのものへ(Zu den sachen selbst!)」という姿勢に対する方法論的な手続きが「現象学的還元」と呼ばれた。この方法を簡単に述べるならば，さまざまな先入観を拝して（エポケー），事象そのものがみずから現れ出る仕方を記述することである。

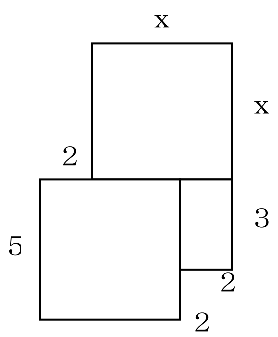
Brouwer はこのような現象学的姿勢および方法のように，数学の活動も行われるべきとする。今，筆者は，Freudenthal が Brouwer からどのような影響を受けたかを検討しようとしている。そこで，Brouwer の構成主義的な態度を保存し，「現象学的変換」という方法を強調した例を教育の文脈としてあげることとする。なぜ教育の

文脈で述べるかというと，Freudenthal の数学教育論の基底にある観念を明らかにしようとするとき，Brouwer の知識の拡張の例を比較対象とするためには，同じ文脈で語られることが望ましいと考えられる。また，Brouwer の知識の拡張の方法が教育についてどういう意味を持つかが語られてこそ，その比較により，Freudenthal の観念が浮き彫りになると予想する。

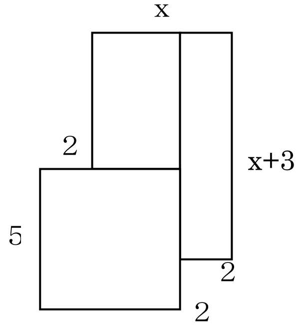
<u>例えば次のような事例を考えてみる</u>。[注 10]

今 x^2+5x+6 は $(x+2)(x+3)$ と因数分解できるという命題がある。そして，因数分解の結果は一意に定まるのである。しかし，本当にそうなのだろうか。

x^2+5x+6 が現れ出るような仕方を考えてみる。そのための図が下図である。



この図を変形すれば確かに，縦が $(x+3)$，横が $(x+2)$ の長方形の面積として，x^2+5x+6 を $(x+2)(x+3)$ に因数分解できる。またこの図の切り方を変えて面積を計算してみても同様の結果が導ける。



このように分割して計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} x(x-2)+5x+2(x+3) &= x\{(x-2)+5\}+2(x+3) \\ &= x(x+3)+2(x+3) \\ &= (x+3)(x+2) \end{aligned}$$

しかし，このような考察では，因数分解の結果が一意に定まることの構成にはなっていない。そこでもっと具体的な現象について検討する。つまり，x が０，１，２，・・のときを検討する。

x=0 のとき

面積は 6 である。それを素因数分解すれば６＝２×３であり，面積が６になる因数の組み合わせは（2，3）のみである。

x=1 のとき

面積は１２である。それを素因数分解すれば１２＝2^2×３であり，面積が 12 になる因数の組み合わせは（2，6），（3，4）である。

x=2 のとき

面積は 20 である。それを素因数分解すれば２０＝2^2×５であり，面積が２０になる因数の組み合わせは（2，10），（4，5）である。

x=3 のとき

面積は 30 である。それを素因数分解すれば３０＝２×３×５であり，面積が 30 になる因数の組み合わせは（2，15），（3，10），（5，6）である。

このような具体的な現象を見ていくと，どのような x の値でも，ある数 a と，a＋１の組み合わせが表れてくる。これを再び文字で表すと，(x+2)(x+3) となる。このことから，因数分解とは，x が具体的な数の場合の共通の因数の組み合わせを見つけるということであり，この問題に限っては因数分解の結果が一意に定まるというように命題が拡張される。

このように，Brouwer 的認識論は，数学的知識についての理論的な考え方ではなく，むしろ実践的な考え方に基礎をおき，最初の命題に到達

した際の認知様態（因数分解の例であれば，図形を変形するという数学的直観からの考察）を保存する別の活動を経験することにより知識が拡張されていく。このような見方からすれば，数学は一連の真理（確実な根拠に基づいて正しいと認められた事柄）というよりは，一連の行為もしくは行為の能力である。同様に，数学的知識もまた，様々な命題についての合理的反省とそれに引き続く知的認識，つまりそれらの命題が真であることの知的認識というよりも，むしろ一定の行為をいかに遂行するかについてのある型の実践的知識である。

結局のところ，数学的知識の拡張は，実践的能力の拡張なのであり，そうした拡張はある数学的活動を別の数学的活動に結びつけるような性向の獲得と表現とに基づいている。こうして，われわれの局所的な様々な証明-活動は互いにひとつの包括的な全体（「適合性」ないし「連続性」という包括的関係により構築される全体）へと結びつけられるようになる。このように，さまざまな活動を「生きる」(注 11)ことが知識の拡張にとって肝要となる。

以上から，先述した Brouwer の見解の礎石をなす教義が導かれる。それは，数学が，包括的な全体へ志向する，構成的な心的活動の一形式と捉えるということである。

そして，Brouwer の数学観は以下の 3 点にまとめることができる。

１）数学（的知識）は，内省的で構成的な活動または経験の一形式 ２）知識の拡張は，活動の拡張，新たな証明経験の創造というように，現象学的変換によって行われる。 ３）先の２つとも関係するが，論理的推論一般に重要な認識的価値を付与しないという記号嫌いとでもいうべき態度。

６．Freudenthal の数学観と Brouwer の数学観との相違

6-1.「人間の活動としての数学」と「内省的で構成的な活動または経験の一形式である数学」との相違

Freudenthal による「人間の活動としての数学」とは，先行研究で述べられているように,「数学を我々の文化にしっかりと根ざし，外在的要因（「応用的」）と内在的要因（「純粋的」）によって定められる一つの知識領域として見ること（Wittmann 2005)」，そのような豊富な関係性（Beziehungshaltigkeit）を，神が作った絶対的なものとして見るのではなく，児童生徒が自らの言葉でもってそれを能動的に再構成する活動である。

このような立場は，伊藤(2003)が指摘するように， 数学をする人間の側に活動権を与える直観主義と共通の前提である。そして，数学を「内省的で構成的な活動または経験の一形式であると捉える」Brouwer とも共通の前提に立っていることがわかる。このように「人間の」ということに対する前提は共通であるが「活動」という用語については，Freudenthal と Brouwer では大きな違いがある。

6-2. Freudenthal の活動観と Brouwer の活動観の相違

Brouwer は「活動」を，数学的対象の直観による構成と意味し，認知様態を保存した現象学的展開により知識が拡張されるとする。そして，知識の拡張の際に，論理的推論一般に認識論的価値を付与しない。

これに対し，Freudenthal は「活動」を「現実の数学化」と「数学の数学化」に特徴づける。「現実の数学化」は数学的方法による現実の組織化であり，「数学の数学化」は数学的方法による数学の組織化を意味する。つまり数学化とは，以

前の個別的経験の領域を組織化することである。そしてこのような組織化が生徒の能動的な活動により「再発明」されるような過程を踏むとき，「活動」ということの真意が解される。

このとき, Brouwer の知識の拡張の例としてあげた因数分解の例については，今までの経験の組織化ととらえることができることから，Freudenthal も, よい構成的な活動として認めると考えられる。しかし，Freudenthal の場合，Brouwer が忌避する方法による知識の拡張についても部分的に認めているのである。

例えば,「帰納的外挿法」である。

３＋２＝５　３－２＝１　３・２＝６
３＋１＝４　３－１＝２　３・１＝３
３＋０＝３　３－０＝３　３・０＝０
3＋(-1)＝□　3－(-1)=□　3・(-1)＝□

それは，規則性により子どもが直観を離れても計算の答えを発見できることであり，数学者が数学を研究する姿勢の一つでもある。

また,「代数的原理（algebraic principle)」と呼ばれるものもあげることができる。

それは，$\frac{7}{3}$ のような数を 3x=7 となる x として働く数として定義することである。このような代数的原理を用いることによって，負の数も平方根数も定義することができる。

では, Freudenthal はなぜ Brouwer を裏切るのであろうか。それは, Freudenthal が立つ数学教育観によってであると考えられる。

まずあげることができる数学教育観は，Brouwer とは数学を学ぶ対象が異なることから指摘できる。それは, Freudenthal が数学者を目指す教授を考えるのではなく，数学を決して応用しないだろう生徒にとっても必要であるとする，すべての生徒にとっての教授の対象として考えていることである。これは，将来の数学者が限りなく少数である事実から，数学教育に携わるものにとっては当然の帰結である。

また, Freudenthal が数学者の活動として知られる数学化を強調する背景には，学習者と数学者を，数学を学ぶ者として同等の存在とみなす数学教育観があげられる。つまり，学習者も数学者と同様に,「既成の数学」ではなく，数学的な組織化を学ぶ権利があるのである。

このように，数学教育を考える Freudenthal にとって, Brouwer のように厳格な数学観はとらないのである。

今二つの数学教育観をあげたが，数学教育観はこの二つに尽きるものではない。そこで，Freudenthal の数学観において, もう一つの主要な数学観である「教授学的現象学」について，Brouwer の影響を検討しながら, 他の数学教育観について述べることとする。

６－３.「教授学的現象学」における Brouwer の影響

Freudenthal は,「ソクラテスの方法」や「追発明の方法」に基づく教授に先立ってなされる，教授者の教授に関する思考上の実験を「思考実験」と呼んだ。そして，このような「思考実験」では，予想される学習者の疑問や，それに対する解決策や助言の仕方といった，発明に至るまでの教授のあり方や，長期的な学習過程の水準構造が検討される。このような概念が「教授学的現象学」のもとになった概念である。

このように, Freudenthal は, 数学を研究する過程を内省して得られる数学の正しい認識が実際の教授に先立つべきとするのである。そして，数学の正しい認識がどこから導かれるかというと，現象学的考察によってなのである。ここに Brouwer の影響がみられる。しかし,「我々は,

Mathematics for Education を意味し，Education for Mathematics を意味しない(岡田 1977)」。つまり，数学そのものの正しい認識に基づいた大域的な組織化だけをよいとするならば数学者にその組織化を語らせればよい。Freudenthal はそれだけでは不十分とし，「教授学的逆転[注 12]」でないかを判断するための視点として，以下の「教育的視点」(数学教育観) を強調するのである。

5 つの教育的視点
(1)operational な方法での組織
(2)発見的でなければならない
(3) comprehension による習得と apprehe-nsion による習得での領域の分離
(4) 概念指導と演算指導を区別しない
(5)直観的水準からアルゴリズム的水準へ移行するときの必要性の認識

このように数学の認識を教授-学習において強調した言葉が「教授学的現象学」であり，Brouwer の数学観を数学教育の文脈で補った数学観と考えることができる。しかし，その中で行われる活動に Brouwer が忌避する知識の拡張も認めることから，Freudenthal 自身で「L.E.J. ブラウアーの数学観 (教育についてではないが) の影響を裏切っている」と述べるのである。

6-4. Freudenthal の数学教育論における数学観

Freudenthal の教授原理は「再発明」として知られ，数多くの文献で取り上げられているためその概念を以下に提示する。

それは，「発明者の歴史的足跡ではなく，今日の学習者に合わせて修正され，適切な軌跡へと導かれた歴史の解釈 (伊藤 2006)」に沿って行われる活動である。この「歴史の解釈」とは，「貴方が貴方の数学を，それが起こった仕方で他の人にコミュニケートするべきではなく，一人の生徒に，彼のプロセスがガイドされているなら起こったろうようにコミュニケートするべきである (Freudenthal 1973)」という趣旨のものである。 このように Freudenthal が述べるのは，氏が，数学教育の目標を，文化遺産の伝達と考えない数学教育観によるものであり，「我々は，教えている教材が，将来必要とされているかどうかを知りえない」と述べることから，数学的事実を情報として伝達することではなく，それを習得する方法である「数学化」に重点をおいた教授原理であると解釈できる。

また，このような考えの基底には，「数学は非常に柔軟であるので個別的にも集団的にも，その応用と応用可能性に関して，そのいっそう鋭い輪郭を，一かたまりの一般性にまで与えることができない (Freudenthal 1973)。」という数学観がある。しかし，これはカリキュラムの自由を意味するのではなく，先述したように，「適切な軌跡」へと導かれなければならない。これを検討するのが「教授学的現象学」という数学観である。それは，数学そのものの正しい認識に基づく組織化を実際の教授の前に，教授学的要因 (先述した，５つの数学教育観) を考慮にいれ，検討するということであり，実際の学習場面は，「学習過程の不連続性[注 13]」という数学観によって構造化されなければならないのである。

このような前提に立ち，実際の授業で行われる活動が，先ほど述べたように「数学化」という活動である。それは，以前の個別的経験の領域を組織化することであり，すべての生徒にとっての教授の対象と考える数学教育観や，学習者と数学者を，数学を学ぶ者として同等の存在とみなし，学習者も数学者と同様に，「既成の数学」ではなく，数学的な組織化を学ぶ権利があるとする数学教育観，そして，「組織化すること自体が数学的活動である(Freudenthal 1973)」

とする数学観に支えられているのである。

さらに，以上で述べた教授原理「再発明」やその活動である「数学化」，そしてそれを支える数学観，数学教育観の最も基底にある観念が「人間の活動としての数学」という数学観なのである。この点こそが Freudenthal の数学教育論の数学観において，最も基礎に位置づくのである。

ー今後の課題ー

・本研究は Freudenthal の数学観と Brouwer の数学観の相違を部分的にしか検討できていない。

・排中律を中心とした，論理的推論一般に対する批判については，直観主義者と Brouwer 主義者とで違いがあることは述べた。しかし，その他の点については検討できていない。

・先の点とも関係するが，直観主義の第 2 世代ともいえるハイティングは「ブラウワーの記号嫌いの精神を払拭することによって，排中律を一般的には使用せず，構成を重視するという原則を守りながらも，直観主義の形式化を図った。(佐々木 2001, pp63)」このような直観主義の影響についての検討が残されている。また，「半直観主義」という立場に立つ，ヘルマン・ワイルの影響についても同様である。

・Freudenthal の数学教育論として，「再発明」や「数学化」に影響をおよぼす人間観や陶冶観という「基底的観念」を検討することが残されている。(注３)

注釈

(注１)「陶冶価値」を実現するための内容を「陶冶作用」という用語で表す。

(注２)教授学的現象学は，指導方法により深く関与しているとはいえ，本質的には Freudenthal の数学観と同一のものとする。

(注３)詳しくは，塩見拓博 (2007). Freudenthal の数学教育論についての一考察. 鳥取大学数学教育研究, 10, 7. 参照

(注４)ピアジェが述べる「操作的原理」ということではなく，ヴィットマンが述べるように，対象がどのように構成されるかという，手続きが示される知識の構成として「operational」を用いる。

(注５)Freudenthal の数学教育論の基底にある観念を「基底的観念」とする。詳しくは，『大高泉 (1998). ドイツ科学教育論研究. 共同出版.』,『塩見拓博 (2007). Freudenthal の数学教育論における一考察 —基底的観念の検討を通して—. 第 40 回数学教育論文発表会論文集』参照。

(注６)哲学・思想事典,「現象学」の項より。

(注７)飯田 (1995), pp190 より。

(注８)Web サイト，Wikipedia より「排中律」で検索。

(注９)排中律を用いて説明すると，排中律は問題がすでに解決されてしまっていることを前提としている。この意味で，論理学は数学に従属しているのであり，論理学者のように，論理学から数学が導き出せると考えることは本末転倒なのである。

(注 10)鳥取数学教育研究会(*Lapin* の会)での協議より引用。

(注 11)Brouwer は，ある命題の知的「承認」ないし，「受容」だけからなるような知識よりも，それとともに何ごとかを為す能力をもたらすような種類の知識の方により大きな価値をおいているのである。このように「生きる」ことを重要視するため，認知様態を保存した活動の連続というものが肝要になるのである。

(注 12)指導内容 A から指導内容 B へという指導系列が，教授学的にみて正しい系列であるかどうかということ。

(注 13)「中心転換」(子どもが以前に無意識に経験し

てきたことを意識化することであり，この意識化が水準上昇の必要性となる）という概念から，学習過程をみてみると，１つの水準から次の水準に移行するとき，学習の対象が全く変わってくる。不連続な移行による学習過程により，実際の教授を構造化しなければならない。

本研究では，この数学観に対する Brouwer の影響を検討できていない。

主要引用・参考文献

大高泉 (1998). ドイツ科学教育論研究. 共同出版.

飯田隆 (1995). Readings in the Philosophy of Mathematics : After Godeled. 勁草出版

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to be Useful, *E.S.M, 1*(1/2)

Freudenthal, H. (1971) .Geometry Between the Devil and the Deep Sea, *E.S.M, 3*(3/4)

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task , D.Reidel 出版社

岡田ヨシ(衣偏に韋)雄 (1977). H.Freudenthal の数学教育論(Ｉ). 広島大学教育学部紀要, 3(26), 1-9.

岡田ヨシ(衣偏に韋)雄 (1979). H.Freudenthal の数学教育論(Ⅲ). 広島大学教育学部紀要, 2(2), 81-86.

岡田ヨシ(衣偏に韋)雄 (1981). H.Freudenthal の教授学的現象学の概念. 数学教育学研究紀要, 7, 53-55.

伊藤伸也(2003). H.フロイデンタールの再発明原理を支える数学観. 日本科学教育学会年間論文集, 27, 277-278

伊藤伸也(2005). Ｈ. フロイデンタールの数学教授学における「思考実験」. 日本科学教育学会年間論文集, 29, 447-448

伊藤伸也(2005). Ｈ. フロイデンタールの数学教授学における「数学化による領域の組織化」の概念. 日本科学教育学会

伊藤伸也 (2006). H.フロイデンタールの教授原理「追発明」と「発見学習」の異同. 数学教育論文発表会論文集, 39, 625-630.

Wittmann,E.C.(2005).Realistic Mathematics Education- Past and Present, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, *6*(4), 294-296.(真野裕輔訳)

國本景亀(1989). 計算教育の充実のために. 数学教育学研究紀要(西日本数学教育学会), 15, 116-122.

高橋等(2003). 子どもの算数・数学的活動を大事にする，湧き出させる. 上越数学教育研究, 18

大野桂　越後佳宏　清野辰彦(2007). 小学校算数科における数学化を重視した学習指導の枠組み　－Realistic Mathematics Education を手がかりにしてー. 学芸大数学教育研究, 19

柳本成一 (1997). Freudenthal の数学教育の問題 (major problems) を考えるための思考活動について. 第 30 回数学教育論文発表会論文集, 673-674

小林廉 (2006).「数学化すること」を重視した授業設計 に関する研究 :Realistic Mathematics Education を手がかりとして. 数学教育論文発表会論文集, 39, 721-726.

塩見拓博 (2007). Freudenthal の数学教育論における一考察 ―基底的観念の検討を通して―. 第 40 回数学教育論文発表会論文集

哲学・思想事典. 岩波書店

鳥取大学数学教育研究　　ISSN 1881–6134

Site URL：http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/journal.html

投稿規定

- 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。
- 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。
- 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.rs.tottori-u.ac.jp/mathedu/