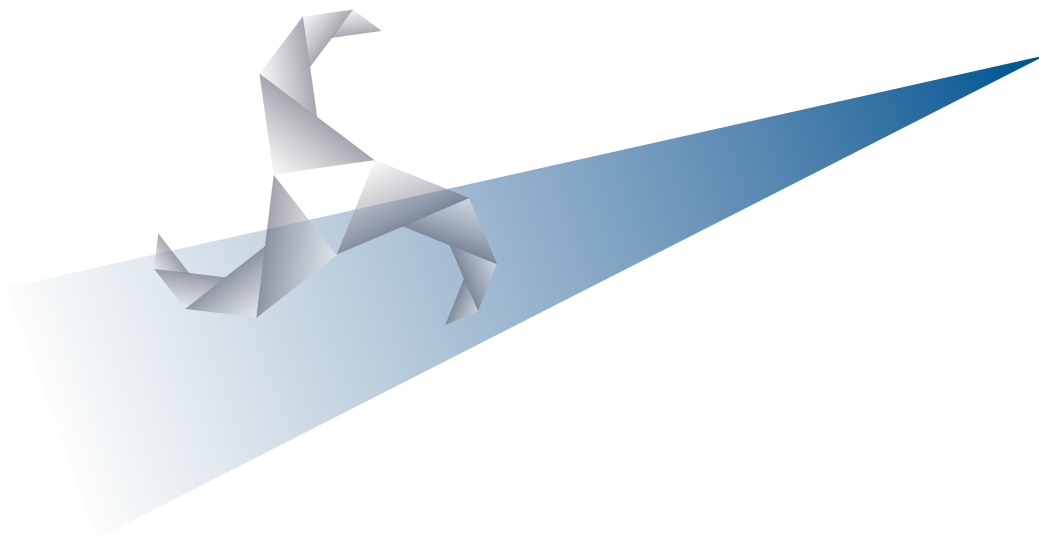




# 鳥取大学数学教育研究

*Tottori Journal for Research in Mathematics Education*

ISSN : 1881-6134



数学的活動を生かした数学の授業づくり

桑本康昭

vol.9, no.14

Mar. 2007

Site URL : <http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html>

鳥取大学 数学教育学研究室

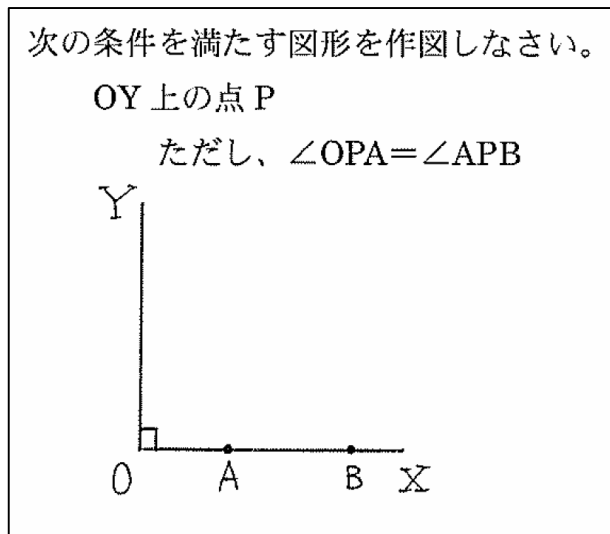
## はじめに

中学校 3 年生を担当していたときの、3 学期のことである。コンパスと定規を使った作図を生徒にさせようと、問題を探していて、右のような問題を見つけた。解答はついていなかった。どのように解けばよいか、少し考えかたが、解けず、中学生にとっても難しいと判断し、使うことをやめようとした。普段であれば、そのままほって置かれることになるだろうが、ふと森毅氏のことが思い出された。解き方が分かっている問題は面白くない、数学

はどう解くかいろいろ考えているときに力がつくものであるというようなことや、すぐに解けなくてもどこか頭の隅に置いて 2, 3 日ほっておいてまた考えると解けることがあるというようなことである。このようなことが実行できる生徒になってほしいなと思いつつ、自分ではそうしていないなと思った。そこで、まあしばらくどう解くか解けなくてもいいからぼちぼちと考えてみようと思い組んだ。すると、3 日ぐらいいして解くことができた。とても嬉しくて、人に話したくなった。数学の先生が数学の問題を 3 日かけて解いて大喜びしていても理解されないだろうなあ（ましてこの問題は基本ドリルのページにあった）と思い、職員室の隣の席の和菓子好きの国語の先生に話したい衝動を抑えた。しかし、私はとても嬉しかった。

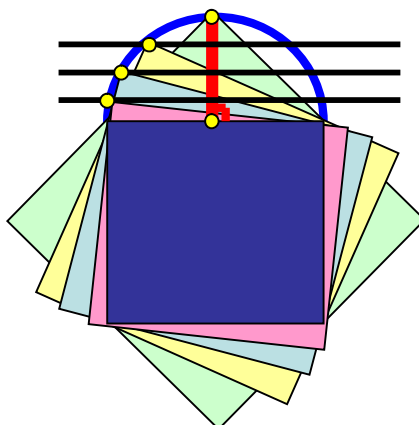
授業中に生徒が「あっ、分かった！」と言うのを聞くととても嬉しいものである。しかし、授業を振り返ってみたとき、生徒が主体的に取り組み、自ら解いて喜びを感じることができるような場をどれほど設定しているか反省せざるを得ない。上に書いたように自分で考え、解決できたときはとても嬉しいものであるが、分かるために説明を多くしていたり、つまづかないように先回りしたりして生徒の喜びを奪っていることもあるように思う。生徒が主体的に取り組み、自ら解いて喜びを感じるような授業にしたいと考えても、具体的にどう変えていけばよいか分からないでいた状態が続いていた。そこで、この度、授業を改善することを目指して研究をしていく。生徒が主体的に取り組み、学ぶことのよさや喜びを感じる授業づくりをどのようにすればよいか探っていくことにする。

研究に当たって多くの先生方に御指導いただき感謝しております。



## 目次

はじめに.....	1
第1章 研究のねらい・方法.....	3
1-1 研究のねらい.....	3
1-2 研究の方法.....	4
第2章 授業の構成.....	5
2-1 数学的活動を生かした数学の授業とは.....	5
2-2 授業づくりのポイント.....	8
第3章 授業実践の方法と実践事例.....	10
3-1 授業実践・授業記録・分析の方法.....	10
3-2 実践事例①.....	10
3-3 実践事例②.....	14
3-4 実践事例③.....	18
第4章 開発教材事例「正方形の作図を利用した平方根の導入」.....	23
4-1 平方根を学ぶ上での困難さの分析.....	23
4-2 これまでの指導から改善すべき点.....	24
4-3 教材の開発とその教材を用いた指導の利点.....	24
4-4 開発した教材を利用した指導計画.....	31
4-5 作図の考え方・流れと学習指導案.....	31
4-6 授業実践.....	41
第5章 研究のまとめと今後の課題.....	43
5-1 研究のまとめ.....	43
5-2 今後の課題.....	44
おわりに.....	44
引用・参考文献.....	45



## 第1章 研究のねらい・方法

### 1-1 研究のねらい

中学校で数学を教えて17年になる。授業を通して生徒にいろいろな力を付けていきたい、生徒が主体となって学んでいく授業をしていきたいと考えている。しかし、生徒に十分な力を付けきれていないのではないか、説明中心の授業になっていないだろうかという思いも常にある。そこで、授業改善をしていくことをこの研究のねらいとしていきたい。どのように改善していくかというねらいを絞っていくために、授業に求められていることを再確認した。そのことを次に挙げる。

#### ア 中学校学習指導要領より

##### 数学科目標

数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさ、数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる。

#### イ 「平成18年度 学校教育の努力点」(鳥取県教育委員会)より

数学的活動を積極的に取り入れ、生徒が驚き、感動を味わい、数学を学ぶことのおもしろさ、考えることの楽しさを味わえるような指導の工夫をする。

#### ウ 「学力向上推進研究調査事業」(鳥取県教育委員会)より

算数・数学科における思考力・表現力、学ぶ意欲を高める指導

##### 鳥取県の課題

学ぶこととの楽しさや充実感を味わえる学習にする工夫が必要  
自ら学び、考える力を育てる工夫が必要

#### エ 「平成18年度 基礎学力調査」(鳥取県教育委員会)より

中学校2年生数学 評価観点別の分析・考察

##### ○数学的な見方や考え方

具体的な問題状況を解決するために、いろいろな見方や考え方をし、それを生かして問題解決する問題の正答率が低い。思考活動を豊かにする観察・操作・実験などを取り入れ、事象に潜む関係や法則を見つけ、論理的に考察する指導が望まれる。

#### オ 自分の経験より

現場で感じていることとして説明中心の授業をしてはいないもののわかり易くしようとして説明が多くなっていないか、生徒がつまづかないように先回りしすぎていないか、生徒が学ぶ喜びをつかむような授業になっているか、授業を通して生徒に力を付けているのだろうか、ということが挙げられる。このことから、求められているこ

とは「真に生徒が主体となって学び、生徒の力が伸びること」と考える。その伸ばしたい生徒の力とは、これまでの経験から、

- ・豊かな発想・多面的なものの見方ができ、既習事項を活用していける力、
- ・果敢に行動し、失敗からも学んでいく力、
- ・図や表にしたり、数値を抜き出したりするなど、解き方を工夫する力、
- ・求めた答えを振り返り確かめる力、
- ・一通りの解決ができた後、さらに別な解決方法をさがす力、
- ・解決後にさらに発展できないか、関連することは何か、考える力

と考える。

#### カ まとめ

アからオまでのことをまとめると、今授業に求められていることとは、「自ら学び、自ら考える力を育てること」そして「考える力を養うために「思考活動を豊かにする活動を取り入れること」その活動を通して「学ぶことのおもしろさ、考えることの楽しさを味わうこと」

であると考え。これをさらに言い換えると、

「生徒が主体的に取り組む、数学をつくりだす活動（数学的活動）を通して学んでいくこと」

が求められていることと考える。

これらのことから、「生徒が主体的に取り組む、数学をつくりだす活動（数学的活動）を通して学んでいくこと」が求められていることと考える。そこで、「数学的活動を生かした数学の授業づくり」をしていくことで授業改善を図ることを研究のねらいとする。よって、研究のテーマを「数学的活動を生かした数学の授業づくり」とした。

### 1-2 研究の方法

研究の方法として、まず数学的活動を生かした数学の授業の構成を探り、その授業構成に基づいて授業設計をし、実践授業をしていく。そして、数学的活動を生かした数学の授業の教材開発にも同時に取り組んでいくこととする。

## 第2章 授業の構成

### 2-1 数学的活動を生かした数学の授業とは

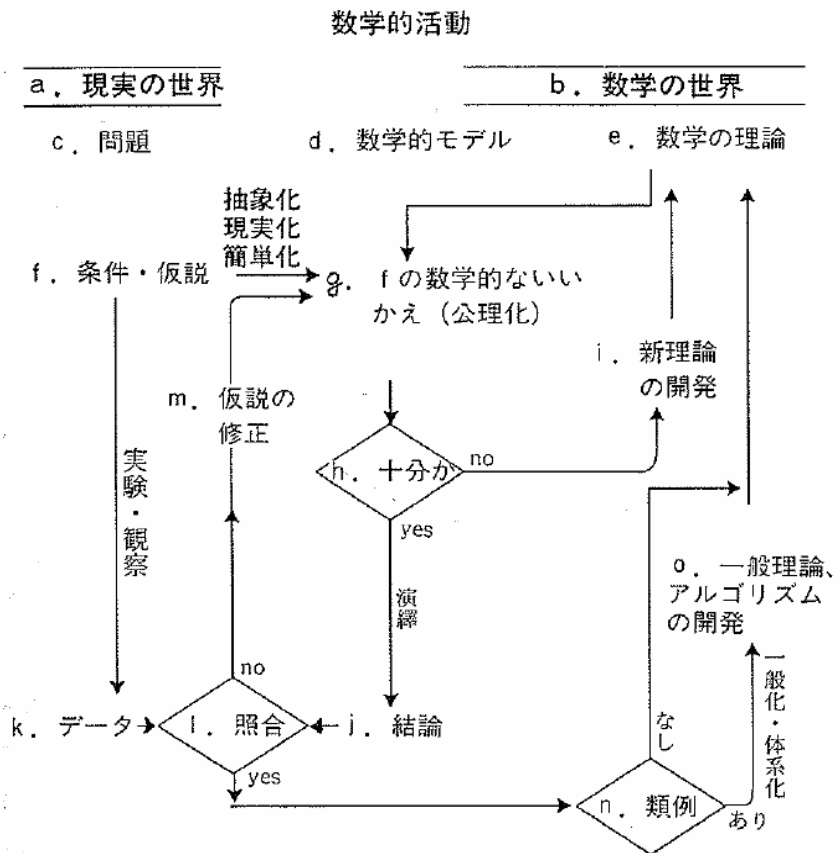
#### ア 数学的活動

数学的活動を生かした数学の授業を考える前に、数学的活動について考える。島田氏と能田氏の先行研究と中学校学習指導要領解説による数学的活動から本研究で考える数学的活動について述べる。

#### (a) 島田茂による数学的活動

既成の数学の理論を理解しようとして考えたり、数学の問題を解こうとして考えたり、あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり、数学を何かに応用して、数学外の問題を解決しようとしたり

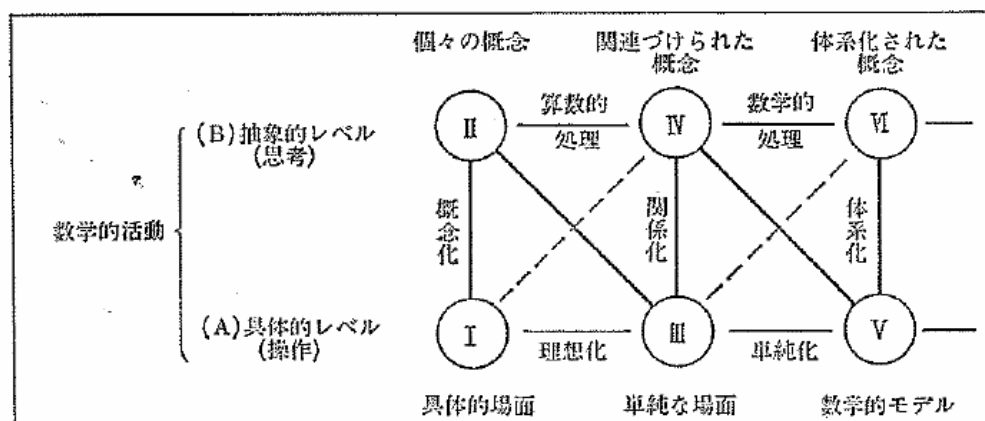
する、数学に関連した思考活動を、一括して数学的活動と呼ぶことにして、そのいろいろな時点での意味を、現実の世界と数学の世界のかかわり合いの上から、次の第1図のような模式図で考えてみよう。この模式は、人間が数学を作り出してきた歴史的発展を映しているとも見られるし、また個体発生は種の歴史を繰り返すという意味で、子どもたちが数学を学習していく過程を映しているとも見られる。



#### (b) 能田伸彦による数学的活動

「数学的活動」とは、学校数学、主に、小学校の算数と中学校の数学に関連した思考活動を、総称して呼ぶことにする。したがって、ここでの「数学的活動」に含まれるものは、具体物からの概念形成、概念間の関係判断と関係推理、あるいは、数学の問題や内容の理解と解決、さらに、数学的活動による表現や処理から数学の問題に適用したり、応用したりするなどの諸活動を総称するものである。これらの活動の概要を、モデルにかき表したものが、図3-1 数学的活動である。この図は小学校の低学年で子どもが行う数学的活動から中学校・高等学校で行う初等数学の理論構成と証明までを一応規定して筆者が作ったも

のである。



- (A) 具体的・操作的レベル（外面活動の場面）
- (I) 現実的・具体的場面……………日常的・現実的場面の内容
  - (III) 理想化された単純な場面……………教科書など半具体的な場面の内容
  - (V) 数学的に表現された場面……………式，表，グラフ，教具
- (B) 抽象的・思惟的レベル（内面的活動の場面）
- (II) 数量や図形などの個々の概念……………数3，5や三角形
  - (IV) 関連づけられた数学的概念……………有理数，多角形など
  - (VI) 体系化された数学的理論……………群，環などの定理

図3-1 数学的活動

(c) 中学校学習指導要領解説による数学的活動

改善の要点②数学的活動の充実を図ることができるようにすること

目標には新たに「数学的活動の楽しさ」という文言が盛り込まれた。

実生活との関連を図り、事象を数理的に考察する力を伸ばし、数学的な見方や考え方をを用いて問題を解決する能力を一層高めることができるようにするために、観察、操作、実験など具体的な活動を通して、ものごとの関係やきまりを見いだしたり、得られた結果の意味を良く考えたりするなどの活動も重視することとした。

数学的活動というとき、問題解決において様々な活動が想定される。例えば、日常、不思議に思うこと疑問に思うことなどを、既に身に付けた知識をもとによく観察し問題点を整理したり、見通しをもって結果を予想したり、解決するための方法を工夫したり、たどり着いた結果やその過程についても振り返って考えたり、また、事象の中に潜む関係を探り規則性を見いだしたり、これを分かりやすく説明したり一般化したりするなどの活動である。

数学的活動は、このように身の回りにおこる事象や出来事を数理的に考察する活動と幅広く捉えることができる。このような数学的活動を通して、数学で学習したことを自分なりに将来役に立つように意味付けすることができるようになるだろう。また、「数学的活動の楽しさ」とあるが、この「楽しさ」については、単に面白い、楽しければよいという意味ではなく、活動を通した「数学を学ぶこと」の楽しさということを意図している。

#### (d) 本研究における数学的活動

島田氏は、そのモデルは人間が数学を作り出してきた歴史的発展を映しているとも見られるし、また個体発生は種の歴史を繰り返すという意味で、子どもたちが数学を学習していく過程を映しているとも見られると述べている。この数学を学習していく過程を人間が数学を作り出してきた歴史的発展とも見ている点に注目したい。数学の学習は、出来上がったものを理解していくのではなく、自分自身の中に数学を作り上げていくものである。そして、その作り上げていく活動が数学的活動であると見ることができる。

能田氏は、数学的活動とは学校数学に関連した思考活動を総称して呼ぶことにしている。活動の概要を、モデルにかき表している。

中学校学習指導要領解説では、数学的活動は、身の回りにおこる事象や出来事を数理的に考察する活動と幅広く捉えることができるとしている。

これらのことに共通することとして、数学を学習する上で行われる様々な活動を幅広く数学的活動と捉えている点である。島田氏と能田氏はそこからさらにモデルを考え、研究を進めているが、本研究は、数学的活動を「生徒が主体的に取り組む、数学をつくりだす活動」と捉えていく。そして、その数学的活動を生かした授業をどうつくっていくかを中心に考えていくこととする。そこで、次に数学的活動を生かした数学の授業とその構成について述べていく。

#### イ 数学的活動を生かした数学の授業とその構成

中学校学習指導要領解説に、「数学的活動というとき、問題解決において様々な活動が想定される。例えば、日常、不思議に思うこと疑問に思うことなどを、既に身に付けた知識をもとによく観察し問題点を整理したり、見通しをもって結果を予想したり、解決するための方法を工夫したり、たどり着いた結果やその過程についても振り返って考えたり、また、事象の中に潜む関係を探り規則性を見いだしたり、これを分かりやすく説明したり一般化したりするなどの活動である。」とある。このように、問題解決において数学的活動が様々な想定され、問題解決を学習に取り入れていくことで、数学的活動が盛んに行われると考える。よって、本研究で考える数学的活動を生かした数学の授業とは、問題解決を学習に取り入れた授業として研究を進めていく。

問題解決のプロセスについて詳細な研究をしたポリヤは、それらを以下の4つに分けて捉えた。

1. 問題を理解すること
2. 計画を立てること
3. 計画を実行すること
4. 振り返ってみること

一般に、この4つの相を含むプロセスのことを「問題解決」とよぶ。

算数・数学の問題解決モデルに関する研究の多くは、このポリヤの4つの相というアイデアを出発点にしている。

授業に問題解決を取り入れ、この問題解決の過程を通して、知識や技能を獲得させると



同時に、問題解決において、数学的な考え方をを用いることをしていくのである。

問題解決の授業の構成は、ポリヤの4つの相を出発点として様々に研究されている。本研究では、

- ・問題の提示
- ・自力解決
- ・解決の練り上げ
- ・振り返り/評価問題

として研究を進めていく。問題の提示では、提示された問題の意味を理解し、解決の見通しを立てる。自力解決では、子どもが個々に問題の解決に当たる。解決の練り上げでは、全員で解決を練り上げていく。解決する過程を通して、知識や技能を獲得する。振り返り/評価問題では、学習を振り返ったり、学習の達成を確認すべく評価問題を実施したりする。このような4つの段階で授業を構成していくこととする。

## 2-2 授業づくりのポイント

問題解決の授業の4つの段階において、ポイントとなることがらを次に述べる。

### ア問題の提示

問題提示の段階では、始めに提示される問題がよい問題であることが何より重要になってくる。よい問題の条件については、鳥取大学矢部教授がその著書の中で詳しく述べている。

#### よい問題の条件

- ①学習者である子どもが、その解決を欲しているか、または問題の解決を必要としている問題であること。
- ②学習者である子どもが、その解決に際していまだ使えるようになっている手法を持っていない問題であること。
- ③学習者である子どもが、その問題の解決に際して既習事項を生かして、何か試行しなければならない問題であること。
- ④数学的に意味のある内容を含んでいる問題であること。
- ⑤問題の解決に際して、多様な解決のアプローチを含んでいる問題であること。
- ⑥問題の解決に際して、数学的な見方や考え方とそのよさ、さらにそれらを活用する能力を感得する態度を評価できる問題であること。
- ⑦問題の解決後、その問題が発展・応用へつながる問題であること。

### イ自力解決

自力解決の段階では、期待する数学的活動とその変容のための支援を考えることがポイントになる。予想される生徒の反応は当然考える。そこからさらに、数学的価値を持つ期待する活動を想定し、その数学的活動を高めるための支援を教師がしていくことが、大事になってくる。その支援も、次なる行動を促す支援と数学的価値付けを施す支援に分けられる。数学的価値付けを施す支援とは、期待される活動に対して、持つと考えた数学的価値を確認させる支援ということができる。さらに言い換えれば、活動において

用いられた数学的な見方や考え方を生徒に自覚させることである。

#### ウ解決の練り上げ

練り上げの段階では、単なる意見交換の場でなく、互いの考えをあわせて、集団としてよりよい考え方に高めていく活動にしていくことが大事になる。自力解決で個々が考えたことを発表しあうだけでなく、互いの解決を結び付けて考えたり、さらにアイデアを出したりしていくことができるようにするのである。そして、練り上げでは、問題の解決を通して数学的な概念、知識、技能等を作り上げていくことをねらいとする。

#### エ振り返り/評価問題

振り返りは、問題の解決を通して構成された「数学的知識や概念」の確認することを目的に行う。評価問題でも、構成された「数学的知識や概念」の確認をすることができ、その時間の学習を振り返ることができる問題を設定することが大切である。

## 第3章 授業実践の方法と実践事例

### 3-1 授業実践・授業記録・分析の方法

#### ア 授業実践の方法

授業設計をまず行う。そのときに、前述の授業のポイントを意識して、4段階ごとに作成していく。その設計したものをもとに授業をする。授業において記録をとり、その記録をもとにしながら、分析を行っていくこととした。

授業設計の具体的な内容は、各指導事例の「学習過程」で述べる。授業記録・分析の具体的な方法は次に述べるとする。

#### イ 授業記録の方法

##### a ビデオカメラによる記録

固定カメラによって教室全体を記録する。それを問題提示や練り上げの様子をふり振り返りに用いる。また、授業の時間配分も見ることができる。そして何より、授業の様子が残るので、授業者の記憶だけで振り返ったときには気づかなかったことも、後で気づくことができる。

##### b 授業ノートの記録

授業においては、生徒の数学的活動をノートから見取ることをしていく。授業中は記録をする時間がないので、授業後、全生徒のノートを記録することで、授業中に見取ることができなかった数学的活動などを見ていくことができるようにする。

##### c 数学科教員による抽出生徒の観察

在籍校の数学科教員にお願いして授業観察をしていただいた。その際、抽出生徒を決め、その生徒の数学的活動の変容を見取ってもらう事とした。その生徒の活動を通して、授業を振り返るためである。問題の把握、教師の支援による変容、練り上げのときの様子、評価問題の解決の様子を特に観察してもらうこととした。

#### ウ 授業分析の方法

ビデオカメラや授業ノートの記録をもとに授業を振り返るのは当然である。それ以外に、授業をした日の放課後に、授業観察をした在籍校の数学科教員に集まっていただき話し合いをした。特に、抽出生徒の様子を中心に授業を振り返ってみた。問題の把握をし、問題解決にすぐ向かえたか、教師の支援によって変容があったか、評価問題は解決することができたかなど観察された様子を聴くことができた。また、授業全体を通して、設計した活動が妥当であったか、練り上げは十分なされていたかなど、分析を行った。

### 3-2 実践事例①

#### 第2学年「図形の調べ方」

本時のねらい 三角形の内角の和が $180$ 度であることを説明できる。

#### ア 期待される数学的活動の様相

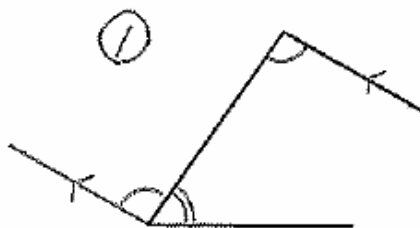
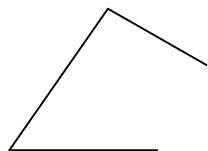
A：三角形の内角の和が $180$ 度になることの理由を説明する。

B：三角形の外角と内角の関係に気づく。

イ 学習過程

【問題提示場面】

【問題の提示】 次の2つの角の和に等しい角を作ろう。



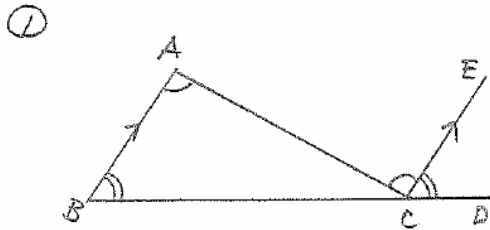
〈支援〉 ②の場合、三角形の3つの角の和は180度であることを根拠に使っているが、どうやって確かめましたか。

〈支援〉 どの三角形にも通用する説明を考えてみよう。

【問題】 三角形の3つの角の和が180度であることを説明しよう。

【期待する活動 A】

三角形の内角の和が180度になることの理由を説明する。



①  $\triangle ABC$ の辺BCを延長し、直線上的点Dとする。  
点Cを通り辺BAに平行な直線CEをひく。

$AB \parallel CE$ だから、

$$\angle A = \angle ACE$$

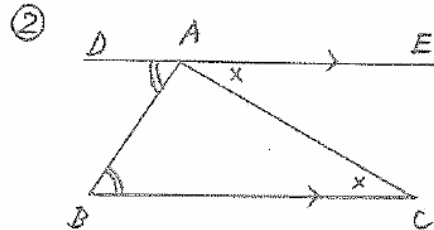
$$\angle B = \angle ECD$$

よって、 $\angle A + \angle B + \angle ACB$

$$= \angle ACE + \angle ECB + \angle ACB$$

$$= \angle BCD$$

$$= 180^\circ$$



② 点Aを通り辺BCに平行な直線DEをひく。

$$DE \parallel BC \text{ より } \angle B = \angle DAB$$

$$\angle C = \angle EAC$$

よって、 $\angle BAC + \angle B + \angle C$

$$= \angle BAC + \angle DAB + \angle EAC$$

$$= \angle DAE$$

$$= 180^\circ$$

〈支援1〉 根拠に用いたことがらは何だろう。

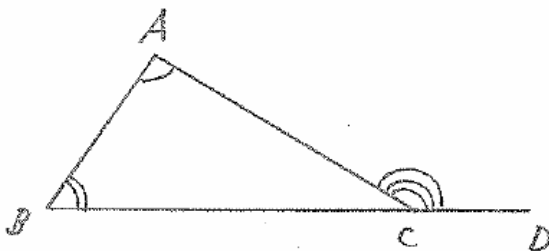
〈支援2〉 2つの内角の和に等しい角はあるだろうか。

〈支援の意図〉 三角形の内角と外角の関係を気づかせたい。

〈評価〉 三角形の内角の和を求めることが説明できたか。

【期待する活動 B】

三角



(理由)

活動Aの①

$$\angle A + \angle B = \angle ACD$$

【集団による課題の検討】

〈活動〉 三角形の内角の和が180度であることを説明する。

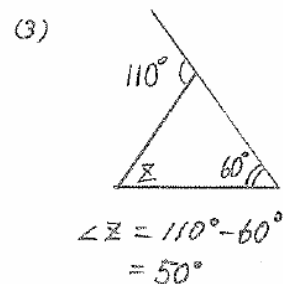
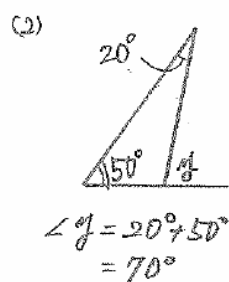
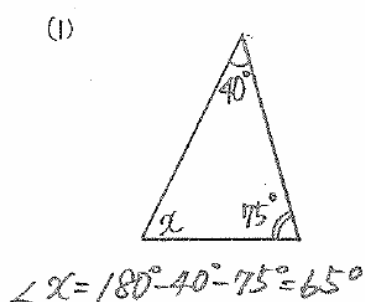
〈活動〉 三角形の内角、外角の関係を見つける。

〈支援〉 三角形の2つの内角の和に等しい角はどこだろう。

〈支援の意図〉 三角形の内角、外角の関係に気づかせたい。

【評価問題】 教科書 P87

問2 下の図で、 $\angle x$ 、 $\angle y$ 、 $\angle z$ の大きさを求めなさい。



ウ 授業の様子

・問題提示

三角形の2つの内角の和に等しい角をつくるという問題を考えるとき、もう1つの内角をあえてかかない図を示すことでより考えさせることができた。

始めの発表者が答えを黒板で図示するだけで、席に帰ろうとしたので、説明をするよう促した。説明に困っていたので、他の生徒に説明できないかと言うと、他の生徒がすぐに変わって、自ら前に出て図を活用しながら説明をした。

小学校で学んだことをふり振り返りながら、「三角形の内角の和が180°であることを説明する」ことの必要性を確認した。

・自力解決

解決の見通しをあえて確認することなく問題に向かったため、どう解いていくか気づかず考え込んでいた。その後、延長線や平行線をかき込んだ補助プリントを配布した。

補助プリントとは異なる解決方法を見つけている生徒もいた。

・練り上げ

説明を書く力はまだないので、発表生徒の説明を聞きながら教師が記入した。ノートに写す生徒のことを考え、もう少しまとめて記入する必要がある。

生徒のノートを意識して板書計画を立て、ポイントがきちんとおさえられるような板書にしなくてはならない。

・評価問題

答えを導く方法が、外角を使った手際のよい方法であったとき、そのよさを全員で確認し、次回その方法を活用しようという意識を持たせる必要がある。

## エ 数学科教員（3名）による抽出生徒（3名）の観察

〈抽出生徒A（解決にあたっては教師の補助が必要であるような生徒）の活動の様子〉

説明は自力ではできていなかった。補助プリントをもらうが自力解決が進まなかった。練習問題は期待される方法で解いていた。

〈抽出生徒B（試行錯誤しながら解決できる生徒）の活動の様子〉

1つ目の問いは友達に聞いて、はっと気づく。2つ目は相談したり、教科書を開いたりして解き方をを見つけようとする。プリントに等しい角をたくさん記入し、その図から理由を考えようとしていた。練習問題の（2）は他の生徒の説明を聞いてわかったようである。（3）は他の生徒の説明の声が小さかったので、わからなかったようである。

〈抽出生徒C（手際よいと思われる方法から解決でき、自分の解決したことを確かめることができる生徒）の活動の様子〉

1つ目の問いの答えはすぐに思いついていた。2つ目の問いは、すぐにはできなかったが、他の生徒への支援の中の「平行線」という言葉を聞いて気づいたようである。

## オ 考察

何を用いて解いていけば分からず困っていた。どこまで全体で確認してから自力解決に向かうかが大事なポイントである。

既習の知識から試行錯誤しながら解いていく姿勢でなく、正しい解き方・考え方を求め、教科書を見たり、友達に聞いたりしている。自分で作り出すことを促す必要がある。

発表するときに、色を使って図で説明したり、自分で文字を使って説明したりすることを促す必要がある。

生徒がノートをどうとってよいか困っていた。問題を解くことでつくり上げたことが何であるか分かる板書を教師がしなくてはいけない。生徒に発表を全部任せるのではなく、板書に参加しながら進めることも1つの方法である。

## 3-3 実践事例②

### 第2学年 「図形の調べ方」

本時のねらい 多角形の内角の和を求めることができる。

#### ア 期待される数学的活動の様相

A：三角形の内角の和を、実測や、切り取ったり折ったりして集めて求める。

B：三角形の内角の和が180度になることの理由を説明する。

C：三角形の外角と内角の関係に気づく。

#### イ 学習過程

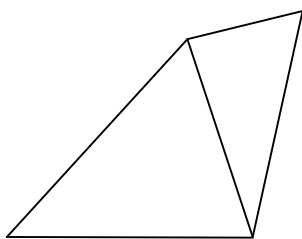
##### 【問題提示場面】

【問題の提示】①ノートに四角形、五角形、六角形を書いてみよう。②どんな問題ができるだろう。

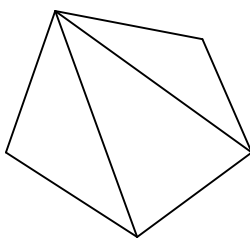
③内角の和はそれぞれ何度になるだろう。

**【期待する活動 A】**

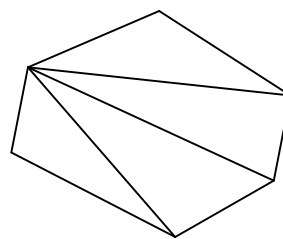
四角形、五角形、六角形を三角形に分割し、内角の和を求める。



$$180^\circ \times 2 = 360^\circ$$



$$180^\circ \times 3 = 540^\circ$$



$$180^\circ \times 4 = 720^\circ$$

〈支援1〉規則性があるだろうか。

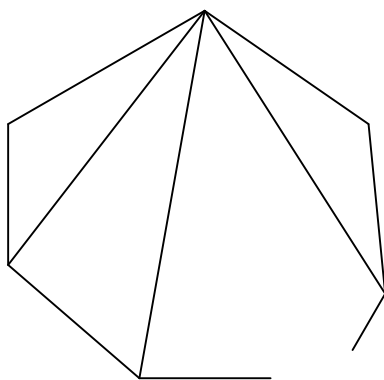
〈支援2〉 $n$ 角形の場合はどうなるだろう。

〈支援の意図〉規則性に気づき、 $n$ 角形の内角の和を求める式を導き出せるようにしたい。

〈評価〉四角形、五角形、六角形の内角の和を求めることができたか。

**【期待する活動 B】**

四角形、五角形、六角形の内角の和の求めるときに用いた考え方を  $n$  角形にも当てはめ、内角を求める式を作ることができる。



$n$  角形

1つの頂点からひいた対角線によって  
( $n-2$ ) 個の三角形に分けられる。

よって、 $n$  角形の内角の和は

$$180^\circ \times (n-2)$$

である。

〈支援〉三角形に分割した線はどの点からのびているか、その点の位置を変えた図で説明できないだろうか。

〈支援の意図〉他の分割のしかたでも説明できることに気づかせたい。

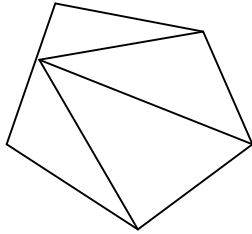
〈評価〉 $n$  角形の内角を求める式を作ることができたか。

〈評価〉表を作り、規則性を見つけようとしたか。

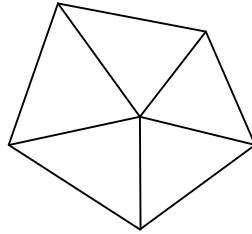


**【期待する活動 C】**

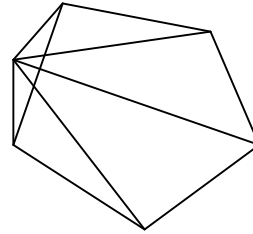
1点と各頂点を結んだ線分で三角形に分割して内角の和を求めることができ、さらに、その1点の位置を変えて求めようとする。



$$180 \times 4 - 180 = 540$$



$$180 \times 5 - 360 = 540$$



$$180 \times 4 - 180 = 540$$

**【集団による課題の検討】**

〈活動〉 四角形、五角形、六角形の内角の和の求め方を発表する。

〈活動〉 規則性を見つけ、 $n$ 角形の内角の和を求める式を作る。

〈活動〉 三角形に分割する図を、他にも考え、式を作る。

〈支援〉 三角形に分割した線はどの点からのびているか、その点の位置を変えた図で説明できないだろうか。

〈支援の意図〉 1点から各頂点にのびた線分で、三角形に分割され、その1点を移動した図で内角の和を求める式が導けるようにしたい。

**【評価問題】教科書 P89**

問4 十角形の内角の和は何度ですか。

また、正十角形の1つの内角の大きさは何度ですか。

問5 内角の和が次のようになる多角形は何角形ですか。

(1)  $900^\circ$

(2)  $1800^\circ$

ウ 授業の様子

・問題提示

四角形、五角形、六角形をノートにかく。二十角形をかこうとすると大変である。これらの多角形の内角の和は何度になるか考える。

・自力解決

三角形に分けて考えることに気づかない生徒は、なかなか先に進まなかった。三角形に分けて考えるように言うと、角度を求めていた。

四角形、五角形、六角形は容易に求めることができるが、かいた図を基にして考えることが難しい二十角形で、苦労していた。

・練り上げ

二十角形で、 $180^\circ \times 20$ としていたが、他の生徒がすかさず、多すぎるので、 $360^\circ$ をひけばよいと発表した。

四角形、五角形、六角形で規則性を見つけ、それを用いて二十角形の場合を求めるとき、表を活用していれば理解が深まった。

他の解法についても触れたが、生徒は混乱してしまったようである。

・評価問題

練り上げた結果を活用する生徒と、練り上げた過程を用いて解こうとする生徒に分かれた。どちらの方法も発表した。

エ 数学科教員（3名）による抽出生徒（3名）の観察

〈抽出生徒A（解決にあたっては教師の補助が必要であるような生徒）の活動の様子〉

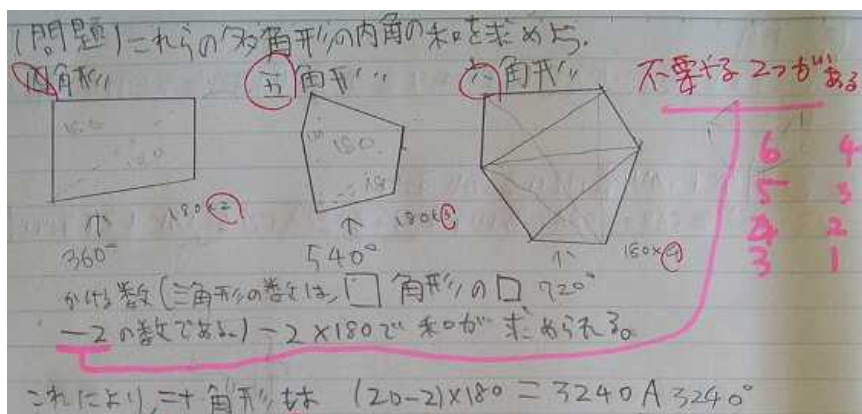
始め、角の和が何度になるかわからないでいた。「三角形が何個できる？」と教師に言われた後、四角形、五角形、六角形の内角の和を求めていた。二十角形の内角の和を出すところでとまってしまった。

〈抽出生徒B（試行錯誤しながら解決できる生徒）の活動の様子〉

自分で四角形、五角形、六角形の内角の和を求めていた。二十角形の内角の和も出していた。 $n$ 角形の内角の和が $180^\circ \times (n - 2)$ であることを発表した。多角形内部の点から頂点にひいた線で三角形に分ける方法では $n$ 角形の内角の和を求める式が $180^\circ \times n - 360^\circ$ になるという説明のときは首をかしげながら聞いていた。

〈抽出生徒C（手際よいと思われる方法から解決でき、自分の解決したことを確かめることができる生徒）の活動の様子〉

スムーズに三角形に分けて考えていっていた。 $n$ 角形なら $n - 2$ 個の三角形ができるから、内角の和の式は $(n - 2) \times 180^\circ$ であると一般化もできていた。他の方法でも考えてみようとして教師に声をかけられ、四角形に分けて考えていたが、なかなか先に進まなかった。多角形内部の点から頂点にひいた線で三角形に分ける方法もあることを聞いて、すぐに計算式を作り出していた。



オ 考察

かくことが難しい二十角形は、規則性が見つけられないと内角の和を求めることが難しく、その規則性を見つけることが $n$ 角形の内角の和を求める式につながる。

他の考えが出にくい問題であり、自力解決の時間を少なめにして、発展させる時間を確保したほうが良かった。その時間で、多角形の内部の点から引いた線分で三角形に分ける場合、多角形の辺上の点から引いた線分で三角形分ける場合、さらに多角形の外部の点から引いた線分で三角形に分ける場合を考えさせるようにすればよかった。

練り上げた結果を活用する生徒と、練り上げた過程を用いて解こうとする生徒に分かれたことは、予想外であった。授業では、どちらも解ける、どちらもよい方法であるとまとめたが、後に使うときは練り上げた結果を活用する方が使いやすいと思われる。このようなときの対処はどのようにすればよいか、疑問が残った。

### 3-4 実践事例③

第2学年2組 「図形の調べ方」

本時のねらい 多角形の外角を求めることができる。

ア 期待される数学的活動の様相

A：三角形の外角の和を実測や、切り取って集めることで求める。

B：三角形の外角の和が180度になることの理由を説明する。

C：三角形の外角の和の求めるときに用いた考え方を四角形、五角形、六角形…、n角形にも当てはめ、外角の和を求める。

イ 学習過程

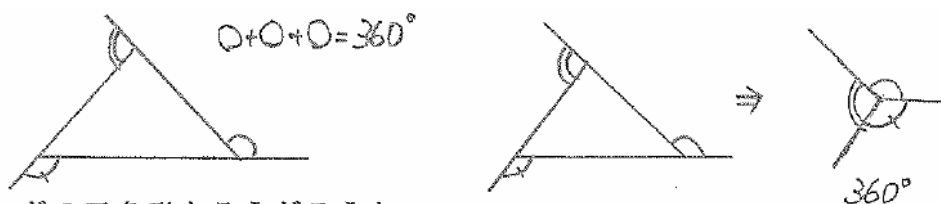
#### 【問題提示場面】

- 【問題の提示】
- ①ノートに三角形とその外角を1つ書いてみよう。
  - ②三角形に外角はいくつあるだろう。
  - ③どんな問題ができるだろう。
  - ④外角を3つ書き、3つの外角の和は何度になるか考えよう。



#### 【期待する活動A】

三角形の外角の和を実測や、切り取って集めることで求める。

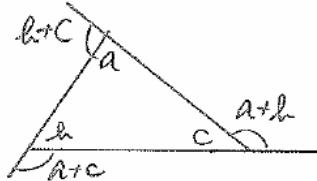


(支援) どの三角形もそうだろうか。

【期待する活動 B】

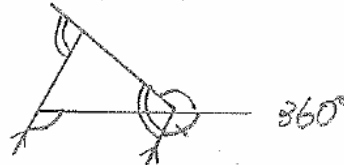
三角形の外角の和が360度になることの理由を説明する。

①外角を内角の和で表す。

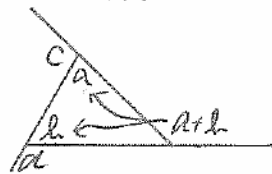


$$\begin{aligned} & (b+c) + (a+c) + (a+b) \\ & \Rightarrow (a+b+c) \\ & = 2 \times 180^\circ \\ & = 360^\circ \end{aligned}$$

②1つの頂点に集める。(平行線と角)



③2つの頂点に集める。(外角を2つの内角に分割する)



$$\begin{aligned} & (a+b) + c + d \\ & = (a+c) + (b+d) \\ & = 180^\circ + 180^\circ \\ & = 360^\circ \end{aligned}$$

④内角と外角をたす。



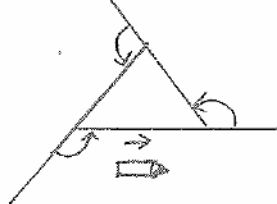
$$\begin{aligned} & \square + \blacksquare = 180^\circ \\ & 180^\circ \times 3 - 180^\circ \\ & = 360^\circ \end{aligned}$$

⑤内角とその対頂角、外角とその対頂角の4角をたす。



$$\begin{aligned} & 360^\circ \times 3 - 180^\circ \times 2 \\ & = 720^\circ \\ & \frac{720^\circ}{2} = 360^\circ \end{aligned}$$

⑥周上を一周する。(鉛筆をでたどる)



1周して同じ方向になる。  
↓  
360°

〈支援1〉根拠に用いたことがらは何だろう。

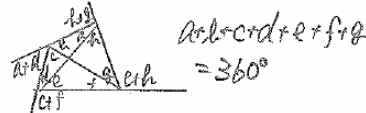
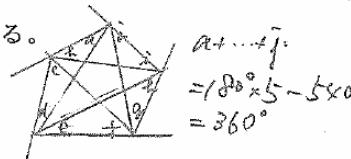
〈支援2〉四角形、五角形、六角形…、n角形の外角の和は何度だろう。

〈支援の意図〉考えたことをふり返らせ、さらに発展させることにつなげる。


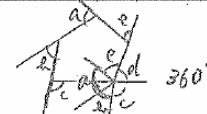
〈評価〉三角形の外角の和を求めることが説明できたか。

【期待する活動 C】



三角形の外角の和の求めるときに用いた考え方を四角形、五角形、六角形…、n 角形にも当てはめ、外角の和を求める。

①   $a+b+c = 360^\circ$    $a+b+c+d+e = 180^\circ \times 5 - 5 \times 90^\circ = 360^\circ$

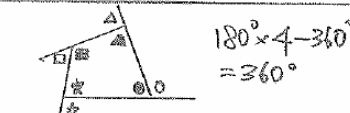
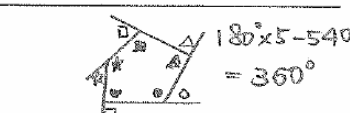
---

②   $360^\circ$    $360^\circ$

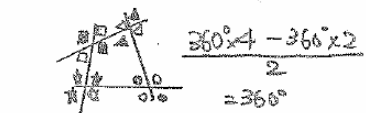

---

③   $180^\circ \times 2 = 360^\circ$    $180^\circ \times 2 = 360^\circ$

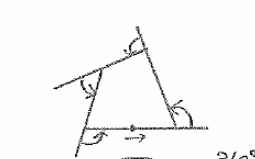
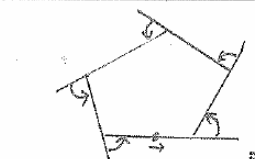
---

④   $180^\circ \times 4 - 360^\circ = 360^\circ$    $180^\circ \times 5 - 540^\circ = 360^\circ$

---

⑤   $\frac{360^\circ \times 4 - 360^\circ \times 2}{2} = 360^\circ$    $\frac{360^\circ \times 5 - 540^\circ \times 2}{2} = 360^\circ$

---

⑥   $360^\circ$    $360^\circ$

【集団による課題の検討】

〈活動〉 三角形の外角の和の求め方を発表する。

〈活動〉 四角形、五角形、六角形…、n 角形の外角の和を求める。

〈支援〉 どの考え方を使っているだろう。

〈支援の意図〉 解法がたくさんあり、それぞれの方法で多角形について説明ができることに気づかせたい。

【評価問題】

1 つの頂点における内角と外角の比が 3 : 2 である正多角形は正何角形でしょう。

ウ 授業の様子

・ 前時の復習

多角形の内角の和を求める問題をした。多くの生徒が多角形の内角の和を求める式を活用していた。

・ 問題提示

問題は、「三角形、四角形、五角形、二十角形の外角の和を求める」ことである。

外角の和とはどこの角の和であるかを確認した。

・自力解決

前回学習した多角形の内角の和と1つの頂点における外角と内角の和は $180^\circ$ であることを使うことに気づいた生徒は、二十角形の場合も解いていた。

多様な解決を見つけられる生徒は少なかったが、熱心に考えていた。

・練り上げ

考え方を式で表現した生徒、同じ考え方を文章で表現した生徒、正三角形という特別な場合で考えた生徒の3名を指名し、発表させた。

エ その他の考え方をした生徒に気づかず、教師が他の考え方を紹介してしまった  
エ 数学科教員（2名）による抽出生徒（2名）の観察と特徴的な解き方をした生徒の様子

〈抽出生徒B（試行錯誤しながら解決できる生徒）の活動の様子〉

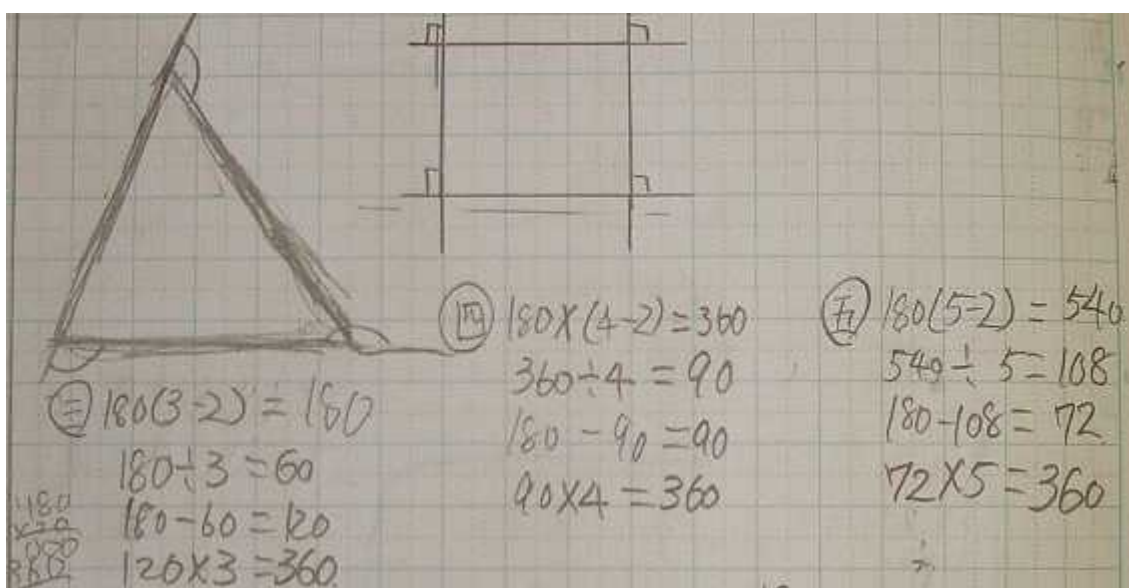
周りの生徒のノートを見て、三角形の図に記号を記入し、 $180^\circ \times 3 - 180^\circ$ の式を作っていた。

〈抽出生徒C（手際よいと思われる方法から解決でき、自分の解決したことを確かめることができる生徒）の活動の様子〉

外角の和を求める式を三角形から順番に $180^\circ \times 3 - 180^\circ$ 、 $180^\circ \times 4 - 360^\circ$ 、 $180^\circ \times 5 - 540^\circ$ と書き出していた。

〈特徴的な解き方をした生徒1の様子〉

正三角形の1つの内角が $60^\circ$ であることを求め、外角が $120^\circ$ になるから、それを3倍して $360^\circ$ であることを求めた。四角形や五角形の時も同様にして正方形や正五角形で考えて求めていた。



〈特徴的な解き方をした生徒2の様子〉

三角形の内角を $20^\circ$ 、 $70^\circ$ 、 $90^\circ$ と自分でおいて外角の大きさを出して和を求めた。その後いろいろ内角の大きさを変えて計算してみた。

〈特徴的な解き方をした生徒3の様子〉

外角の和を求める式を三角形から順番に  $180^\circ \times 3 - 180^\circ$ 、 $180^\circ \times 4 - 180^\circ$ 、 $180^\circ \times 5 - 180^\circ$  と書き出した。予想していた答えにならなかったため、実際に四角形をかき、外角の大きさを分度器で測り、360のなることを確かめ、立式の誤りを探していた。

問題 次の多角形の外角の和を求めなさい。

三角形	四角形	五角形	二十角形
$(180 \times 3) - 180$ $= 540 - 180$ $= 360$	$(180 \times 4) - 180$ $= 720 - 180$ $= 540$	$(180 \times 5) - 180$ $= 900 - 180$ $= 720$	$(180 \times 20) - 180$ $= 3600 - 180$ $= 3420$
$180 \times (3 - 1)$ $= 180 \times 2$ $= 360$	$180 \times (4 - 1)$ $= 180 \times 3$ $= 540$	$180 \times (5 - 1)$ $= 180 \times 4$ $= 720$	$180 \times (20 - 1)$ $= 180 \times 19$ $= 3420$

答えは、**全て 360°!**

九角形の外角の和は **360°** である。

#### オ 考察

自分たちで既習知識を基につくり上げていこうという姿勢で取り組んでいる。すぐに分からなくても、ねばり強く取り組んでいる。

文字で説明したり、文章で説明したりすることが増えた。

自力解決のとき教師が発表者を決め、板書を始めた。練り上げで取り上げたい内容を意図して指名した。ただし、意図した練り上げの後にさらに他の解き方がないか生徒に尋ねるべきであった。

発表生徒に教師が関わった。式の中の数字が図ではどこになるかわかり易くするために、教師が数字に色チョークで下線を引き、生徒に同じ色で図の中に示してもらった。他の数字も同じようにした。この生徒は、感想に「説明がちゃんとできなかった。練習したい」と書いていた。より分かり易い説明をすることへと意識が高まったといえる。

多様な解決ができる問題であり、生徒が熱心に考えていた。解決したことを活用する練習もしたかったが、その時間がなかった。

## 第4章 開発教材事例「正方形の作図を利用した平方根の導入」

### 4-1 平方根を学ぶ上での困難さの分析

生徒が平方根を学ぶ上で次のような困難があると考ええる。

平方根を学ぶ上での困難さ

- ①正の数の平方根は、有理数であるものと無理数であるものがあること
- ②無理数そのものの理解の難しさ
- ③ある1つの正の数の平方根は、正負の2つあること
- ④定義の複雑さ
- ⑤ある数を2乗するとどのように変わるかという認識の乏しさ

#### ①正の数の平方根は、有理数であるものと無理数であるものがあること

数の拡張は、第1学年で負の数を学習することで、有理数全体を学んだことになる。第3学年でさらに無理数にまで拡張することを目的に、平方根を学習すると捉えるよりは、二次方程式 $x^2 = a(a > 0)$ の解を表すことが可能になるために、平方根を学習する必要があると捉えるほうが妥当であると考ええる。新しい数の捉え方として平方根を導入すると、「正の数 $a$ の平方根は2乗すると $a$ になる数である」という定義により、これまでに学習している有理数になるものと、そうでない無理数とになるものがあるのである。つまり、新しい数の捉え方を取り入れると、その中に既習部分と未習部分が混在しているである。

#### ②無理数そのものの理解の難しさ

歴史を見ると、無理量の発見は古代ギリシアであると言われている。古代ギリシアには、無理数という概念はないが、ピュタゴラス学派が正方形の1辺と対角線の長さの比を $m:n$ という自然数の比で表すことができないことを知っていたことによる。

「1辺が1の正方形の対角線の長さを、正方形の1辺を $m$ 等分して $n$ 倍( $m, n$ は自然数)した長さと比べるとする。 $m$ をどんなに大きくして正方形の辺を小さく等分していったとしてもピッタリになることはない。」このことを納得する中学生はどのくらいいるだろうか。 $m$ を大きくしていけばいつかはぴったりになるだろうと考える中学生がほとんどであると思う。このように無理数そのものの理解の難しさ、言い換えれば教材の持つ困難さがあるといえる。

#### ③ある1つの正の数の平方根は、正負の2つあること

「正の数 $a$ の平方根は2乗すると $a$ になる数である」という定義により、ある1つの正の数の平方根は、正負の2つあることになる。単に負の数になるときを忘れることがあということだけでなく、①の正の数の平方根は、有理数であるものと無理数であるものがあることにより、さらに複雑になっていることが考えられる。

#### ④定義の複雑さ

「正の数 $a$ の平方根は2乗すると $a$ になる数である」という定義は言い換えれば「正の数 $a$ の平方根は2乗すると $a$ になるもとの数である」といなる。2乗するという演算の結果が $a$ になるようなもとの数を考えなくてはいけないのである。ある演算の結果



は考え易いが、その演算の結果からさかのぼって考えることは大変であると思われる。さらにその演算が2乗であることも大いに関係していると思われる。

「2乗すると2になる数を2乗すると何になるか」という問いに対して答えられない生徒もこの定義の複雑さによると考えられる。

#### ⑤ある数を2乗するとどのように変わるかという認識の乏しさ

関数  $y = x^2$  は、平方根の学習より後に学習することである。グラフが放物線になり、変化の様子を詳しく知ることになる。正の数の範囲で2乗される数が1ずつ大きくなるときその結果は一定量ずつ大きくなるのではなく、増加量が次第に増えていくのである。このことを知らなかったり、あまり意識することがなかったりすると考えられる。これは、

$\sqrt{a}$  ( $a > 0$ ) において  $a$  が1ずつ大きくなるとき  $\sqrt{a}$  は一定量大きくなるのではなく、

増加量は次第に少なくなっていくのである。これらのことを知っていない、または学習していないことが平方根の理解に影響していると考えられる。

### 4-2 これまでの指導から改善すべき点

数を無理数の範囲に拡張するという目的でなく、二次方程式  $x^2 = a$  ( $a > 0$ ) の解を表すことを可能にするという目的のために、平方根を学習する必要がある。そのために、面積が  $a$  ( $a > 0$ ) の正方形の1辺の長さを考えることはとてもよい方法である。教科書においても発行6社すべてが、方眼紙を利用したり、格子点を利用したりの違いはあるが、正方形を描き、その1辺の長さを考えることをしている。しかし、方眼紙、格子点を利用した作図では、3, 6, 7  $\text{cm}^2$  の正方形を描くことができない。方眼紙を利用した作図では、3, 6, 7  $\text{cm}^2$  の正方形がかかれぬまま学習は進んでいく。描かれている正方形を例にして、新しい数の導入につなげ、平方根を定義し、その特徴等について学んでいく。その中で、

$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$  cm は作図から実施の長さとしてどのくらいの量であるか視覚的に分かるが、

$\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$  cm は作図されておらず、触れられないままである。この点を改善すべき点と考え、「面積が 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10  $\text{cm}^2$ , … の正方形をかく」ことをしていくべきであると考えた。

### 4-3 教材の開発とその教材を用いた指導の利点

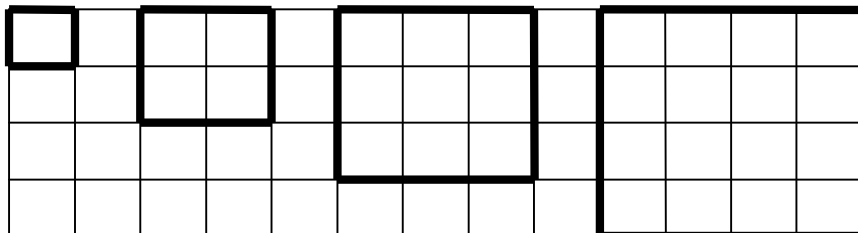
教材開発に向けてまず、方眼紙、格子点を利用した作図では、3, 6, 7  $\text{cm}^2$  の正方形が描くことができないことについて考えた（教材研究1）。

(教材研究 1) 方眼紙を利用した作図

正方形の 1 辺の長さを  $n \text{ cm}$  とする。

①正方形の 1 辺を方眼の縦 (または横) にとったとき

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$  となり、正方形の面積は  $1, 4, 9, 16, \dots$  (平方数) である。



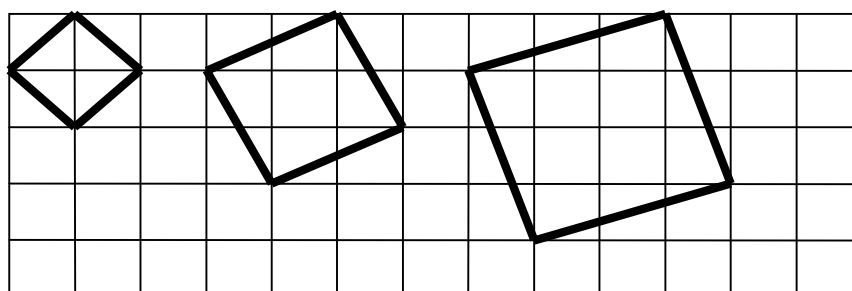
②正方形の 1 辺を方眼の斜め (長方形の対角線) にとったとき

長方形の縦、横をそれぞれ  $a \text{ cm}$ ,  $b \text{ cm}$  としたとき、その長方形の対角線を 1 辺とする正方形の面積を  $(a, b) \text{ cm}^2$  と表すとすると

$$(1, 1) = 2, \quad (1, 2) = 5,$$

$$(1, 3) = 10, \quad (1, 4) = 17,$$

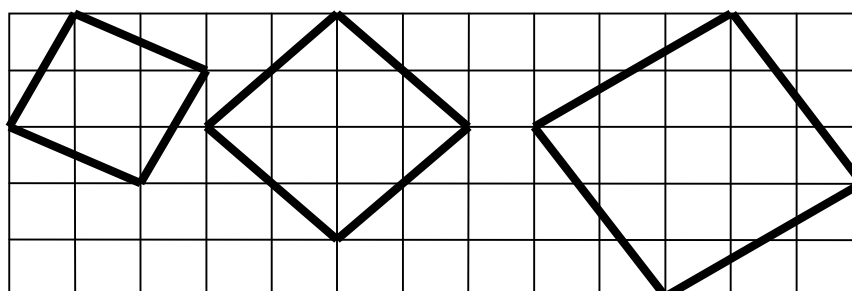
$$(1, 5) = 26,$$



$$(2, 1) = 5, \quad (2, 2) = 8,$$

$$(2, 3) = 13, \quad (2, 4) = 20,$$

$$(2, 5) = 29,$$

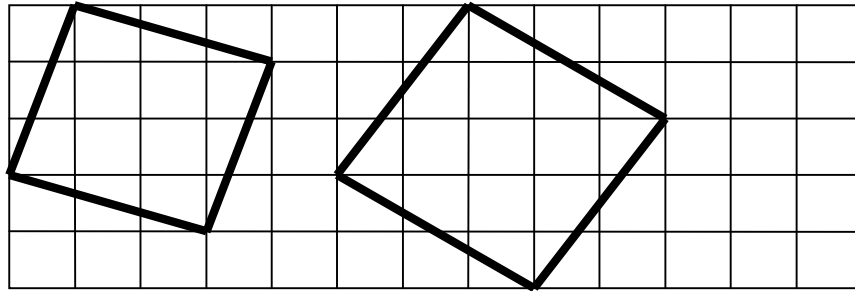


$$(3, 1) = 10, \quad (3, 2) = 13,$$

$$(3, 3) = 18, \quad (3, 4) = 25,$$

$$(3, 5) = 34,$$

となる。



①,②をまとめると

方眼紙を利用した作図でできる正方形の面積は  $a^2 + b^2$  ( $a$  は自然数、 $b$  は 0 または自然数) である。

よって、方眼紙を利用した作図では、面積が 3, 6, 7  $\text{cm}^2$  の正方形はかけない。

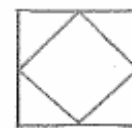
(注：後で、三平方の定理を用いればあっさりと言明できることに気がつきました。)

次に「面積が 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10  $\text{cm}^2$ ,…の正方形をかく方法」はないだろうかと考えた。三平方の定理を利用すればできるが、平方根の単元は 3 年生の 1 学期に学習し、三平方の定理はまだ学習していない。よって、三平方の定理を利用せず、生徒の既習の知識でかくことができる方法について考えた。

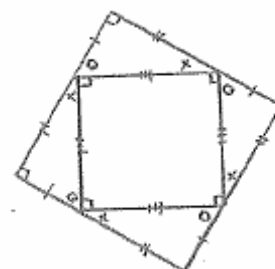
先行研究を参考にしながら、次のことが分かった。

(教材研究 2) 分かったこと

①正方形の各辺の中点を結ぶと正方形ができ、その面積はもとの正方形の半分である。逆にみれば、できた正方形の面積の 2 倍がもとの正方形の面積である。



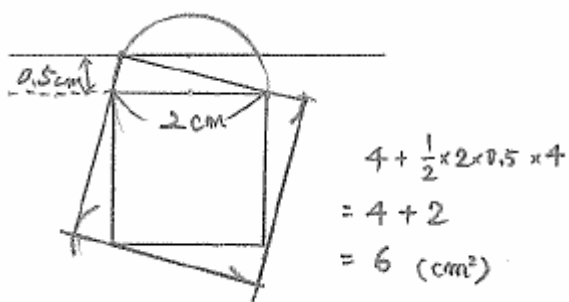
②正方形外側に正方形の各辺を斜辺とする 4 つの合同な直角三角形をかくと、正方形ができる。(証明省略)



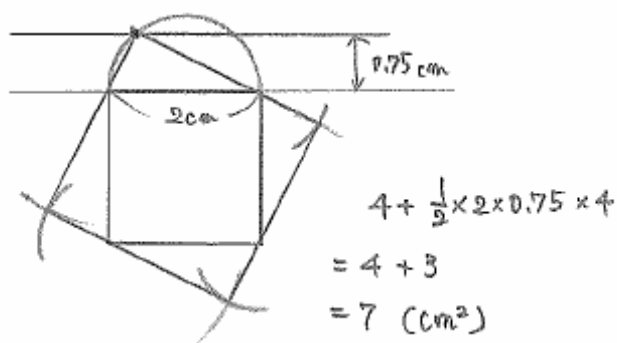
③正方形の1辺を直径とする円の周上の点と、その正方形の1辺の両端の点を結ぶと直角三角形ができる。



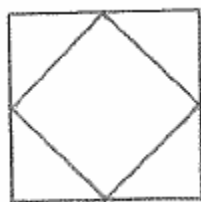
④  $4 \text{ cm}^2$ の正方形をもとに  $6 \text{ cm}^2$ の正方形をかくことができる。②により  $4 \text{ cm}^2$ の正方形の外側に  $0.5 \text{ cm}^2$ の直角三角形をかけばよい。 $4 \text{ cm}^2$ の正方形の1辺(2 cm)から  $0.5 \text{ cm}$ の距離にある平行線をかく。 $4 \text{ cm}^2$ の正方形の1辺を直径とする円をかく。③により、平行線と円の交点と、 $4 \text{ cm}^2$ の正方形の1辺の両端の点を結ぶと直角三角形ができる。この直角三角形と合同な直角三角形を  $4 \text{ cm}^2$ の正方形の1辺の外側にかくと、 $6 \text{ cm}^2$ の正方形ができる。



⑤④の作図において、 $4 \text{ cm}^2$ の正方形の1辺と平行線との距離を  $0.75 \text{ cm}$ にすると、 $7 \text{ cm}^2$ の正方形をかくことができる。



⑥①により、 $6 \text{ cm}^2$ の正方形をもとに  $3 \text{ cm}^2$ の正方形をかくことができる。



このことにより  $3$ ,  $6$ ,  $7 \text{ cm}^2$ の正方形をかくことができ、 $1 \text{ cm}^2$ から  $10 \text{ cm}^2$ の正方形はかけることとなった。しかし、(教材研究2) ④の  $4 \text{ cm}^2$ の正方形をもとに  $6 \text{ cm}$

$2$ の正方形をかく方法では、 $3\text{ cm}^2$ の正方形をかくことができない。もとになる $2\text{ cm}^2$ の1辺の長さが $\sqrt{2}\text{ cm}$ と無理数になるため、 $2\text{ cm}^2$ の正方形の1辺と平行線との距離を $\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ cm}$ と無理数にしなくてはならないからである。

そこでさらに、面積が $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\text{ cm}^2, \dots$ の正方形のどれにも通用するような方法はないかと考えた。

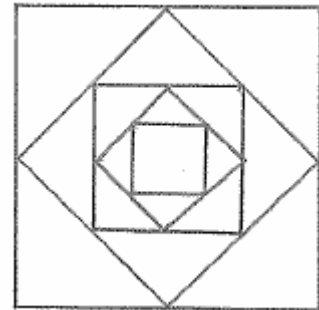
(教材研究3) 「面積が  $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\text{ cm}^2, \dots$ の正方形をかく方法」

①<もとの正方形の2倍の面積をもつ正方形をつくる>

もとの正方形の1辺を直径とする円と、もとの正方形の1辺の垂直二等分線との交点をとる。その交点ともとの正方形の1辺の両端の点を結ぶと直角二等辺三角形ができる。この直角二等辺三角形をもとの正方形の他の辺からもかくと、もとの正方形の2倍の面積をもつ正方形がかける。よって、

$$1\text{ cm}^2 \rightarrow 2\text{ cm}^2 \rightarrow 4\text{ cm}^2 \rightarrow 8\text{ cm}^2 \rightarrow 16\text{ cm}^2 \rightarrow \dots$$

とかける。

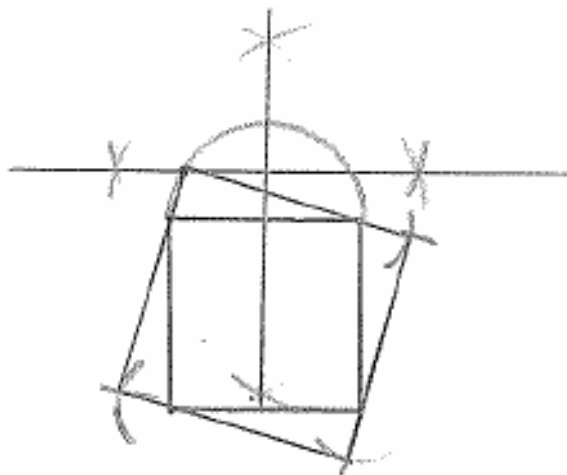


②<もとの正方形の1.5倍の面積をもつ正方形をつくる>

①においてかいた直角二等辺三角形の斜辺を底辺と見たときの高さとなる線分の垂直二等分線をかき(高さを半分にする)。この垂直二等分線ともとの正方形の1辺を直径とする円との交点をとる。その交点ともとの正方形の1辺の両端の点を結ぶと直角三角形ができる。この直角三角形をもとの正方形の他の辺からもかくと、もとの正方形の1.5倍の面積をもつ正方形がかける。よって、

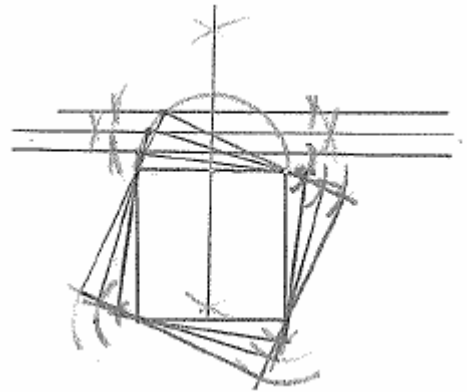
$$2\text{ cm}^2 \rightarrow 3\text{ cm}^2, 4\text{ cm}^2 \rightarrow 6\text{ cm}^2, 8\text{ cm}^2 \rightarrow 12\text{ cm}^2, \dots$$

とかける。



③<もとの正方形の1.25倍, 1.75倍の面積をもつ正方形をつくる>

①においてかいた直角二等辺三角形の斜辺を底辺と見たときの高さとなる線分の垂直二等分線をかく（高さを半分にする）。さらに、高さが2等分されたそれぞれの線分の垂直二等分線をかく（高さを4等分にする）。これらの垂直二等分線ともとの正方形の1辺を直径とする円との交点をとる。その交点ともとの正方形の1辺の両端の点を結ぶと直角三角形ができる。この直角三角形をもとの正方形の他の辺からもかくと、もとの正方形の1.25倍, 1.75倍の面積をもつ正方形がかける。



$$4 \text{ cm}^2 \rightarrow 5 \text{ cm}^2, 7 \text{ cm}^2, 8 \text{ cm}^2 \rightarrow 10 \text{ cm}^2, 14 \text{ cm}^2$$

④①においてかいた直角二等辺三角形の斜辺を底辺と見たときの高さとなる線分を8等分、16等分、32等分するように垂直二等分線をかいていけば、さらに正方形がつけられる。

よって、面積が  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \text{ cm}^2, \dots$  の正方形がかける。

2倍	2倍	2倍	2倍
$1 \text{ cm}^2 \rightarrow 2 \text{ cm}^2$	$\rightarrow 4 \text{ cm}^2$	$\rightarrow 8 \text{ cm}^2$	$\rightarrow 16 \text{ cm}^2$
↓	↓	↓	
$3 \text{ cm}^2$	$5 \text{ cm}^2$	$9 \text{ cm}^2$	
	$6 \text{ cm}^2$	$10 \text{ cm}^2$	
	$7 \text{ cm}^2$	$11 \text{ cm}^2$	
		$12 \text{ cm}^2$	
		$13 \text{ cm}^2$	
		$14 \text{ cm}^2$	
		$15 \text{ cm}^2$	

この方法により、 $3, 6, 7 \text{ cm}^2$ の正方形をかくことができ、さらに $10 \text{ cm}^2$ 以上の正方形もずっとかくことができる。面積が $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \text{ cm}^2$ の正方形がかけているのだから、 $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10} \text{ cm}$ の長さの線分がかかれていることになる。

この作図方法を導入に用いることによる平方根を学ぶ上での困難さ（以下、困難さ）の克服については次のように考える。

困難さ①正の数の平方根は、有理数であるものと無理数であるものがあることの克服

正の数の平方根は、有理数であるものと無理数であるものがあることはさけることができない。しかし、正の数の平方根を根号を用いて表す約束をするとき、

$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$  cmの長さの線分がかかっていると平方根の

表し方が一連のつながりを持って理解できることになり、その中で根号を用いなくても表せる場合もあることは、正方形の1辺の長さであるから図形を見ると容易に理解できるといえる。根号を用いなくても表せる場合もあることは、平方根の意味を考えれば分かることであるが、図形を見ても言えることで

理解が深まると考える。

困難さ②無理数そのものの理解の難しさの克服

この克服については、上越教育大学教授岩崎氏が論文「 $\sqrt{2}$ の無理数性の認識について」の中でユークリッドの互助法による方法と背理法による方法の2つを述べ、優れた実践がなされている。本研究の正方形の作図を利用した指導では、無理数性については追求していない。したがって、困難の克服というよりは困難の回避になってしまっている。しかし、平方根の導入の段階では、1辺の長さが無理数の場合、1辺の長さを求めてから作図することはできないので、有理数の場合と違って工夫が必要になる。1辺の長さを求めてから作図することはできないことを経験すること自体が、無理数性の認識はなくとも価値あることだと考える。

困難③ある1つの正の数の平方根は、正負の2つあることの克服

作図をして $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$  cmの長さの線分を描き、それを表すために根号を用いることを約束する。このように、量(長さ)としての平方根、正の方だけを始めに取り上げる。そして大小関係、近似値を考えるとときもしばらくは長さとして正の方だけを扱う。その後、平方根の定義をして、負の方もあることを学ぶようにする。これは、有理数において、正の方は小学校、負の方は中学校で学ぶという順序と似ており、理解がし易いと考える。

困難④定義の複雑さの克服

困難③の克服の中で述べたように、定義をしてから平方根を学んでいくのではなく、定義は比較的に持ってくることで困難さが軽減できると考える。また、式や文章で定義するだけでなく、図形でも考えることで平方根の理解が容易になると考える。

困難⑤ある数を2乗するとどのように変わるかという認識の乏しさの克服

作図において1辺の長さを1, 2, 3 cm…とすると正方形の面積は1, 4, 9  $\text{cm}^2$ …となる。 $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$  cmの長さの線分を描いたとき、根号の中が1ずつ増加すると線分の長さの増加する量は少なくなっていくことが目の前に現れてくる。これらを経験することが大いに役に立つと考える。

#### 4-4 開発した教材を利用した指導計画

正方形の作図を平方根の導入で用いて、困難の克服を意図して指導計画を従来のものから変えていく。

従来の指導の流れ

- ①正方形の1辺の長さを考える
- ②平方根の定義
- ③平方根の表し方（根号）
- ④平方根の大小
- ⑤平方根の値

正方形の作図を利用した指導の流れ



- ①正方形作図
- ② "
- ③平方根の表し方（根号）
- 平方根の大小
- ④平方根の値
- 平方根の定義
- ⑤練習問題

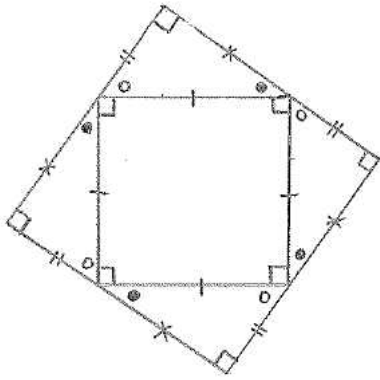
#### 指導計画

時間	ねらい	おもな発問
第 1 次	1 平方根（5時間） ①②いろいろな面積の正方形の作図を考え、それを通して平方根の必要性・意味・大小について理解をすることが容易になる。 ＜本時＞	◎面積が $1\text{ cm}^2$ 、 $2\text{ cm}^2$ 、 $3\text{ cm}^2$ 、 $4\text{ cm}^2$ 、 $5\text{ cm}^2$ 、 $6\text{ cm}^2$ 、 $7\text{ cm}^2$ 、 $8\text{ cm}^2$ 、 $9\text{ cm}^2$ 、 $10\text{ cm}^2$ 、…の正方形を作図しよう。
	③平方根の表し方の約束をし、平方根の大小を知る。	◎面積が $2\text{ cm}^2$ の正方形の1辺の長さを求めてみよう。
	④平方根の定義を知り、根号を使って表すことができる。	◎ $x^2=2$ にあてはまる数を求めよう。
	⑤練習問題	
第 2 次	2 根号をふくむ式の計算（7時間）	
問題	3 章末（2時間）	

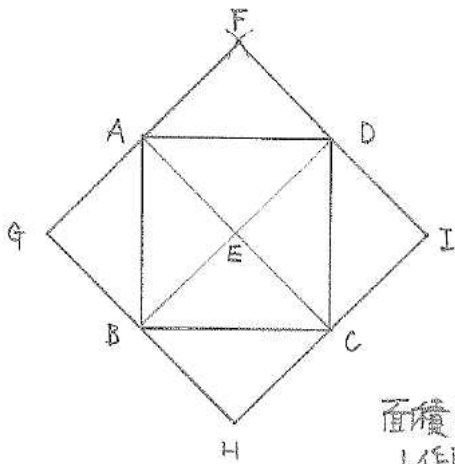
#### 4-5 作図の考え方・流れと学習指導案



## <作図の考え方・流れ>



左の図のように正方形の外側に4つの合同な直角三角形をかくと外側の図形は正方形になる。(証明略)

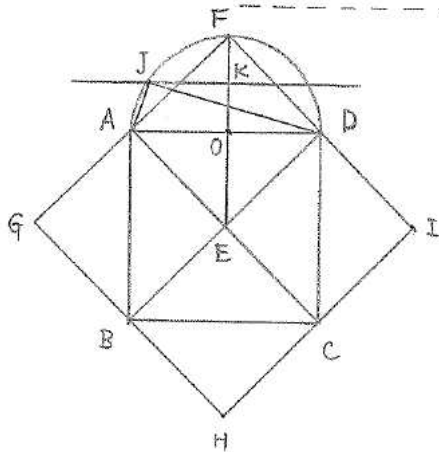


### <作図>

- ① 正方形ABCDの対角線をひき交点をEとする。  
A, Dを中心として半径AEの円をかき、  
交点をFとする。AF, FDをひく。  
同様に、左図のようにG, H, Iをひく。  
GA, GB, HB, HI, IC, IDをひく。

※ 四角形FGHIは正方形で、  
面積は、正方形ABCDの2倍になっている。

面積  $1\text{cm}^2 \rightarrow 2\text{cm}^2 \rightarrow 4\text{cm}^2 \rightarrow 8\text{cm}^2 \rightarrow 16\text{cm}^2 \rightarrow 32\text{cm}^2 \dots$   
と作図できる。



- ② EFをひきADとの交点をOとする。  
Oを中心として半径AOの円をかき、  
FOの垂線=等分線を引き、円O, FOとの交点を  
それぞれJ, Kとする。JA, JDをひく。

$\triangle FAD$ と $\triangle JAD$ において、ともに底辺をADとすると、  
高さが2:1だから、面積も2:1となる。

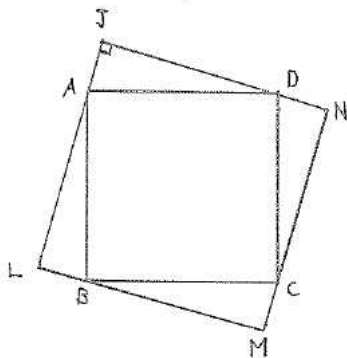
よって  $\triangle JAD = \frac{1}{2} \triangle FAD = \frac{1}{2} \triangle EAD$

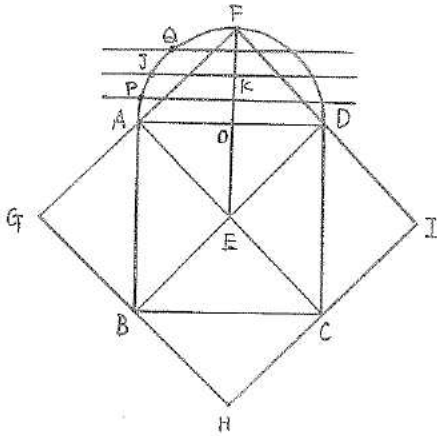
また、 $\triangle JAD$ は $\angle AJD = 90^\circ$ の直角三角形である。(円周角の定理)

- ③  $\triangle JAD \cong \triangle LBA \cong \triangle MCB \cong \triangle NDC$ となる点L,  
M, Nをとる。

四角形JLMNは、正方形で、面積は正方形ABCDの  
 $\frac{3}{2}$ 倍である。

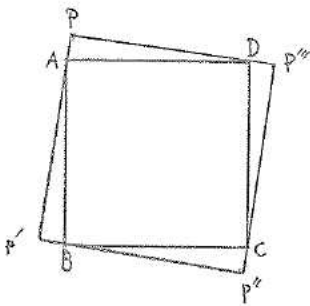
面積  $2\text{cm}^2 \rightarrow 3\text{cm}^2$ ,  $4\text{cm}^2 \rightarrow 6\text{cm}^2$ ,  $8\text{cm}^2 \rightarrow 12\text{cm}^2, \dots$   
と作図できる。





④ OKの垂直=等分線と円Oとの交点をP,  
FKの垂直=等分線と円Oとの交点をQとする。  
PA, PD, QA, QDをひく。

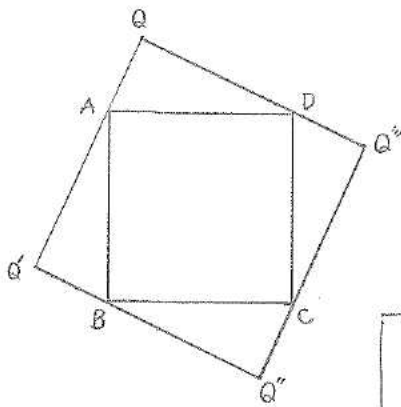
$$\begin{aligned} \Delta PAD &= \frac{1}{4} \Delta FAD = \frac{1}{4} \Delta EAD \\ \Delta QAD &= \frac{3}{4} \Delta FAD = \frac{3}{4} \Delta EAD \\ \angle APD &= \angle AQD = 90^\circ \end{aligned}$$



⑤  $\Delta PAD \equiv \Delta P'BA \equiv \Delta P''CB \equiv \Delta P'''DC$ となる点P',  
P'', P'''をとる。

正方形PP'P''P''' : 正方形ABCD = 5:4

面積  $4\text{cm}^2 \rightarrow 5\text{cm}^2, 8\text{cm}^2 \rightarrow 10\text{cm}^2, \dots$  が  
作図できる。

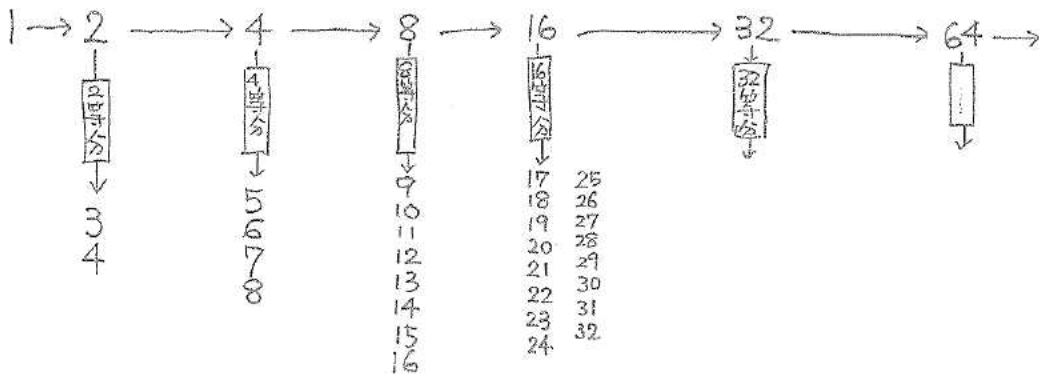


⑥  $\Delta QAD \equiv \Delta Q'BA \equiv \Delta Q''CB \equiv \Delta Q'''DC$ となる点Q',  
Q'', Q'''をとる。

正方形QQ'Q''Q''' : 正方形ABCD = 7:4

面積  $4\text{cm}^2 \rightarrow 7\text{cm}^2, 8\text{cm}^2 \rightarrow 14\text{cm}^2, \dots$  が作図できる。

FOを2等分, 4等分した。さらに8等分, 16等分, 32等分, ...  
していけば...



## 第3学年 数学科学習指導案

### 1 単元名 平方根

### 2 単元について

第1学年では、取り扱う数の範囲を正の数と負の数に拡張し、分数で表される数（有理数）の範囲で、正の数と負の数の意味を理解し、その四則計算ができるようになっていく。第2学年では、特に新しい数への拡張は行われず。しかし、文字式や方程式、関数についての学習を通して、数についての理解を一層深めている。

第3学年では、例えば、二次方程式を解く場合や、三平方の定理を利用して長さを求める場合には、有理数だけでは不十分であるので、数の範囲を、分数で表すことのできない数（無理数）にまで拡張しなければならない。このような数の必要性と意味を理解し、数の平方根を含む簡単な計算ができるようにすることをねらいとする。

実生活の中には、一辺の長さが有理数である正方形の対角線の長さのように、これまでの有理数では表すことができない量が存在している。また、数を平方することの逆演算を考えると、有理数だけではすべての解を表すことができない。このように、有理数で表されない数は、身近に存在している。その平方根を根号 $\sqrt{\quad}$ を用いて表すことによって、簡潔・明瞭に表現することができる。円周率 $3.14\dots$ を $\pi$ で表したのと同じように、数を $\sqrt{\quad}$ を用いて表現し、記号的に扱っていくのである。数の範囲を平方根に拡張することによって、二次方程式の解が得られるようになり、三平方の定理を利用して長さを求めることができるようになる。

数の平方根を含む式の計算は、交換、結合や分配の計算法則はそのまま成り立つ。数の平方根の乗法は $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 、除法は $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$  ( $a > 0, b > 0$ ) を基にして計算できる。

これに対して、加法、減法の場合は、乗法、除法とは異なっている。例えば、 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2+3}$ とはならない。また、 $\sqrt{2}+1$  や  $\sqrt{2}+\sqrt{3}$  などは、これ以上簡単には表せない数であり、それぞれ一つの無理数を表している。つまり、 $a, b$  が数を表すとき、 $a+1$  や  $a+b$  もそれぞれ一つの数を表すものと見ることができると同じように、これらの式における $\sqrt{2}$  や  $\sqrt{3}$  は、文字式の計算における文字  $a$  や  $b$  に似たものになっている。数の平方根を含む加法、減法の式では、普通その結果をできるだけ簡単な形にまとめるが、その際の考え方も文字式の場合と同様である。

指導にあたっては、いろいろな面積の正方形を作図することを通して、平方根の必要性・意味・大小について理解を容易にしていくようにしたい。そのとき、方眼紙を利用した作図では $3\text{ cm}^2$ 、 $6\text{ cm}^2$ 、 $7\text{ cm}^2$ の正方形はなかなかできない。従来はそれらの作図をすることなく $1\text{ cm}^2$ 、 $2\text{ cm}^2$ 、 $4\text{ cm}^2$ 、 $5\text{ cm}^2$ 、 $8\text{ cm}^2$ 、 $9\text{ cm}^2$ 、 $10\text{ cm}^2$ の正方形を例にしながら平方根の定義に移ってしまう。 $3\text{ cm}^2$ 、 $6\text{ cm}^2$ 、 $7\text{ cm}^2$ の正方形や $11\text{ cm}^2$ を超える正方形については取り上げていないことが多い。本指導ではそれらの作図についても取り扱い、任意の面積

を有する正方形の作図ができることを知り、その上で平方根の表し方を約束する。そして、平方根の負の方は、平方根の大小を学習した後で学習する。これは、正方形の一辺の長さ(量)として具体的に平方根をとらえ、正方形の面積と辺の長さの関係から平方根の大小を比較し、平方根の長さをより具体的にイメージしてつかんだ後、数としても捉えるために負の方を学習するという順をとったほうが、生徒の理解が深まると判断したからである。また、生徒が主体的に取り組むことを促すために、生徒の多様な考え方のよい点を明らかにしながら授業を進めて行きたい。

3 単元の目標

<p><b>【関心・意欲・態度】</b></p> <p>①平方根に関心を持って調べようとする。</p> <p>②根号をふくむ式の計算に取り組もうとする。</p> <p><b>【数学的な見方や考え方】</b></p> <p>①正方形の面積と1辺の長さの関係から、新しい数を見つけることができ、面積の大小から平方根の大小関係を導くことができる。</p> <p>②根号をふくむ式の計算は、交換、結合や分配の計算法則はそのまま成り立つことに気づき、<math>\sqrt{2}</math> や <math>\sqrt{3}</math> を文字式の計算における文字a,bと同じように考えることができる。</p> <p><b>【表現・処理】</b></p> <p>①数の平方根を求めたり、平方根の大小を不等号を用いて表したりすることができる。</p> <p>②根号をふくむ式の計算することができる。</p> <p><b>【知識・理解】</b></p> <p>①平方根の必要性や意味、根号の意味や使い方を理解している。</p> <p>②根号をふくむ式の和と差や、根号をふくむ式の積の計算について理解している。</p>
---

4 指導計画

時間	ねらい	おもな発問
第1次	<p>1 平方根 (5時間)</p> <p>①②いろいろな面積の正方形の作図を考え、それを通して平方根の必要性・意味・大小について理解をすることが容易になる。</p> <p style="text-align: center;">&lt;本時&gt;</p> <p>③平方根の表し方の約束をし、平方根の大小を知る。</p> <p>④平方根の定義を知り、根号を使って表すことができる。</p>	<p>◎面積が <math>1\text{cm}^2</math>、<math>2\text{cm}^2</math>、<math>3\text{cm}^2</math>、<math>4\text{cm}^2</math>、<math>5\text{cm}^2</math>、<math>6\text{cm}^2</math>、<math>7\text{cm}^2</math>、<math>8\text{cm}^2</math>、<math>9\text{cm}^2</math>、<math>10\text{cm}^2</math>、…の正方形を作図しよう。</p> <p>◎面積が <math>2\text{cm}^2</math> の正方形の1辺の長さを求めてみよう。</p> <p>◎ <math>x^2=2</math> にあてはまる数を求めよう。</p>

	⑤練習問題	
第 2 次	2 根号をふくむ式の計算（7時間）	
問題	3 章末（2時間）	

## 5 本時の学習

### (1) 本時の目標

いろいろな面積の正方形の作図を考え、それを通して平方根の必要性・意味・大小について理解をすることが容易になる。【数学的な見方・考え方】

### (2) 評価のための生徒の具体的な姿

十分満足できると判断される状況	概ね満足できると判断される状況	努力を要する生徒への手だて
2乗して整数になる量があることが分かる。	作図できた正方形を利用して、面積が $3\text{ cm}^2$ 、 $6\text{ cm}^2$ 、 $7\text{ cm}^2$ の正方形を作図することができる。	面積を計算するとき、正方形から直角三角形をひいて求める。このことを利用して、正方形の外側に正方形を作ることに注目させる。

### (3) 準備

方眼紙（1目盛り1cm）、コンパス、三角定規一組

### (4) 学習過程

学習活動	主発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点・評価
1 問題を把握する。	面積が $1\text{ cm}^2$ 、 $2\text{ cm}^2$ 、 $3\text{ cm}^2$ 、 $4\text{ cm}^2$ 、 $5\text{ cm}^2$ 、 $6\text{ cm}^2$ 、 $7\text{ cm}^2$ 、 $8\text{ cm}^2$ 、 $9\text{ cm}^2$ 、 $10\text{ cm}^2$ 、…の正方形を作図しよう。	机間指導で個別に助言や指導や評価をしていく。
2 自力解決をする。	<div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;">                     (1) 解決A                      (2) 解決B                      (3) 解決C-①                      (4) 解決C-②                      (5) 解決D                 </div>	
3 集団解決（練り上げ）をする。	互いの解決方法を発表し合う。 任意の面積を有する正方形の作図を導	

	<p>き出す。 正方形の一辺の長さはいくらか考える。</p>	<p>かけそうであることに気づかせたい。 作図が容易にできなかったことと正方形の一辺の長さを表すことの難しさとの関係に気づかせたい。</p>
--	------------------------------------	--

(5) 生徒に期待する活動と教師の支援の系統

活動：生徒の活動、支援：教師の支援

**【問題の提示】**  
面積が  $17\text{ cm}^2$  の正方形はかけるだろうか。

教師：(予想をさせ、) かけると思う人、かけないと思う人それぞれ挙手をさせる。  
 教師：それぞれの理由を尋ねる。  
 生徒：かける(理由) 少しずつ面積を大きくしていくと  $17\text{ cm}^2$  になるときがある。生徒：  
 かけない(理由) 1 辺の長さが決まらないのでかけない。

**【課題】**  
面積が  $1\text{ cm}^2$ 、 $2\text{ cm}^2$ 、 $3\text{ cm}^2$ 、 $4\text{ cm}^2$ 、 $5\text{ cm}^2$ 、 $6\text{ cm}^2$ 、 $7\text{ cm}^2$ 、 $8\text{ cm}^2$ 、 $9\text{ cm}^2$ 、 $10\text{ cm}^2$ 、  
 …の正方形をかこう。

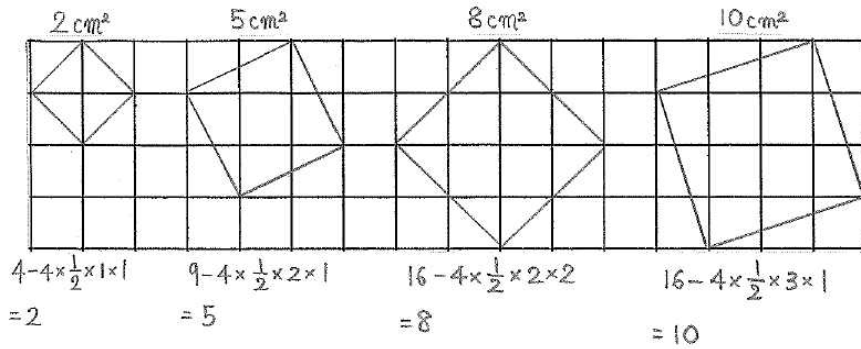
**【自力解決A】**  
 活動：方眼紙をもとにして面積が  $1\text{ cm}^2$ 、 $4\text{ cm}^2$ 、 $9\text{ cm}^2$  の正方形をかくことができる。  
 支援：正方形の1辺のとり方を、斜めにしてかけないだろうか。

【自力解決 B】

活動：方眼紙の斜めに正方形の1辺をとり、面積が $2\text{ cm}^2$ 、 $5\text{ cm}^2$ 、 $8\text{ cm}^2$ 、 $10\text{ cm}^2$ の正方形をかくことができる。

支援1：面積を確認しよう。面積はどう計算できるかな。

支援2：正方形の外側に他の面積の正方形を作ることはできないか。

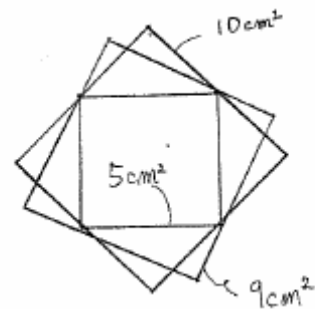


【自力解決 C-①】

活動：もとの正方形の外側に、もとの正方形の4頂点を通る正方形がフリーハンドでかける。

支援1：外側にできる正方形の頂点の位置について気のついたことはないか。

支援2：正方形の1つの角の大きさは何度だろう。



【自力解決 C-②】

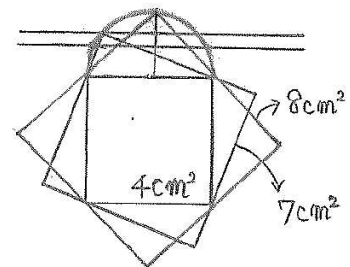
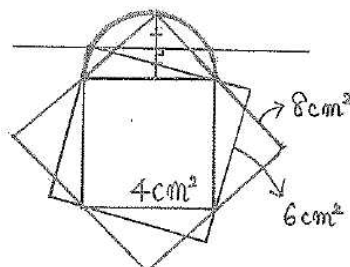
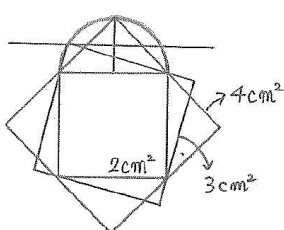
活動：外側にできる正方形の頂点は同じ円周上にあることに気づき、その円がかける。

支援：高さをきめて、面積を出してみよう。



【自力解決 D】

活動：面積が $3\text{ cm}^2$ 、 $6\text{ cm}^2$ 、 $7\text{ cm}^2$ の正方形がかかる。

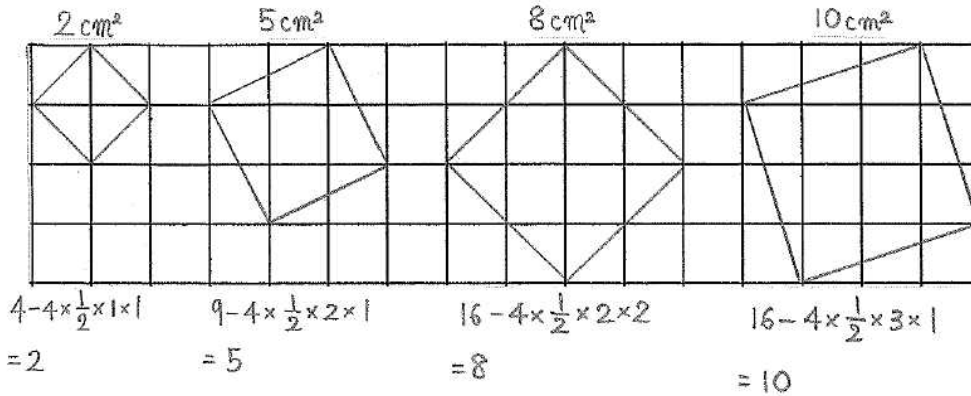


【集団による課題の検討（練り上げ）】

活動：解決B（ $2\text{ cm}^2$ 、 $5\text{ cm}^2$ 、 $8\text{ cm}^2$ 、 $10\text{ cm}^2$ の正方形）を板書して発表する。

○面積を求めてみよう。

正方形の外側の正方形から直角三角形を引いて計算する方法

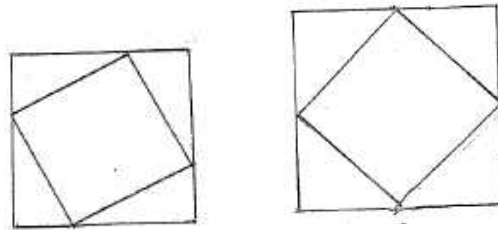


○まだ作図されていない面積は、何  $\text{cm}^2$  たろう。

$3\text{ cm}^2$ 、 $6\text{ cm}^2$ 、 $7\text{ cm}^2$

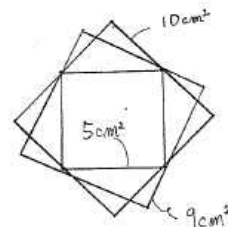
○正方形の外側にできる三角形の形に注目してみよう。

直角三角形のときと直角二等辺三角形ときがある



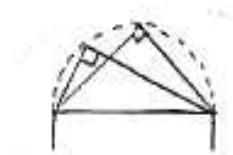
○面積が  $5\text{ cm}^2$  の正方形の外側に他の面積の正方形はできないだろうか。

$9\text{ cm}^2$ 、 $10\text{ cm}^2$  の正方形ができる。



○ $9\text{ cm}^2$ 、 $10\text{ cm}^2$  の正方形の頂点はどのような位置

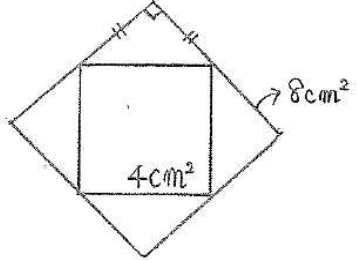
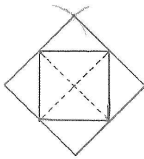
$5\text{ cm}^2$  の正方形の1辺を直径とする円周上にある。





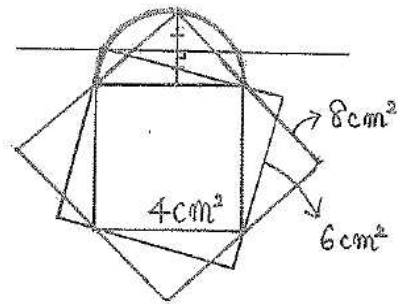
○  $4\text{ cm}^2$  の正方形の外側に正方形を作るとき、面積が最大になるのはもとの面積の何倍のときか。そしてその頂点はどこにあるか。

$8\text{ cm}^2$  の正方形で面積は2倍になる。位置は右図。



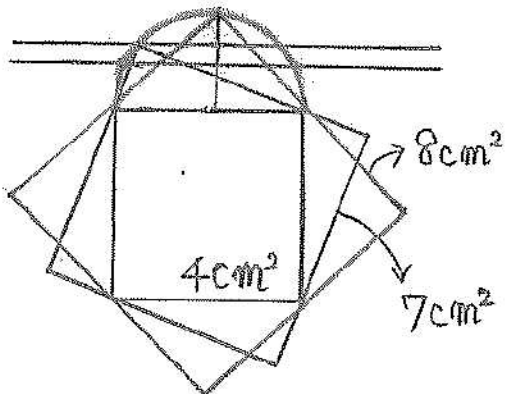
○ 三角形の高さを変えて、他の面積の正方形をかきたい。高さを半分にすると面積はいくらになるか。

$6\text{ cm}^2$



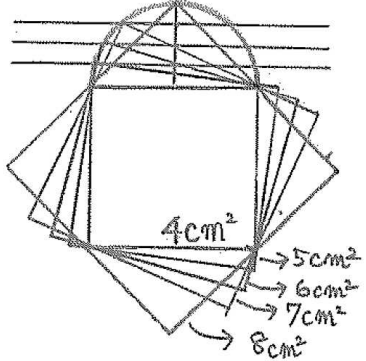
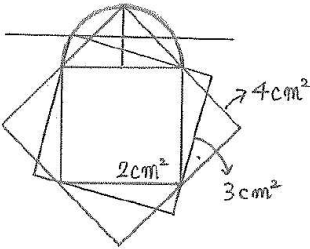
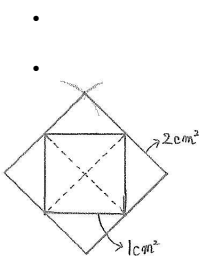
○  $7\text{ cm}^2$  の正方形をかくには、三角形の高さをどうすればよいか。

$8\text{ cm}^2$  の正方形のときの三角形の高さの  $\frac{3}{4}$  の高さ



○ 作図できる三角形を確認する。

- $1\text{ cm}^2 \rightarrow 2\text{ cm}^2$
- $2\text{ cm}^2 \rightarrow 4\text{ cm}^2, 3\text{ cm}^2$
- $4\text{ cm}^2 \rightarrow 8\text{ cm}^2, 7\text{ cm}^2, 6\text{ cm}^2, 5\text{ cm}^2$
- $8\text{ cm}^2 \rightarrow 16\text{ cm}^2, 15\text{ cm}^2, 14\text{ cm}^2, 13\text{ cm}^2,$   
 $12\text{ cm}^2, 11\text{ cm}^2, 10\text{ cm}^2, 9\text{ cm}^2$
- $16\text{ cm}^2 \rightarrow 32\text{ cm}^2, \dots$



活動：面積が  $1\text{cm}^2$ 、 $2\text{cm}^2$ 、 $3\text{cm}^2$ 、 $4\text{cm}^2$ 、 $5\text{cm}^2$ 、 $6\text{cm}^2$ 、 $7\text{cm}^2$ 、 $8\text{cm}^2$ 、 $9\text{cm}^2$ 、 $10\text{cm}^2$  の正方形の一辺の長さはそれぞれいくらになるか確認しよう。

- ・面積が  $1\text{cm}^2$ 、 $4\text{cm}^2$ 、 $9\text{cm}^2$  の正方形の一辺の長さはそれぞれ  $1\text{cm}$ 、 $2\text{cm}$ 、 $3\text{cm}$  である。
- ・その他については、表すことができない。よって、次回学習していく。

#### 4-6 授業実践

単元全体を新しく考えた指導計画によって授業をし、どうであったかを考えたいが、3年生の1学期に学習する内容であり、計画作成がそれ以降であったので、次年度以降にすることとなる。本年度は、円周角の定理について学習している3年生に「正方形の作図」の授業を2学期に実施した。次にその授業について述べる。

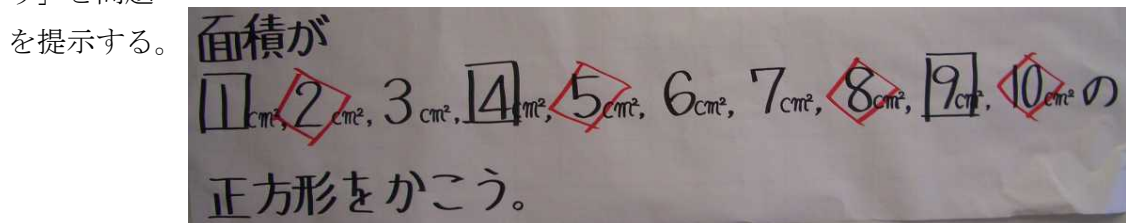
問題を「面積が  $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\text{cm}^2$ 、…の正方形をかこう」として前述した指導案に基づいて2時間で授業を行った。

#### ア 授業の様子

##### ○第1時

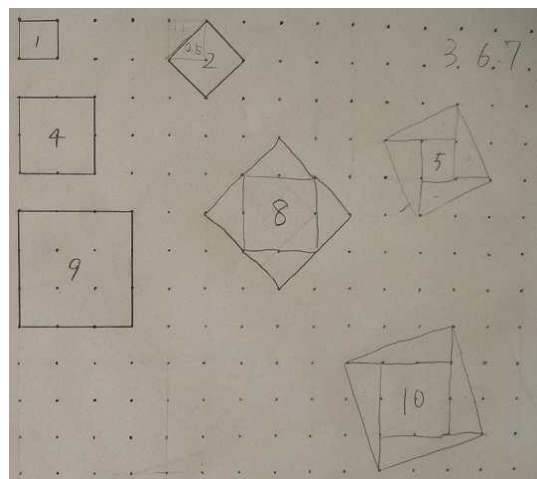
##### 問題提示

「面積が  $17\text{cm}^2$  の正方形はかけるだろうか」と生徒に質問した。生徒は「かけない」と答えた。理由は1辺の長さが  $\sqrt{17}\text{cm}$  だからである。平方根の学習が定着しており、 $\sqrt{17}\text{cm}$  を容易にかくことができないことを知っているといえる。そこで、面積が  $17\text{cm}^2$  の正方形を含めて「面積が  $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\text{cm}^2$ 、…の正方形をかこう」と問題を提示する。



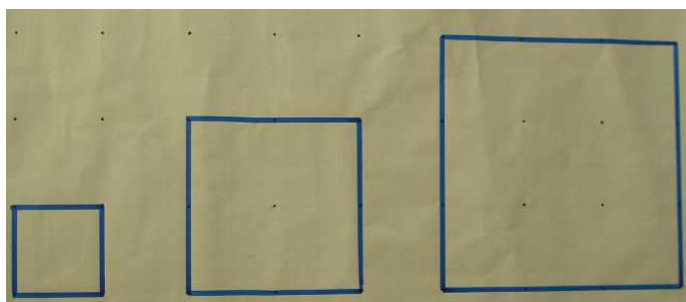
##### 自力解決

方眼紙に面積が  $1,4,9\text{cm}^2$  の正方形はすぐにかく生徒がほとんどであった。時間が経つにつれ面積が  $2,5,8,10\text{cm}^2$  の正方形を描く生徒が出てくる。活動が進まない生徒には辺を斜めにとってみようと支援した。



## 練り上げ

自力解決の時間から面積が  $2,5,8,10 \text{ cm}^2$  の正方形を黒板にかかせた。面積が  $1,4,9 \text{ cm}^2$  の正方形は教師側でさっと説明し、面積が  $2,5,8,10 \text{ cm}^2$  の正方形の説明に移った。自力解決の時間を多く取り過ぎたので、 $8,10 \text{ cm}^2$  の正方形は確認できず、次回の始めにすることとなった。



## ○第2時

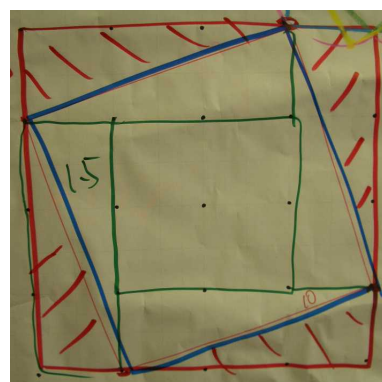
### 練り上げ

始めに  $8,10 \text{ cm}^2$  の正方形を確認した。

$3,6,7 \text{ cm}^2$  の正方形をかくことを生徒とともに試みていくよう導いていこうと試みたが、ほとんど教師が説明をしてしまった。

### 作図

面積が  $3 \text{ cm}^2$  の正方形を各自のノートにかいた。かくための考え方は説明があったが、手順が明確になっていないので戸惑う生徒が多かった。



2 時間で正方形の作図をすることを学習する計画であったが、 $3,6,7 \text{ cm}^2$  の正方形をかく方法を見つけ出すことが難しく、教師の説明が長くなってしまった。見つけ出すのであれば、さらに工夫が必要である。また、描く方法を説明し、作図させ、その作図方法でよい理由を考えさせるという流れで進めていく授業も考えた方がよいと思った。

## イ 成果と課題

平方根の導入にあたって、 $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10} \text{ cm}$  の長さの線分を実際にかくために、「面積が  $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \text{ cm}^2, \dots$  の正方形を描く」方法が開発できた。その作図に用いられる根拠となることからも中学生の3年生の1学期までに学んだことである。特に、円の性質に関することがら現在の学習指導要領から以前3年生であったものが2年生になったことにより、中学生の3年生の1学期でも作図可能な内容となった。

授業実践から、根拠となることがらの一つ一つはそう難しくないものの、作図方法を見つけ出す段階でどのことがらをいつどのように使えばよいか見つけだすことはかなり難しいことが分かった。したがって、作図方法を見つけ出すための工夫をさらにしていく必要がある。そして、練り上げの段階でどのようにすすめていくかをさら明確にしていかななくてはならない。

## 第5章 研究のまとめと今後の課題

### 5-1 研究のまとめ

#### ア 授業の変化

成果を一言で表すならば、生徒が主体的に学んでいく授業の型ができたことである。問題解決の授業を設計し、授業実践をした。その中で、解決すべき問題の設定をすることができた。「困難に立ち向かう」という場が設定できた。生徒が自分で考える時間の確保ができた。その考える時間に、支援を与えさらなる活動を促した。このようなことが挙げられる。そして、授業実践をすることでさらなる授業づくりの課題をつかむことができた。

#### イ 生徒の変化

授業が変わることで、生徒に次のような変化が見られた。ノートの活用法が変わり、工夫をするようになった。自分で考えたことを振り返って考えた。多様な解決に興味を示した。これらは、ノートや感想から分かったことである。今後さらに次のことが期待される。今回で、困難に立ち向かい、自分からいろいろ考えることができた生徒、多様な解決に興味を迫った生徒、自分のしたことを振り返る生徒がでてきたことでさらに授業に変化が出て、授業が深まり、そのことから変わった生徒がさらに変わり、それが他の生徒にも広まり、そのことがまた授業を変えていくことにつながっていく。授業が深まり、力をつけた生徒が増えていくということが繰り返されるサイクルになり、生徒の力が伸びていくと考えられます。

#### ウ 教材の開発

三平方の定理を用いることなく、 $3, 6, 7 \text{ cm}^2$ の正方形を描くことができる方法を見つけることができたことが何より大きな成果であると考えます。しかも、その方法は、 $1 \text{ cm}^2$ の正方形から一連の流れで $a$ が整数である $a \text{ cm}^2$ の正方形を全て描いていくことができるという点において、これまで見つけられた $3, 6, 7 \text{ cm}^2$ の正方形を描くことができる方法より優れていると考えます。また、この方法を活用して、平方根導入において、より平方根の概念がつかみ易くなるであろうと考えられる指導計画をつくることができた。

#### エ 研究のあり方

実践授業の記録や分析に数学科教員が関わっていただいたことも成果として挙げられると考える。授業実践を見てらい、感想を聴くにとどまらず、抽出生徒の様子を記録してもらうことや、想定した数学的活動を生徒がしているか、支援が機能しているかなどを視点で観察してもらえた。授業研究の方法や、授業観察の観点を明確にすることができた。また、そのことに関わっていただいた数学科教員の変容も挙げられる。問題解決の授業の実際を見ていただいたことも大きいですが、生徒の変容やアイデアの多様など生徒の持てる力のすごさを改めて感じられたことがより大きな成果である。生徒がより主体的に学ぶ授業につながると考える。

## 5-2 今後の課題

授業を改善していくという視点では次のことが挙げられる。

- ・授業の工夫として生徒に問題の把握をしっかりさる。
- ・個に応じた指導・支援工夫をする。
- ・一人につき3回はノートを見て、生徒の把握をする。
- ・練り上げの進め方を授業前に考え、授業中に修正する。
- ・学んだことが分かる板書にする。時間配分を考えた進め方をする。

さらに、問題解決の授業の定着という視点では、

- ・よい問題をつくり、問題解決の授業の時間数を増やすことが課題として挙げられる。

また、開発した教材を用いた授業実践していくことも挙げられる。

これらのことをさらに研究し、実践へとつなげていきたい。

## おわりに

鳥取大学附属小学校の姫田先生の授業をみる機会がありました。児童が自分の考えを発表し、他の児童がそれに対し自分の考えを述べ、活発に授業を進めていました。自分たちで発見する喜び、考える楽しさを児童が主体的に学ぶ中でつかんでいるようでした。このような授業こそ求められている授業で、自分自身もそのような授業をしてみたいと思いました。また、鳥取大学附属中学校の神波先生の授業では、教材研究が十分なされていて、発展的な内容が盛り込まれていました。改めて教材研究の大切さを感じました。

授業改善において、問題解決の授業を知り、その実践をしました。生徒が主体的に学ぶ授業をどのように進めていけばよいか考えていくことができました。授業を変えていかななくてはいけないと感じつつ、具体的にどう変えていけばよいか分からなかったので、私にとって今回の研究はとても大きな価値がありました。

教材開発において、面積が $3\text{ cm}^2$ の正方形を描くにはどうすればよいかをかなり長い時間かけて考えました。鳥取大学の溝口先生に教授いただき分かったときは、感動しました。このような気持ちを生徒にも味わってほしいと思いました。

今後は、この研究を生かし、教材研究を深め、生徒が主体となって学び、発見する喜び、考える楽しさを味わえる授業をしていきたいです。

最後に、鳥取大学の矢部先生、溝口先生、鳥取県教育センターの千代西尾研修主事、岡田研修主事、授業をみさせていただいた先生方、実践に協力いただいた校内の数学科の先生方、その他多くの先生方にたいへんお世話になりました。ありがとうございました。

## 引用・参考文献

- 文部科学省 中学校学習指導要領（平成10年12月）
- 鳥取県教育委員会 平成18年度学校教育の努力点
- 鳥取県教育委員会 平成17年度学力向上推進研究調査事業実践事例集Ⅰ
- 鳥取県教育委員会 平成18年度基礎学力調査の結果について
- 島田茂編著「算数・数学科のオープンエンドアプローチ 授業改善への新しい提案」（東洋館出版社）1977
- 能田伸彦著「算数・数学科オープンアプローチによる指導の研究—授業の構成と評価—」（東洋館出版社）1983
- 文部科学省 中学校学習指導要領（平成10年12月）解説—数学編—
- 根本博著「中学校数学科 数学的活動と反省的経験」（東洋館出版社）1999
- G. ポリア著、柿内賢信訳「いかにして問題をとくか」（丸善株式会社）1944
- 溝口達也著「問題解決と評価 算数・数学教育論」（西日本法規出版）2003
- 矢部敏昭著「新しい学力観と問題解決—授業を変えよう—」（明治図書）1992
- 相馬一彦著「数学科「問題解決の授業」」（明治図書）1997
- 中村幸四郎著「数学史—形成の立場から—」（共立出版）1981
- 上垣渉著「はじめて読む数学の歴史」（ベレ出版）2006
- 岩崎浩著「 $\sqrt{2}$ の無理数性の認識について」（上越数学教育研究 第18号 上越教育大学数学教室）2003
- 筑波大学附属中学校数学教育研究会著「おもしろかった授業 生徒が意欲を持てる課題集」（明治図書）2001

**鳥取大学数学教育研究**      ISSN 1881-6134

Site URL : <http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html>

**編集委員**

矢部敏昭 鳥取大学数学教育学研究室 [tsyabe@rstu.jp](mailto:tsyabe@rstu.jp)

溝口達也 鳥取大学数学教育学研究室 [mizoguci@rstu.jp](mailto:mizoguci@rstu.jp)

(投稿原稿の内容に応じて、外部編集委員を招聘することがあります)

**投稿規定**

- ❖ 本誌は、次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文、またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる、理論的、実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学、および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他、算数・数学教育に係わる各種の情報提供
- ❖ 投稿は、どなたでもできます。投稿された原稿は、編集委員による審査を経て、採択が決定された後、随時オンライン上に公開されます。
- ❖ 投稿は、編集委員まで、e-mailの添付書類として下さい。その際、ファイル形式は、PDFとします。
- ❖ 投稿書式は、バックナンバー（vol.9以降）を参照して下さい。

**鳥取大学数学教育学研究室**

〒 680-8551 鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX 0857-31-5101 (溝口)

<http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/>