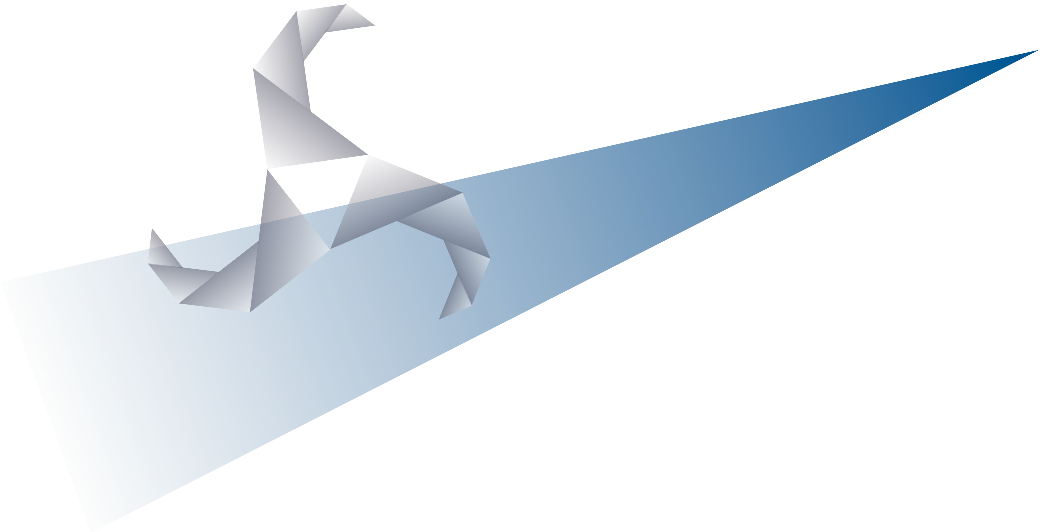
鳥取大学数学教育研究

Tottori Journal for Research in Mathematics Education

ISSN：1881−6134



新しい中学校数学教育の創造

川嵜道広

vol.9, no.15

Mar. 2007

Site URL：http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html

鳥取大学 数学教育学研究室

新しい中学校数学教育の創造

川嵜 道広
大分大学

川嵜先生：
私は大分大学に勤めて 22 年になります. この 4 月から幼稚園長も併任することになりました. 畑が違うといえばそれまでなのですが, 今までは小中高の数学に一応何らかの形で係ってきたのですが, 幼稚園というのは初めてで, それでちょっと目が覚めたというか, 今日は違う見方でお話できたらと思います. 今回は, 鳥取の教育センターでの講演です. リーダー研修ということですから, 皆さんリーダーの卵というか, もう既にリーダーの方もいらっしゃるのですね. これから数学教育を担っていかれる先生方に話ができるということでやってきました. 大分から遠くて, 岡山まで出てきてそこからイナバに乗って 6 時間半. 途中中継が 2 箇所あるのですが, 結構遠かったです. そこで皆さんとお話できるのが 2 時間. 貴重な 2 時間ですね. また帰りも 6 時間半なのですが, この 2 時間できるだけ有意義にしたいと思います. 今回与えられたテーマが「新しい中学校数学教育の創造」ということで, 何を話してもいいというテーマなのですが,「新しい」というものが付いています. なにか「新しい」ことを言わないといけないし,「創造」とありますので, 何か今までとは違う, こうしたらいいのだという視点を出せたらと思います.

資料を用意したのですが, 大体の流れとしましては, 数学教育の流れを通して今何を考えていけばよいのか, 何に注目していけばよいのかということで, 人間力ということが言われていますが, 中学校数学でどういう人間力というものについて, どういうものを育てたいか, 生徒にどういう力を持ってもらいたいかということについて言いたいと思います. 次に, もう一度, 数学教育を振り返ってみて, 反省してみて, 数学を指導するということはどういうことなのか, 数学とは何を教えればいいのかということを振り返って考え, 3 点目としては, 指導していく上での観点を挙げたいと思います. いきなり講義形式で話をしてもいいのですが, 朝早いといえば早いので, 少し頭を動かしてみましょう.

好きな数字を一人二つずつお願いします.

フロア：
3, 7, 23, 51, 89, 99, 1, 50, 8, 42, 13, 55

川嵜先生：
とりあえずこれぐらいにしましょうか. まだ挙げてもらってもいいのですが, ここからが問題です. この 12 個の数を, きちっと過不足なく 2 つの集合に分けてください. きちっと 2 つに分類する観点を挙げてください. こちらの先生お願いします.

フロア：

・　奇数と偶数
・　この中なら 1 桁と 2 桁
・　3 の倍数かどうか
・　50 以上かそれ以下か
・　7 の倍数かどうか

川嵜先生：もう倍数はやめましょうね．

フロア：

・　素数かどうか

川嵜先生：

ちなみに素数は．1 は？さすが先生方．大学生などは 1，素数かもしれないなんて言いますね．素数は 1 とそれ自身以外の数を約数に持たないというものですね．

フロア：

・　10 の位の数＋1 の位の数が偶数か奇数か
・　10 の位÷1 の位が割り切れるかどうか
　　⇒÷0 はだめだから？とする

川嵜先生：

割り切れるか割り切れないはいいとして，0 で割るということは問題があるかもしれませんね．1 桁なら 10 の位を 0 と考えればいいのですが，50 があるのでだめかもしれませんね．

フロア：

・　平方数かどうか

川嵜先生：

では問題をかえて，3 つに分けるならどうですか？

フロア：

・　3 で割って余りが 0 と 1 と 2

川嵜先生：

　後ろの方，問題が変わってしまいましたがどうですか．2 つに分ける方がいいですか．では困っているみたいなので，院生をいじめるとかわいそうです．皆さんはリーダーとなられる方でね．今頭ぐるぐるまわっていろいろ考えられたと思いますが，小中高と数についてはいろいろ，各年代でいろいろ学んできたわけですね．奇数，偶数，有理数，無理数，平方数などですね．このような状況では，2 つに分類するという状況においては，今まで学んだ知識の何を使えるか，これだったら適切に分けられるかどうかを呼び起こして考えますね．数について何を学んだか．これらを分類するという課題を与えられたとき，今まで学んだ知識の何が使えるか．これだったら適切に条件に合っている．奇数，偶数．3 の倍数，7 の倍数という倍数ということはずっと培っているのですが，成り立っているかどうか．素数かどうか．平方数かどうか．1 の位，10 の位に分けるということは小学校できちんとやっていますね．そのような発想がこういうときにでてくるかどうか．小学生的な考えでは，5 があるかどうかとか，1 の位と 10 の位で同じ数が使われているかどうか，あと単純に高校野球の背番号で使われているかどうかもありますね．そういうことを引き出してこないとだめですね．引き出してくるということは，感性にあたるわけですね．これは知性とは異なっているわけですね．知性というのは何々を知っているということなのですが，感性・感覚とは適当なときに適切な条件を出すことが浮かんでくる．そういうとこ

ろまで知識を高めておく，そこにいたるような教育をしないといけない．ただ困って，分類したことがないから，分類の観点を教えてくださいと言われれば，教えてもらえればわかるという，新しい状況のときに，今まで持っていた知識をフルに活用することができて，対応できるというそういう力をつけていきますね．そこで今は数についてやりましたが，これが関数についても同じですね．最終的には感覚・感性を磨く，数学的な感覚を持つということが小学校，中学校，特に中学校では文字も出てきて，抽象度が上がります．抽象度が上がりますが，それを感覚として持ち続けるということが大事になっていきます．

では資料をもとに，そのような感性を伸ばすことがなぜ必要なのか，なぜそういうところまで行かなければならないのかということについて，今の数学教育の流れから説明していきます．今，現行学習指導要領では「生きる力」というものが強調されています．そしてもうすぐ改定される新しい学習指導要領では，「人間力」というものが言われています．そこで「人間力」というものはどういうものかと，どういう意味で言われているかということを数学教育の立場から考えるとどうなるかということですが,「生きる力」がでる前に，平成元年のですね，前の改定のときに「新しい学力観」というものが言われていました．その発想は，学んだ力というのは知識・技能ですね．そういう表面に現れる力だけでなくて，学ぼうとする関心・意欲・態度とか，学ぶ力や考え方，それから表現する力という，学ぶ過程も学力として考えていこうということが平成元年からでてきました. 平成 10 年の学習指導要領から出てきた「生きる力」というものは，3 つの側面がある．1 つは確かな学力で，2 つ目は豊かな人間性，そしてそういった健康・体力が 3 つ目ですね．確かな学力というのが知育で，豊かな人間性が徳育，健康・体力が体育．この 3 つを総合的に行うことで，子どもたちを育てていこうということでしたが，学力論争があってですね，数学は特に学力低下がおきているということの対象になっていて取り上げられているのですが，それによって確かな学力ということが平成 14 年ぐらいから浮き彫りになっています．確かな学力というのが何かというと，知識・技能に加え，自分で課題を見つけ自ら学び主体的に判断し行動し，よりよく問題を解決していく資質や能力のことです．流れとしては新しい学力と同じものですね．知識・技能に加えですから，学んだ力だけではなく，学ぼうとする力，学ぶ力にも焦点を当てていきましょう．そして確かな学力観というときは，見たことあると思うのですが，この花びらのような図で，知識や技能というのは花びらの 1 つで，それ以外に学び方とか学ぶ意欲ということが挙げられ，そして思考力・判断力・表現力というのが挙げられていて，これが学ぶ力に相当するようなことですね．さらには問題解決能力というものをあげる中で，課題発見能力があって，問題解決能力につながっていきます．全体を通してみると，やはり最初の新しい学力観であるいろいろな学力をつけていきましょうということが少し具体化されていると読み取れます．

そしてこの確かな学力観を通して，数学の指導を考えたときに，これも最近よく言われているのですが，習得型の指導なのか，探求型の指導なのかということが問題になっています．習得型というのは，基礎的・基本的な知識・技能の育成ということをメインにする

ような学習形態で，計算技能の習得，定着というのが挙げられます．最近，全国学力調査というもので，県ごと，地域ごとにテストされていますね．そして順位も発表されている．鳥取はよくわかりませんが広島なんかでは，学校ごとに順位が出るというかなり厳しいことになっていますが，大分ではそこまではいかずに，優秀校だけ発表する，全部の評価で平均以上のところだけ発表する．それが昨年くらいからまた論議をよんでですね，いろんな小学校や中学校に伺ったときに，校長先生とかに話を伺うと最初に言われるのが，うちは優秀校ではないのですが，ここだけがだめだったのですと言われ，どれだけの評価というより，載る，載らないということで少し問題になっています．それよりは順位がきちっとでるほうがまだいいというというような意識があるようなのですが．そういう学校の評価にもつながるテストの結果を，とりあえず上げましょうということで，学力向上のリーディングスクールとかいったいろんな指定をうけて必ず取り組むのがこの習得型です．とにかく点数をまず上げましょう，そしてその後，考える力，意欲や関心などをやって，最後の報告書の時には点数も上がったし，授業もこう変えたし，生徒の意欲も上がったというようなことを報告書の段階では言いたいのです．第一段階としては学力の表面的なもの，計算機能といったそういったものをまずは上げていっているというような状況です．実はそういう状況が問題で，まず習得型が第 1 段階で，それができた後で探求型．自ら学ぶ力をつけたいのだということが根本的な教師の願いといいますか，希望だと思うのですがここにいたるまでに習得型というものがどのように係ってくるかということが重要だと思います．そのために皆さんも苦労されていると思うのですが，習熟度別というのがありますね．それがいい方向に行けばいいのですが，悪い方向に拍車がかかっているように思います．ちょっと余談なのですが，学力って言うのが昔はこういう正規分布になっているように言われていましたね．それが徐々に正規分布じゃなくなっていって，台のような形に．そしてそれを修復するために習熟度別に，分かっている子，分かっていない子，言い方は悪いですが，できる子には発展を，できていない子には基礎・基本を教えてある程度分からせたいということで，そういうねらいは分かるのですが，この台形状態で 2 つに分けてやるとどういう状態になるかというと，2 つの状態で正規分布を目指すようになるわけですね．確実に 2 つの真ん中がない状態ですね．しかもその山がどんどん分かれていく．あと何年かすると，5 年か 10 年かするともっとこれが大きな問題，社会的な問題になってくると思うのですが，今は台形状態に少し穴が開いている状態なのですね．山が離れていく，その時に習熟度で対応できるかというと，とても対応できないわけですね．結局は習熟度でなくて一斉でもできるような先生を育てなければいけないし，一斉で授業が成立するような授業形態が求められています．習熟度には頼ってはいけない．いずれ上のほうはいいのですが，下のほう，習熟していない子をどう上げていくか．そしてそれを一斉の状態で目指すようにしないと形態に頼った授業になってしまいます．そのために一斉でもできる，30 何人でもできる，うまく授業ができるような，そういう授業形態，指導過程っていうものをどう作っていくかということが必要となっています．

そこで探求型を目指す場合というか，習得型プラス探求型を目指していく場合，やはり今，足りないのは学び方と学ぶ意欲というところと，思考力・判断力・表現力，こういったものをどう伸ばしていくかということですね．そしてこのような状況で新しく述べられている人間力というものを見ていくとき，人間力というのはこれまでと全く別の方向から出てきたものではなく，生きる力を伸ばしていき, さらに具体化し発展させていくことに, 人間力が重ねられています．

そして，3 つの言葉が出ています．知的能力的要素，社会対人関係力的要素，自己制御的要素．分かったような，分からないような言葉ですが，知的能力的要素というのは，分かる，分からない，できる，できないといった認知的要素です．社会対人関係力的要素，これは社会性とか自分と他者との関係，その関係で社会性を培うということです．数学で社会性というと，自分だけが考えるのではなくて周りのクラス全体として考えるといったことで，共同で知識を積み上げていって，結局その知識が地域・文化・世界に通用するような共通の知識であるというような認識ですね．勝手に作り上げるのではなくて社会的な知識として数学を作り上げていくのだということですね．自己制御的要素とは，倫理性と書きましたが，授業の中で自分の意見がどういう位置を占めているか．まったく箸にも棒にもかからないのか，結構いい線いっているのか，あの子よりは劣っているけど結構いい考えではないのかといった，自己効力感とか自己成功感とか自尊感情とか自立意識というような，自分の考え方が他者にどう受け止められているのか，自分の考えの位置づけがはっきり分かるといったことに関わってきます．それを数学に読み替えた場合のことなのですけれど，なぜこの 3 つに分けて人間力というものが言われているのかというと，認知性・社会性・倫理性の 3 つの要素があるものは結局授業なのですね．数学教育の全体を通した内容ではなくて，1 時間 1 時間，1 単元 1 単元の授業で子どもを，生徒をどのように育てたいかということを考えましょうという発想になっているのです．

そして「生きる力」の段階では，数学の指導を通してどんな生徒を作っていくか，そんな生徒を理想として育てていくかという段階だったのですが,「人間力」を言うときにはどんな授業でどんな子どもを作っていくのか，どんな授業にしなければならないのか，それからそのためには子どもたちにどんな考えを持たせるような授業にしなければならないのかという授業レベルまで考えましょうということがあると思います．そのためには授業力とか教師力を充実させていかなければならない．教材についてよく知っているだけではいけない．授業をどう作り上げていくか，どう展開していくか，そういうところまで要求されています．

そして人間力と同時に，言葉の力というものが新しい指導要領ではキーワードになるといわれています．言葉の力や活用力，数学で言うと数学的リテラシーといわれているものなのですが，そういった言葉の力や活用力といったものを学ばせる，こういったことがこれからの時代，授業で 3 つの力の要素に着目しながら何を伸ばしていくかというと，言葉の力と数学的活用力，数学的リテラシーといったものになるのですね．

言葉の力といったときに, 主にこの発想は, 読解力が落ちているから言葉の力を伸ばしま

しょう，数学的リテラシーが落ちているから伸ばしていきましょうと読んでもらえればいいのですが，それが出てきた背景が PISA と TIMSS の調査結果からなのです．特に PISA のほうなのですが，どんなことをしてきたかという調査の目的ごとに分けられているのですが，読解力を主にみる調査，数学的リテラシーをみる調査，科学的リテラシーをみる調査，そしていわゆるアンケート調査．こういった 4 つの調査ごとに調査が行われています．その結果が，対象となっているのが高 1 レベルなのですが，数学的活用能力は前回 1 位が 6 位に．2003 年に 6 位に．読解力が 8 位から 14 位に落ちている．科学的能力は 2 位が 2 位に．これはいいのですが，この読解力が 14 位に落ちたということで，読解力，つまりは国語の力ということで言葉の力をメインにキーワードとしています．しかし数学的活用力が 6 位というのもいい結果ではありませんね．だから数学的活用能力ということも合わせて考えなければならない，これが言葉の力や活用力につながるわけです．

数学における言葉の力がただの言葉の力ではなく，数学的に言い換える．数学の授業での言葉の力というのは当然，日本語で説明するということも入ってくるわけですが，当然，日本語での記述を通して自分の言いたいことを伝えるということもあるのですが，これを少し広げて，この表現力とつなげて考えて，数学の授業を通して数学的表現力を身につけるということです．活用力というのはそのまま数学的なリテラシーというものにつながるわけですが，では数学的な活用力をつけるためにはどういうことが必要かということで，次のような意識が必要と考えます．数学の有意味性，学ぶ意味，数学に対する積極性．これが現在の日本の小中学生に欠けている，将来必要ないということがよく言われています．数学を学ぶ上の意識として欠けていると考えます．自分にとって数学は必要ないといった意識を変えていくための活用力という，数学の有意味性を知らせていく．そして数学の面白さなのですが，ただの興味ではなく数学的な面白さ．そこでどのような面で面白さを感じなければならないのかというと，関係性と理解する，関係を理解するときに面白いなっと思ってもらいたいと考えます．ものごとについて，その関係性に基づいて知識を得ていくということですね．例えば 1 年生で比例を学びますね．そして 2 年生で 1 次関数，3 年生で 2 次関数と，これは比例とは別だというポンポンポンとなることは物の意識ですね．小学校でも比例について学ぶのですが，比例というか比についてなんですが，これを小学校の比と中学校の比例が全く別物である，全くではないにしても別物だと考えている．新たなものとして考えていることは，関係性を意識していないということですね．関数というもの，それがずっと通して 2 つのものの関係を把握して関係を解析するための考え方，それが比例であったり，1 次関数であったり二乗に比例するものであったり，根本的なつながりというものが見えないと物の知識になります．そういうように本質的に考えられるようになると，中学校数学全体が見えてくる．何のために比例や二乗に関係するということがわかってくると思います．

それから創造性というものが，これは高校まで通じてキーワードになるわけですが，大事なのは感覚です．先ほどやった数感覚や量感覚，関数感覚，といったような何とか感覚といったものを最終的に伸ばしていくことで

創造性を伸ばしてくということですね．

これまでは概略なのですが，これはわかっているようなことでしたが，では実際に授業を作るときにどういう点において，どういうところに注目しなければならないのか，何に焦点をおいて考えなくてはならないのかということを具体的に見ていこうと思います．

まず小学校の算数と中学校の数学の違いを考えたとき，中学校の数学になると現実からかなり離れた世界になります．それは文字の導入で明らかですね．数が対象になるとその背景に量的なものがあるわけです．だから量が背景にあるということはある程度現実が背景にあるわけです．これは小学校の算数ですね．中学校で文字が出てくると，量的なものは薄れていきます．ですから中学校 1 年生から常に数学に慣れていかなければならないという試練があります．では数学になるためには，何を考えればいいのかというと，一言で言うとモデルとしての数学といいましたけれど，背景としては現実があってもいいのです．それを数学に持ってきて文字や式で表す，図形の性質や命題について考えるということは結局何をしているかというと，数学の世界でモデルを作っているわけです．モデルを作ることによっていろいろなことに応用できるということですね．つまり何にでも当てはめられるようなモデル作りをしているということが中学校の数学になるわけです．そしてその数学の特質は，あちこちで言われていると思うのですが，抽象性であるとか記号性，言語性，これは日常とは違うわけです．数学にも言語があり，数学は英語に似ていて，英語と同じで数学における単語を覚えなくてはいけないのですね．ルートとか x とか，そういう単語が出てくるのですね．その単語をどのようにつないでいくかということですね．そこには文法があり，それによって表したいものがあるということですね．ですからある文法によって文字を並べると，言葉として独立して成り立ち，それによって誰にでも分かるような言語体系が作れるということです．しかもその言語体系は世界どこでも通じるもので，この言語性というものは大切なわけです．中学校になると×は省略するわけですが，生徒は，あそうなのだと言うしかないわけですね．そこで皆さんはなぜ×を省略するのかと聞かれると，そうなるからとしかいえないわけですね．数学の世界はそうなっている．できるだけ省略して簡略化して表現する．誤解がない場合には簡略化するという，そういう規則があるからという．a×b は ab にするというところが小学校から中学校に入ってきたときに理解できないでいる．そして小学校とかでは 7/3 という分数を 2 と 1/3 というふうに帯分数にしますね．これは量がわかりやすいようにという量の世界なのです．このように必ずこうしましょうと言われていて，中学校に入ると帯分数で書いちゃいけません．それは 2×1/3 と読まれてしまうかもしれないし，2 と 1/3x のとき，それは 2 と 1/3 の間には＋の記号が省略されている．1/3 と x の間には×があるというふうに説明されていないと思います．このように中学校では帯分数では表してはいけません．仮分数で表します，というのは言語なわけですね．あと形式を重んじる．形式で考えていくとか，論証を中心として，論理．論理というのは論証だけではないですね．日々の授業で論理は使っています．演繹的に考えていくということも全て論理になってきますね．それと一般性を追求するということも，これは小学校もなんですが，中学校

になると文字の力を使って一般性を表していく，一般化されていくということですね．

このように特質をいくつか挙げていますが，これで何を考えていただきたいかと申しますと，授業で式を出しますね．例えば y＝2x＋3 とか y＝3x＋7 とか，このような例を出した後で，y＝ax＋b というような，先に挙げたような関係をこのように（文字式のように）表して，1 次関数とします．そしてこの式がでるとほっとしますよね．まとめられた．これでこの学習は教えたことになるのだってことで達成感はあると思います．子どもたちもこの式がでれば，このようなことをやったのだと思うわけですが，何のためにこの関係式を出したかというと，このような関係（数字を用いたほうの式）を一般化しているわけですね．全ての場合を表したのだということで，一般化したとします．そのような意識を持って，式を出すときは形式化しているのだ，一般化しているのだ，記号化しているのだ，こういう意識で，これでやっと数学の世界の文章ができるのだ，成立するのだ．言葉が納得できるのだということで，数学のモデルを作りあげていく上のいろいろな特質をこの 1 文にこめているのだという意識ですね．そこでもしうまくいかないとき，これで（y＝ax＋b という式で）一般化できているのですが，y＝－ax＋3 のようなグラフは右下がりのグラフになるといったような，確かにそうなるというような生徒はいませんか？ここが a じゃなくて－になるといったような．これ（y＝ax＋b の式）だけ示されたら a は正にも負にもなり，右上がりにも右下がりにもなるということはわかりますが，続いてこのような－があるようなものを出されると，おそらく負のイメージが強くなるのですよね．そのような誤解がでてきて，これ（y＝ax＋b の式）の本当の意味といいますか，x，y の対応なのですが，対応を式に表しているんですね．x，y の対応というものをグラフに描くと，x，y の対応の式が集まってこのようなグラフになるわけですね．で，本質はこの対応なのですね．x，y，2 者の関係なわけですね．x，y の対応を表しているという意味ですね．この際この式をもとにいろいろ話しますが，この式に含まれている x，y という文字なのですが，ではこの b が何を表しているのかと聞いてどれくらいの生徒が答えられますかね？b はどこですか，ということで（グラフの切片の部分を指して）ここですね. ではこの y＝ax＋b という風になった，この b が変わったら，b が 1 や 2 に変わったらどれくらいの生徒がわかりますかね．平行移動ということがわかりますかね．平行移動がわかっても，どのようにグラフが動くのかということがイメージがついているかですね．グラフでは真上に上がっているわけですね．斜めではなくて真上．ということは全ての点が上に上がっているということですね．このようなイメージが，b が変わったら，グラフのイメージとしてどのように変わってくるのかということですね．それから b を固定して, a も一般的に表されているのですから，a を変えるとグラフはどのように変わるのか．これもまあ回転するというか．このようなことがわかっているのに a に－がつくとどうなるのですかと聞いたときに, a が－a に変わった．a が同じものなので，a が同じものということが難しいんですけど，y＝ax＋b が y＝－ax＋b に変わるとどうなるかと言ったときに，傾きが逆になるということですね．線対称になる．そんなイメージがある．y＝ax＋b の式を出せたら安心する，教えられたと思うんで

すが，実際はこれが言葉の始まり，数学としてのモデルの始まりで，これで何が言えるか．ａ もｂも一般的に表されている．ｘ，ｙがこの式に含まれている．じゃあｘと y は何なのかというと，点の対応をこれで表している．ｂか変わったら何が変わるのか．ａ が変わったら何が変わるのか．そのようなところまでグラフと関連付けながら解析をしていかないと，このような式はただのものでしかないです．関係まではまだつかめていない．比例に関して，y＝ax なのですが，紙の枚数と厚さが比例関係なのですね．例えば 200 枚が 3cm であった．これが 500 枚なら何 cm でしょうか？という問題になったらわからない．紙が多くなったら厚みも増えることもわかる．これが比例の関係であることも聞けば分かる．もし小学生の知識なら比の考えからわかるわけですが，新しく中学校でやる場合は新しい考えを使わないといけないので，この式（y＝ax）を使って考えるわけですが，この問題の状況と式がうまくつながらないという子がいました．y＝ax の式もわかる．比例の関係も式も分かるのにできない．このわからない cm を求めるには, 式を用いれば分かるということできない．これは何がおかしいかというと，式と現実場面とそしてグラフの見方というものが全部ばらばらになっているということなのですね．このような典型的な例があります．

あと派生してまとめて言ってしましましたが，思考力・表現力・判断力というのはまとめて考えなくてはならないのですが，思考力というのは結局は数学の特質のところですね．特質に当たる部分を意識することで，数学的な考え方というものが身についていくということですね．これは抽象性は抽象的に考えるとか記号性とかもですね．言語性，数学の言語意識する．つまり特質をきちんと捉えることで数学的考え方，数学の単元などによらない考え方につながるというところですね．結局数学を作っていくということが数学的な考え方なのですね．

それで，思考力をつけるためには，何をもとにしてつけていくかというと，表現力なのですね．思考力・表現力・判断力というものが別々に示されていますが，思考力をつけるために表現力を利用する．そして思考力がつけば，数学で判断する力もついてくる．この思考力・表現力・判断力というものは横並びで出てくるのではなくて，経過としてでてくるわけです. そこで表現についてなのですが, まずこれは片桐先生のものなのですが，典型的なものとして挙げられます．数学的な方法に関係した数学的な考えた方なのですが，これはどんな数学の授業においても認められる数学を作るために必ず必要となる考え方として，帰納・類推・演繹，これ 3 つあわせて論理的な考え方ですね．そして，統合的・発展的・抽象化・単純化・一般化・記号化の考え方．そしてこの方法に関する数学的な考え方というのは，先ほども述べましたが，数学を作る，数学の特質を理解するために必要なものですよね．最終的には数学を作っていく上でよりどころとなるものです．そこでこれを伸ばしていくということなのですが，その次に表現様式についてですが，表現を通して思考力を伸ばしていくということですね．そして表現には 5 つの表現がありまして，現実から記号に向かうときに，抽象度の低いものもありますが, 現実の事象を授業で取り上げて, 操作をするとか駆使することで，図や表で表すとかを駆使することによって, 記号的表現,

文字とか式で表していく．そして図と操作と言語，この 3 つが過程としての表現なんですが，この 3 つをうまくつなぐことによって，最終的に記号的な表現に結び付けていくということですね．そして現実から記号に向かうこの道筋が表現を通してうまくいったら，そのとき思考力もついていくということですね．これを例で考えると，厚みと枚数，これは現実の場面ですが，このような場面を通して，実際に操作をするということは操作的表現で，まあそこまでやらないかもしれないんですが，頭の中だけでどのようにするか問い考えるだけかもしれませんが，図的な表現の中に表やグラフなども入りますが，実際に 100 枚だったらどうなるのかとか，200 枚だったら，300 枚だったらというような表を作って，それをグラフに表すということが図的な表現で，それらをつなぐものが言語的な表現ですね．言語で説明する．そして最後に x や式というものに表していく．最後にどのような式であれ式で表せればその子は分かったものとしてみないといけないんですが，実は式やグラフといった関連ですね．現実的なものを図とかグラフとかで表せるかというと，表で表したものをグラフで表せるか．この場面以外でもいいのですが，表を与えられて式やグラフで表せということが出来ない子は，先ほどの過程の中で何かがわかっていないということになりますね．あるいは言語的にうまく表現できない．そこでうまく表現できるということは結局式がわかっている．式がわかるということは，記号性とか言語性とか一般性とかもわかっていると考えることができます．表現を通してうまく各表現ができる．各表現間の関連付けをとることができる．説明できる．それが思考力につながっていく．最終的には数学を作っていくためにつながるということと捉えていただければいいです．

　最後の判断力なのですが，これは思考力がなければ，表現力も持っていないと判断力につながっていないのですが，直観的に状況に合わせて感覚をつないでいくイメージを働かせる．

　では中学校数学の指導で，最初に新しい中学校数学教育の創造ということで「新しい」と「創造」の部分で何か持って帰っていただきたいと申しましたが，まず中学校数学の特質として，大それたものになるかもしれませんが，思考ゲームとします．頭を働かせるゲームであると．これは小学校においては具体物をもとにして，具体物を操作する，操作ゲームとして捉えると，中学校では頭で念頭操作をしなければならない．だから思考を働かせなければならないとして，思考ゲームと捉えてもらいたいとしました．そして特に大事になってくる数学の特質，思考力としては記号性・一般性・論理性．それから特質にはありませんでしたが無限性などがありますね．そして記号性というのが，具体的なものから抽象して記号で置き換えていく．中学校では小学校とは異なり具体物ではなく，特殊な場合などの様々な事例というものをもとにしてさらに抽象化して，式につなげる．式につなぐということは記号として捉えているということですね．表した式などを具体と考え，一般性というものも捉えていかなければならないのですが，それが特殊なものから一般へということですね．

　さらに論理性，特に帰納・類推から論理へということですが，これ（上に挙げた $y=2x+3$ や $y=3x+7$）を用いて考えているのは帰納的な発想ですね．2 つ 3 つ具体の事象から

考えていくということから考えていくという帰納の考えですね．全てのことが表されるのだという論理的なことは述べられてないんですが，ここは追求していく必要がありますね．それから無限性というものですが，これは小学校と中学校を分けるものです．分数や無理数とか 3.14 ではなくπで表したりしますが，そのあたりをなんとなくこうなるといっているのですが，生徒にとっては困難を示しているわけですね．今まで有限なものでしか考えていないのですが，それを無限なものにしていく．生徒によっては整数から分数になるだけで困難を示すわけですね．y＝ax＋b で a が分数になるというような，分数と整数とでは違ってくる．分数やルートになるだけで難しいと思うわけですね．そのあたりは気持ちの問題なのですが，整数だったら答えだって思えるわけですが，答えに分数が出ると信じられない，そんな子もいるわけですね．ここは全体を通していうと，抽象的な記号の操作を思考により意味づけて証明することを通して知識を獲得し，得られた知識を直観として働かせることにより創造性を発展させることになるということですね．結局はですね，記号性・一般性・論理性といったような数学の世界を形作るような特質を各授業で見させなければ，感じさせなければならない．そのためにはこうなっているのだよ，ではなく，これは一般化のためにこうするのだ．これを記号で表すとこうなるのだ．だけど背景には具体が存在するのだ．これだけが独立して存在するのではないのだよということですね．

次に指導あるいは評価の観点のところなのですが，3 つの観点でお話します．

1 つは記憶．数学は暗記科目かというと違うと答えると思います．しかし暗記しなければならないところもありますね．体積の公式などがありますね．そこで記憶するということなのですが，これは活動を記憶するということですね．活動自体を記憶するということですね. ここで大切なのは, Doing, Do math, Make math．Make math というのは，私が作った造語なのですが，数学をするということや作る，経験をさせるということですね．この経験をさせること大事なのです．経験を記憶させるということが一番大切なのですね．知識・理解，出来上がったものを公式として暗記するものではなくて，数学をつくる過程を経験させる，それが日々積み重なると，数学をつくるとはどういうことか，数学をすることがどういうことかということで身についてくるわけですね．

もっと具体的に言うと，モデルを真似る．教科書を写すだけでもいい．先生が黒板に書いたものをノートにきちっと写す．まずそれから始まる．まず物まねでいい．そこで物まねをするときに，ただ写すだけではなくて，やはり考えながら写さなくてはならないですね．証明についてなら，まず写してみる．そこでなぜこのようにしなければならないのかということも考えながら写していく．まず物まねに徹して次に数学的表現や操作に慣れるといことですね．このときわかったつもりになるのではなくて，実際に回答や証明を書いてみることも必要です．回答や証明を書かないという子もいます．問題文を眺めて，これはこんな風にとけるなぁって済ます子もいます．だけど実際に書いてみないと本当にそうなるかどうかもわからないし，違う回答のほうがもっと簡潔にできるかもしれない．やってみないとわからない．まずはじめは真似て書いてということですね．これは 1 つの例な

のですが，数学を作るためには操作も重要ですね．それから操作を図でつなぐとか，具体的な場面を図で書くとかということで表現力にあたるものが直接関わってくるので，このときに様々な表現もここで学習すべきですね．

それからこれも思考力に関係するものとして大事なのですが，構造を理解して本質を見るということですね. 1次関数であるならば，x と y の対応になるのですね．それから思考力に関係するところなのですが，大事なのは本質をみるということですね．構造を理解して本質を理解していく．さっきのこれ（1 次関数の例）でいくと本質は，x と y の対応なんですね．関数というのは対応である．関係付けを表すものである．これは高校の内容である 2 次関数についても，根底にあるものですね．高校になってもこの対応があるかどうかですね. 関数というものを統一的に表すと，対応になるわけですね．このような意識をどれほどもたせられるかということですね．

それから感覚に関しては，結局，最後は知識がどうなっていくかというと，小学校中学校で培ってきた知識が頭の中のどこかにたまっているわけですね．それぞれたまっています．そしてそれが活性化されないと，ただ知識があるだけになってしまいます．こういうこと習ったでしょ，というと，習ったといいますが，それを解いたらこうなるということを言われないと思い出せないということは，知識が沈殿している．沈殿したまま何か外から刺激がないと，他人から与えられて探し出すと，ああというような状況であるとそれは活性化されていないのですね．そこで知識がすぐ呼び出されるように活性化されてなくてはならない．そのとき関係性でつながっているとすぐに出てくるわけですね．だからそのものだけを覚えるのではなくて，その関係を覚えていくことでどんどん活性化されるわけですね．そこで先ほど Make math．Do math と述べましたが，最終的に Feel math，数学を感じるようなとこまでいきたいわけですね．

ではまだもうちょっと時間がありますので，学力調査については飛ばしまして，従来の指導をどのように変えていくといいのかということで，いくつか例を挙げていきます．証明の場合も，角度を求めなさいという場合でも，必ず問題は与えられているわけですね．それが解けるか解けないかになっています．例えば図だけを与えて，この中から成り立ちそうな関係を考えていこうとすると，辺の関係とか，3 等分されているとか，合同な図形があるということは全て図形の構成要素です．この辺などの構成要素で図形を見ているということ，それが大事なのです．ただ与えられたものだけで考えていると，例えば角を求めるのだから角だけしか見てない．そうすると角だけで見たら解けない問題もでてくるわけですね．そうすると合同性を見つけなければならない，平行性を見つけなければならない．そのようなときに角だけを一生懸命見ている．そうすると考えられないわけですね．というように，図形の場合はいろいろな，多様な見方というか多様な性質，構成要素に基づき自ら作り出せるようになるということですね．

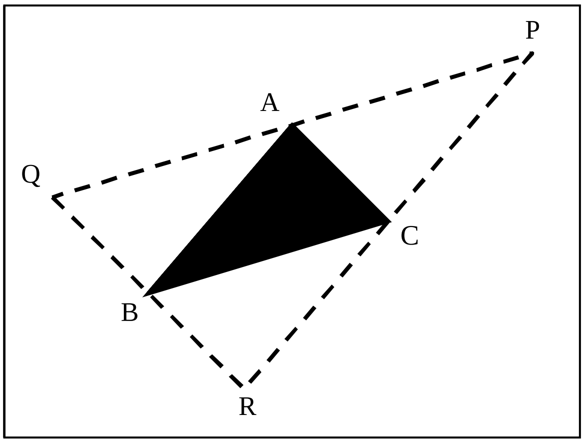
次に，これは以前，中学校でやった問題なのですが，教科書にこのような問題があります.『下のような頂角 120 度の二等辺三角形があります．そしてこの中にもとの形と相似である，合同な三角形 4 つで分けましょう』という問題です．5 つの場合は相似な三角形で分けることができます．4 つは簡単なのですが，5 つは少し大変なのですが，5 つで終わる

のではなくて，6 つ，7 つ…そして 20 や 30 の相似な三角形で分けるということはすぐに見つかるかな．このように考えることで数学ができるわけですね．より一般的な方法を考える．まあ問題解決的といってもいいのですが，4，5，6，7，とんで 10 とか 20 とか，さらに 100 になると頭の中で，システムだけで考えなければならないですね．100 等分するとなると作図もできないわけですね. そして，ここまでいくと Do math，Make math になるわけですね．それが数学を作るということに関わっていきます．このはじめの問題状況では数学を作るまでは全くいかない．5 分割ができて，ああよかったな．この 5 つまでならまだまだもったいない．数学を作っていくという経験をしてほしいと考えます．そしてこのような問題において直観的に見方をかえていこうとするならば，それは経験が必要なわけですね．1 つの図をどう見ていくかというようなことに焦点をあてるような授業が必要なわけですね．またそのものにとらわれるのではなくて，そうじゃない場合だったらどうなるのかという経験をすることで，際立って見えていくような経験も必要です．また空間概念，立体についての意識は，切断がなくなってからかなり落ちていると思います．無くなったからやらないのではなくて，無くなってからもやればいいという意識で，実際に立体を持ってきてやってみるとか，最短距離の問題も展開図の関係で，展開図のいいところは最短距離を求める際に直線で表せるからだということもありますね．そのような意識で見るということですね．それから三平方の定理については，何百種類も説明の方法があって，昔は回転していく等積変形でやっていくのが主流だったんですが，今はやらないですよね．変換はやらずに，静的にやるとか，パズルでやるとかでやっていてかなり見方が変わっているんですが，変換的な見方もあっていいし，いろんな方法を考えてもいいですね．パズルとしてはパズルだけを与えるのでは面白くないですね．反例といいますか，鋭角三角形の場合や鈍角三角形の場合はどうなるのかというような，そのものだけでなくそうじゃない場合も考えると際立ってきますね. ぴったりになるということはこの場合だけなのかということがわかってくるわけですね.

ではここで 1 つ作業をしてもらいます．皆さんお手元の紙の上のほうに，どこでもいいので，3 点 A，B，C をとってください．あまり大きくならないようにお願いします．これは固定します．どこか，A の近辺に点 P を取ってもらって, 点 P を A に対して点対称にとったものを Q. また B に対して Q を点対称についてものを R．R を C に対して点対称に移したものを S とします．そこで問題は P＝S となるように P を定める．どこに P を配置するのか．ちょっと考えていただきますか．それが三角形 ABC の場合でできた場合は, 任意の長方形 ABCD で, PQRST として P=T を考えてみてください．そして長方形が終わりましたら，平行四辺形をやっていただいて，最後に台形を考えてみてください． 上で挙げた問題は，中点連結定理の逆の発想を用いることで求めることができます．そこで三角形，長方形，平行四辺形については中点連結定理の逆の発想を用いれば求めることができるのですが，台形だけは P＝S にはなりません.（三角形の例を下に示す.）

また紙，今回の場合では A4 の紙を，半分に折ることは簡単ですが，正確に 3 等分に折る方法はどのようにすればいいでしょうか？

そして 3 等分ができたら 4 等分，5 等分は可能か？そして n 等分するにはと考えていける．



研修名；教科リーダー研修（中学校数学）
講演日；2006 年 8 月 30 日
於；鳥取県教育センター
記録者；川口卓己（鳥取大学大学院教育学研究科）

鳥取大学数学教育研究　ISSN 1881−6134

Site URL：http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/journal.html

投稿規定

❖ 本誌は，次の稿を対象とします。
  - 鳥取大学数学教育学研究室において作成された卒業論文・修士論文，またはその抜粋・要約・抄録
  - 算数・数学教育に係わる，理論的，実践的研究論文／報告
  - 鳥取大学，および鳥取県内で行われた算数・数学教育に係わる各種講演の記録
  - その他，算数・数学教育に係わる各種の情報提供

❖ 投稿は，どなたでもできます。投稿された原稿は，編集委員による審査を経て，採択が決定された後，随時オンライン上に公開されます。

❖ 投稿は，編集委員まで，e-mailの添付書類として下さい。その際，ファイル形式は，PDFとします。

❖ 投稿書式は，バックナンバー（vol.9 以降）を参照して下さい。

鳥取大学数学教育学研究室

〒 680-8551　鳥取市湖山町南 4-101

TEI & FAX　0857-31-5101（溝口）

http://www.fed.tottori-u.ac.jp/~mathedu/