

中学校数学の学習指導における 数学的活動の教授学的意義

進木 正貴

指導教員：溝口 達也

I. 研究の目的と方法

本研究は、「中学校数学の学習指導において、数学的活動はいかに扱われるべきか」という課題に答えることを目的としている。この課題に答えるために、以下の3つの研究課題を設定した。

研究課題1：本研究における「数学的活動」は、いかに規定すべきか。

研究課題2：本研究における「数学的活動」の、学習指導における機能は何か。

研究課題3：本研究における「数学的活動」を、いかにして授業に組み込むべきか。

研究課題1においては、学習指導要領に要請される数学的活動から、数学的活動のもつ数学教育における可能性について考え、先行研究であるFischbein,E氏、鳥田茂氏、能田伸彦氏の論文の数学的活動についての記述から得られる、数学学習と数学的活動との連関についての示唆をもとに、数学的活動とはいかなるものであるべきかを探り、本研究における「数学的活動」を規定する。

研究課題2においては、研究課題1を解決することによって規定された「数学的活動」を具現化して学習指導案を作成し、その学習展開に想定される「数学的活動」によって、生徒にいかなる変容を期待することができるかを考察し、学習指導における「数学的活動」の機能を抽出する。題材としては、中学校第2学年『円周角の定理』を用いる。

研究課題3においても学習指導案を作成し、実践した授業の記録の分析から教師の意図した「数学的活動」が実現されたかを検証し、研究課題2を解決することによって抽出された「数学的活動」の機能を有効にするためには、「数学的活動」をどのように授業に組み込むべきかのモデルを作成することを試みる。題材としては、中学校第2学年『連立方程式』を用いる。

II. 本論文の構成

第1章 研究の目的と方法

1.1 研究の動機

1.2 研究の目的

1.3 研究の方法

第1章の要約

第2章 数学の学習指導における

「数学的活動」の規定

2.1 学習指導要領における数学的活動

2.2 数学学習と数学的活動の連関

2.2.1 Fischbein,Eによる数学的活動

2.2.2 鳥田茂による数学的活動

2.2.3 能田伸彦による数学的活動

2.3 本研究における「数学的活動」の規定

第2章の要約

第3章 数学の学習指導における

「数学的活動」の機能

3.1 円周角の定理の学習指導について

3.2 円周角の定理の学習指導案

3.3 円周角の定理の学習指導から

抽出される「数学的活動の機能」

3.3.1 学習指導案の学習展開の考察

3.3.2 学習展開の考察から抽出される、

「数学的活動」の機能

第3章の要約

第4章 「数学的活動」を中心的課題とした 授業設計

4.1 「予想される反応」から

「期待する数学的活動」への転換

4.2 連立方程式の学習における

「数学的活動」の展開

4.2.1 連立方程式の学習指導について

4.2.2 連立方程式の学習指導案

4.3 連立方程式の学習から抽象される

「数学的活動」の展開モデル

4.3.1 実際の授業で観察された

「数学的活動」とその考察

4.3.2 連立方程式の学習指導における、

「期待する数学的活動」とその意義
4.3.3 連立方程式の授業実践から得られた、「数学的活動」の展開モデル

第4章の要約

第5章 研究の結論

5.1 研究の結論

5.2 残された課題

引用・参考文献

(1 ページ 35字×35行, 69ページ)

Ⅲ. 研究の概要 (第4章から抜粋)

3.1 「予想される反応」から

「期待される数学的活動」への転換

従来の学習指導では、提示課題の誤答例やそれにつながる解法の間違いが、「予想される生徒の反応」として予め設定され、そのような間違いを生徒が犯さないように説明したり、机間指導によって生徒の解決を修正したりしてきた。しかし、数学を創造し発展させる過程には試行錯誤の場面があったり、これまでの学習経験や獲得している知識を駆使して問題解決を遂行したりするのであるから、生徒が間違いを犯すのは当然のことである。そのような思考活動の中で、問題を分析する見方を変えたり、それまでの考え方を改めたりしながら解決に向かうのであり、間違ふことや手際よく解決できないことによって、それまでの見方や考え方を変容させる必然性が現れる。見方や考え方を変容させることで、数学が創造され発展してきたのであるから、教師は生徒の見方や考え方をどのように変容させるかを意図して、授業を設計すべきであると考え。その数学的な見方や考え方を生み出し、高次なものへ変容させるものが「数学的活動」であり、教師は生徒がそのような「数学的活動」を行うことを期待する。したがって、数学的な見方や考え方を育成する授業は、教師が「期待する数学的活動」を、如何にして生徒の中に実現するかを考え設計されるべきであると考え。

3.2 従来の連立方程式の学習指導の問題点

G社の中学校数学2教師用指導書解説編では、連立方程式の単元の目標として、以下のものがあげられている。

2元1次方程式の中の文字や解の意味を理解する。また、方程式を連立させることと、その解の意味を理解し、解を求めることがで

きるようにする。さらに、連立方程式を用いて具体的な問題を解決する能力を育てる。

(1) 2元1次方程式とその解の意味を理解する。

(2) 連立方程式とその解の意味を理解する。

(3) 連立方程式を解くには、2つの文字の一方の文字を消去し、1元1次方程式を導けばよいことを理解する。

(4) 文字を消去する方法には、加減法と代入法があることを理解し、これらの方法で連立方程式を解けるようにする。

(5) 小数や分数を含んだ連立方程式を解けるようにする。

(6) 具体的な問題を、連立方程式を用いて解決できるようにする。

この目標からは、連立方程式を考える上で最も重要な考え方である、既習の一元一次方程式に帰着させることや、解の意味や解法の理解の指導が大切にされているように捉えることができるが、同じG社の平成14年度版中学校数学指導計画作成資料における、連立方程式の単元の目標の記述では、以下のように簡素化され、「連立方程式を解くことができればよい」とも解釈できるものになっている。

○2元1次方程式、連立方程式の意味と連立方程式の解の意味を理解する。

○加減法、代入法によって、連立方程式が解けるようにする。

○やや複雑な連立方程式が解けるようにする。

○文章題を、連立方程式を用いて解けるようにする。

教科書を作成する立場がこのようなものであれば、教科書の内容をもとに授業を構成する教師は、連立方程式の解法である加減法、代入法の形式的処理に重点を置いた授業を展開することになる。実際、具体的な場面を考える問題ではなく、既に立式された連立方程式を問題として提示し、加減法、代入法を用いての処理方法が説明され、問題演習による処理技能の習熟に最も時間がかけられている。

このような計算処理の過程に重点を置き、規則に従って問題を処理するアルゴリズム的な活動も数学的活動とする捉え方もあるが、「数学を創造し発展させる過程のアイデアを練り上げる活動」を「数学的活動」と捉える筆者の立

場からは、「数学的活動」であるとはいえない。生徒が獲得するものは、計算処理の技能だけであり、数学的な見方や考え方を獲得させるものとはなっていない。また、従来の学習でも加減法、代入法の技能を身につけた後に、具体的な場面の問題を考える展開になるが、連立方程式を用いて考えることが前提となっており、アルゴリズム的な活動と変わりがない。したがって、「事象を数理的に考察する能力を高める」（文部省,1999）ことにはならないと考える。

3.3 連立方程式の学習指導の実践

3.3.1 授業設計の中心となる考え

従来の連立方程式の学習の問題点は、アルゴリズム的な技能の習得に終始し、数学的な見方や考え方を育成するものとなっていないことであつた。数学的な見方や考え方を育成する、創造的な活動を展開するためには、計算処理の過程に重点が置かれてきた学習を改め、その計算処理の方法を生み出す過程に重点を置いた学習へと転換する必要がある。本来、連立方程式は具体的な問題を解決する場面で必要になるものであり、唐突に立式されている連立方程式の解法を考えるのは、数学を創造していく活動としてはふさわしくない。連立方程式は文字式であり、文字式は「現実の世界の諸関係を数の世界の中での関係として記述する手段」（文部省,1999）であるわけだから、具体的場面から考え、表や図を用いて考える方法もあるが、未知数の条件式をつくった方が考えやすいことに気づかせ、その具体的場面と照らし合わせながら解法を考えていくようにするべきである。

連立方程式の学習を、数学を創造し発展させていくものとして展開する場合、連立方程式の解法である代入法、加減法を生み出す活動を中心的課題として授業を設計することが考えられる。その「数学的活動」の中で、はじめから代入法、加減法を生徒が生み出すことは困難である。既習事項である一元一次方程式に帰着して考えればよいことに気づいた後、どうすれば2つの文字の一方を消去することができるか、ここに生徒の試行錯誤の場面がある。はじめから代入法、加減法のような手際のよい方法が生み出されるのではなく、下の解法例のような、手際のわるい解法が考えられるはずである。

解法例- 1	解法例- 2
$\begin{cases} 2x+4y=94\cdots\textcircled{1} \\ x+y=35\cdots\textcircled{2} \end{cases}$	$\begin{cases} 5x+2y=660\cdots\textcircled{1} \\ 2x+3y=550\cdots\textcircled{2} \end{cases}$

$\begin{array}{l} \textcircled{1}-\textcircled{2} \\ 2x+4y=94 \\ -) x+y=35 \\ \hline x+3y=59\cdots\textcircled{3} \\ \textcircled{2}-\textcircled{3} \\ x+y=35 \\ -) x+3y=59 \\ \hline -2y=-24 \\ y=12 \end{array}$	$\begin{array}{l} \textcircled{1}-\textcircled{2} \\ 5x+2y=660 \\ -) 2x+3y=550 \\ \hline 3x-y=110 \\ -y=110-3x \\ y=-110+3x\cdots\textcircled{3} \\ \textcircled{3}\text{を}\textcircled{1}\text{に代入} \\ 5x+2(-110+3x)= \\ \qquad\qquad\qquad 660 \\ \qquad\qquad\qquad x=80 \end{array}$
---	--

このような解法を含め、生徒が生み出す様々な解法を手際のよい方法に工夫していった結果として、代入法と加減法にまとめられる。従来の学習では、このような解法は取り上げられず、できあがった結果だけが与えられていた。「数学の学習は、単に問題を解いて答えを求めるといっただけではない」（文部省,1999）のであり、なぜその方法で解くことができるのか、また、なぜその方法でよいのかを考える、解法を整理し洗練していくことも忘れてはならない。学習指導要領解説の中でも、以下のように記述されており、計算処理の方法だけを学ぶのではなく、その手続きのもとになっている原理、法則を理解するところまで考えが深まるよう、授業を設計しなければならないことが指摘されている。

中学生になると、記号的、形式的操作ができることに興味をもつようになり、数学的な表現と処理の仕方を学ぶのに適した年代なので、文字式の計算、方程式を解くなどの技能を学ぶが、その手続きのもとには原理・法則があること、原理・法則をうまく使って数学的な処理の方法が考え出されていることを理解させる必要がある。

これらのことをふまえ、連立方程式の解法である加減法、代入法を、生徒が自身の活動によって生み出すことを目標に、単元のはじめの4時間について、以下のように学習計画を立て実践した。

3.3.2 学習目標と提示課題

①第1次（第1時）

目標：2つの未知数を求める問題場面では、いくつの条件式が必要か考える。

・第1時の課題

10円玉と50円玉の重さを、2g, 5g, 10g
の分銅を使って求めよう。

準備：10円玉2枚, 50円玉2枚, 分銅(2g,
5g, 10gを各1個), 上皿天秤1台
<ねらい>

10円玉と50円玉の重さを求めるために天秤
を操作し、発見した数量の関係の表現方法とし
て文字式を利用することを考えさせたい。その
際、未知数が2つの場合は2種類の文字を利用
した式の方が簡潔に表現しやすいこと、釣り合
う関係を表現したものが方程式であることに気
づき、二元一次方程式を用いることのよさを理
解することができる。また、未知数が
2つの場合、1つの釣り合う関係だけでは問題
を解決することができず、複数の釣り合う関係
を発見しなければならないが、問題の解決過程
を振り返ることにより、未知数が2つの場合2
つの条件式が得られれば解を求められることに
気づかせたい。

②第2次(第2時・第3時)

目標：連立方程式の自分なりの解法を考える。
・第2時の課題

Aさん「リンゴ2個とみかん5個で340円
だったよ。」

Bくん「リンゴ1個はみかん1個より100
円も高いんだね。」

この二人の会話から、リンゴ1個とみかん
1個の値段はそれぞれいくらだろうか。未知
数は何個で、いくつの方程式を作ればよいか
考えて解決しよう。

・第3時の課題

Aさん、Bさんの2家族が動物園に行きま
した。Aさんの家族(大人3人, 子ども5人)
は入園料が3100円でした。Bさんの家族(大
人2人, 子ども3人)は入園料が1950円で
した。この動物園の、大人1人, 子ども1人
の値段はそれぞれいくらでしょうか。

<ねらい>

連立二元一次方程式の解決における困難は、
未知数が2つ存在することである。そこで、未
知数が1つの場合は解決できることから、既習
事項である一元一次方程式に還元すればよいこ
とに気づかせ、その還元方法を考えさせたい。
両問とも問題文から2つの未知数に対し2つの

条件式を立式することができる。その2つの二
元一次方程式をどのように利用して解決すれば
よいかを考え、工夫し、自分なりの解法を生み
出させたい。問題場面を抽象し立式される方程
式によって、第2時の課題は代入法、第3時の
課題は加減法が考えられやすいよう設定されて
いるが、はじめから代入法や加減法を生み出す
ことは困難であり、前述したような手際のわる
い解法であっても問題はなく、1つの文字を消
去する方法を考えなければならないことが明確
に意識されるようにしたい。

③第3次(第4時)

目標：自身の考えた解法の妥当性を考える。

・第4時の課題

次の問題を解いて、その解決の似ていると
ころや異なっていること、その他気づくこと
を見つけなさい。

問題A：鶴と亀があわせて35匹いる。その
足の数は全部で94本ある。鶴と亀
はそれぞれ何匹いるだろうか。

問題B：兄は鉛筆5本とノート2冊を買って
660円支払った。弟は鉛筆2本とノ
ート3冊買って550円支払った。
鉛筆1本, ノート1冊の代金はそれ
ぞれいくらだろうか。

<ねらい>

解決の過程を振り返ることで、問題の数学的
構造を理解し、連立方程式の解法である代入法,
加減法の基になる考え方を抽象することで、解
決の方法を知っているだけでなく、なぜその方
法でよいのかまで理解を深めたい。

問題Aは代入法で考えやすいもの、問題Bは
加減法で考えやすいものを提示しているが、前
述したような手際のわるい解法も含め、その共
通点として2つの文字の一方を消去し、既習事
項である一元一次方程式に還元して解くことが
あげられる。また、解法の相違点として、一元
一次方程式に帰着させる方法が異なることに気
づかせ、なぜ異なるのか式操作を振り返り、具
体的場面と照らし合わせて、行なった式操作の
意味を考えさせたい。そして、その式操作の意
味が具体的問題場面と照らし合わせても正当化
されることを1つの基準として、解法の妥当性
を検証させたい。その検証から、代入法、加減
法のよさとして、普遍性をもった解法であるこ
とを理解させたい。

3.3.3 実際の授業で観察された「数学的活動」とその考察

実際の授業で生徒が記入したワークシートと記録ビデオから、生徒の思考活動である「数学的活動」を観察し、以下のように考察した。

①第1次で観察された「数学的活動」

上皿天秤を操作することで、硬貨と分銅の釣り合う関係として、最初に

ア：10g を左にのせて、右に 50 円玉 2 枚と 2g をのせた。

を発見し、50 円玉が 4g であることを求めた。次に

イ：10 円玉を左に 2 枚のせて右に 50 円玉 1 枚と 5g をのせた。

を発見し、50 円玉が 4g であることから 10 円玉が 4.5g であることを求めた。その後、他の釣り合う関係を調べ、下の 2 つのものを発見し、ワークシートに記入した。

ウ：左に 50 円玉 1 枚と 10g、右に 10 円玉 2 枚と 5g

エ：左に分銅ぜんぶと右に硬貨ぜんぶ

「釣り合った関係を、なんとか方程式にしてみよう」という教師の言葉かけがあったため、10 円硬貨の重さを x g、50 円硬貨の重さを y g とし、それぞれの関係を以下のように方程式にした。

$$\text{ア：} 10 = 2y + 2$$

$$\text{イ：} 2x = y + 5$$

$$\text{ウ：} y + 10 = 2x + 5$$

$$\text{エ：} 2x + 2y = 10 + 5 + 2$$

このうちウとエだけを用い、解を求めた。

$$y + 10 = 2x + 5$$

$$y = 2x + 5 - 10$$

$$y = 2x - 5$$

$$2x + 2(2x - 5) = 10 + 5 + 2$$

$$2x + 4x - 10 = 10 + 5 + 2$$

$$2x + 4x = 10 + 5 + 2 + 10$$

$$6x = 27$$

$$x = 4.5$$

$$y + 10 = 2 \times (4.5) + 5$$

$$y + 10 = 9 + 5$$

$$y = 9 + 5 - 10$$

$$y = 14 - 10$$

$$y = 4$$

<考察>

最初に発見した釣り合う関係が一元一次方程式に表すことのできるものであったため、2 つの未知数のうち、一方は簡単に求めることがで

きた。次に発見した関係は二元一次方程式に表されるものであったが、先に求めた値を用いることでもう一方の値も求めることができた。この時点では、方程式の立式や代入という行為は意識されていないが、2 つの釣り合う関係から 2 つの未知数を求めることができたことには気づいていると考えられる。

この後、釣り合う関係ウとエを発見し、教師の言葉かけによって発見した 4 つの関係を方程式に表し、そのうちの 2 つを連立させて方程式を解き、解を求めている。このときの 2 つの方程式は、最初に解を求めたときに用いた 2 つの関係の式ではなく、後で発見した 2 つの関係のものを選んでいく。このことは、方程式を立式せずに解を求めたときに、2 つの釣り合う関係を用いばよいことに気づいたため、方程式を解いて解を求める場合も 2 つの関係から解を求めることができるのではないかと考え、先に用いなかった 2 つの釣り合う関係の式を、意図して用いたものと考えられる。結果として 2 つの方程式から解を求めることができ、最初に求めた解とも合致したことで、2 つの未知数があるときは 2 つの条件式があれば解を求めることができることを理解できたと考えられる。つまり、このような活動を行うことによって、学習目標である「2 つの未知数を求める問題場面では、いくつの条件式が必要か考える」ことを達成することが可能になったと考えられる。

また、イヤウのような x と y が左辺と右辺に別れて釣り合う状態を考えることで、一方の値を求めることができればもう一方の値も求めることができることに気づくことになる。一方の文字に注目して考えることで、既習事項である一元一次方程式に還元することにつながり、第 2 次の学習目標である「連立方程式の自分なりの解法を考える」ことの素地になるものと考えられる。

②第2次で観察された「数学的活動」

第 3 時の課題に対し、次のような解決が観察された。

大人… x 円 子ども… y 円

A さん $3x + 5y = 3100$

B さん $2x + 3y = 1950$

$$3x + 5y = 3100$$

$$-) 2x + 3y = 1950$$

$$x + 2y = 1150$$

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 1950 \\ -) \quad x + 2y = 1150 \\ \hline x + y = 800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 2y = 1150 \\ -) \quad x + y = 800 \\ \hline y = 350 \end{array}$$

<考察>

第1時、第2時の問題では、 x や y の係数が1である条件式をつくることができ、加減法的な解決や代入法的な解決も、それほど意識することなく式操作をしてきたが、これまでの方法では解決できない状況が起こっている。そこで、減算をすることで係数を減らすことができるというアイデアを生み出し、式の減算を行なったものと考えられる。そして、上手く係数を減らすことができたため、この操作を繰り返すことで一方の文字がなくなり、もう一方の文字の値を求めることができると考え実行した。この成功経験から、自分なりの解法を獲得し、連立方程式の解法は、一方の文字を消去する方法を考えればよいことに気づくことができたと考えられる。このように、生徒の行なった活動は第2次の学習目標である「連立方程式の自分なりの解法を考える」ことを達成するための望ましい活動であり、第3次の学習の準備として欠かすことのできないものである。

従来の学習指導では、生徒にこのような解法を行なわせないようにし、教師が与えた加減法、代入法を反復練習してきたが、自身の活動によって解法を得ることで、連立方程式は一元一次方程式に帰着させて解くということを理解でき、一方の文字を消去するための方法としての加減法、代入法のよさも感じるができるものとする。

③第3次で観察された「数学的活動」

2つの問題をどちらも代入法を用いて解決し、問われている「気づくこと、共通すること、異なっていること」については何も書けなかった生徒が観察された。この生徒はその後、問題Aに代入法を用いた解決過程、問題Bに加減法を用いた解決過程と、3.3.1で示した手際のわるい解法（解法例-2）を用いた解決過程が板書され、その比較をすることで、異なる点として以下のことをワークシートに記入した。

ア：Aは全体の数から x をひき、 y の数をだしている。

イ：Bは2つの式の差をだして計算している。

<考察>

2つの問題を同じ解法で解決したため、はじめは何を答えればよいのか理解できなかったが、途中で3つの解法が板書されたことによって、解決過程の式操作の異なる部分を発見し、2つのことを記入することができたと考えられる。

本時の学習目標は「自身の考えた解法の妥当性を考える」ことであり、解を求めることができたことで妥当性が証明されるのではなく、形式的処理の工夫に専念することによって検討されなかった、式操作の具体的場面との整合性を考えることである。式操作の意味付けをし、他の問題場面においても対応できる表現を考えていくと、手際のわるい解法では意味付けすることが困難だが、加減法と代入法はその基になっている考え方を次のように抽象することができる。

加減法…共通部分をつくって取り除く。
代入法…一方の値がわかっているものとして、他方の値をそれを用いて表す。

第1次、第2次で考えた解法を吟味し、よりよい解法に洗練していった結果としての加減法、代入法が、問題場面が異なっても上の考え方で意味付けすることができる普遍的な解法として理解されることが、この学習計画の目標である。

生徒の記述イは、板書された問題Bに加減法を用いた解決過程と、3.3.1で示した手際のわるい解法（解法例-2）を用いた解決過程の式操作の共通点をあげたものと見られるが、記述アは式操作の意味付けをしたものであり、学習目標を達成するために期待される活動を行なっていたと考えられる。

3.4 連立方程式の学習指導における、

「期待する数学的活動」とその意義

上の考察から、連立方程式の学習指導において、数学的な見方や考え方を育成する、創造的な活動を展開するためには、生徒が行なうことを「期待する数学的活動」として、以下のものが抽出される。

- A 未知数を求めるために、複数の条件式を立式し、その内いくつかの条件式を選択すればよいかを考える活動
(第1次の考察から)
- B 連立方程式を解くには既習事項である一元一次方程式に還元して解けばよい

ことに気づき、その還元方法を考える活動

(第2次の考察から)

- C 連立方程式の解法の妥当性を解決過程の式操作の意味に着目して考える活動
(第3次の考察から)

上の授業実践では、生徒がこのような「数学的活動」を行なったことで、連立方程式の解法として代入法、加減法を生み出すことが可能となり、学習目標が達成された。もし、授業構成において「数学的活動」が適切に位置づけられなかったならば、教師が設定する学習目標は達成されなかったであろうと考えられる。したがって連立方程式の学習指導において、上記の「数学的活動」は、授業構成の中心的課題として位置づけるべきものであることが、教授学的意義として認められる。

3.5 連立方程式の授業実践から得られた、

「数学的活動」の展開の1つのモデル

連立方程式の授業実践の考察から抽出された、生徒が行なうことを「期待する数学的活動」A、B、Cは、連立方程式の学習指導において数学的な見方や考え方を育成するための「数学的活動」である。授業構成においてこれらの「数学的活動」を適切に位置づけることで、学習目標を達成させることができることを述べたが、これらの活動はどのように生徒の数学的な見方や考え方を容れさせることを意図したものか、第1次から第3次のそれぞれの学習のねらいと照らし合わせて考察する。

Aの活動では、まず未知数を求めるために具体的場面の数量の関係を整理し、形式的に記述することを考える。そして、数学的に処理するために何が必要であるかを考える、というように思考を進めている。

Bの活動では、まず既習事項との関連を考える。そして、どのようにすれば既存の知識に帰着させることができるか、その方法を考える、というように思考を進めている。

Cの活動では、具体的場面を抽象し形式的に処理した解決を、具体的場面に戻して振り返ることで推論の妥当性を検証し、さらによりよい解決の方法を志向するように思考を進めている。

以上のことから、連立方程式の学習において生徒が行なうことを「期待する数学的活動」A、B、Cは、それぞれ以下のa、b、cのような

数学的な思考活動であると考えられる。

- a 具体的問題場面を抽象して、その中に潜む関係を形式的に記述し、数学的な処理の方法を考える。
- b 何に帰着させて考えればよいか見通しを立て、その方法を考える。
- c 帰着させた方法は普遍的なものとなるのか吟味する。

このように記述することで、連立方程式の学習指導に特化した「数学的活動」の展開から、一般的な学習指導における「数学的活動」の展開の1つのモデルとすることができると考える。

IV. 研究の結論

研究課題1に対しては、以下の結論が得られた。学習指導要領における数学的活動の考察から、中学校数学の学習指導においては、外的活動と内的活動の連関が重要であることと、操作や類推など個々の活動として捉えるのではなく、問題解決過程の一連の活動として捉えるべきものであることの示唆を得た。また、先行研究である Fischbein, E 氏、島田茂氏、能田伸彦氏の論文における数学的活動の考察から、問題解決過程の思考は形式、アルゴリズム、直観など数学の構成要素が複雑に作用することや、数学の学習場面において創造的な活動が要請されること、具体的・操作的活動は概念形成のためのイメージ作りに貢献し、具体的レベルと抽象的レベルの思考の往復を想定する必要があることの示唆を得た。さらに中島健三氏、根本博氏の主張から「数学的活動」は「考えたことをとことん適用し、どうしても不都合であると分かったときにこれまでと矛盾しないように修正を施しよりよいものにつくり上げて」(根本, 1999) いくような「算数・数学にふさわしい創造的な活動」(中島, 1981) であるべきであるという示唆を受け、本研究における「数学的活動」は、「数学を創造し発展させる過程のアイデアを練り上げる活動」と規定し、計算練習や同じパターンの問題演習などのアルゴリズム的な活動は、アイデアの練り上げにはならないため「数学的活動」に含まないことにした。また、このように「数学的活動」を規定した場合、複数の内的な活動や外的な活動が連関し、その思考は個々人の既得知識や知識構造によって異なるため、従来の学習のように教室の全員が一斉に同じ活動をするものではない。

研究課題2に対しては、以下の結論が得られた。研究課題1を解決することによって規定された「数学的活動」を実現するために、授業においてその学習内容を考える必要感が、生徒に納得のいくように示せるように工夫する必要がある。円周角の定理の学習の場合、従来は「観察、操作や実験」として、円周上に弧を決定し、その弧に対するいくつかの円周角を計測することを教師が指示して、円周角の定理の発見が為される学習展開が多く見られたが、この図形の性質を発見できる状態を教師が設定するのではなく、その状態を生徒自身がつくり出し発見する創造的な活動を「数学的活動」として教師が意図的に学習展開に仕組む必要があると考えられる。このように考え立案した学習指導案の考察から、「数学的活動」の機能として、以下のものが抽出された。

- 機能1：問題解決へのアイデアを生み出す。
- 機能2：既存の知識の理解を深める。
- 機能3：数学的な知識・技能を獲得する。
- 機能4：数学的な見方や考え方を育成する。
- 機能5：教師にとって、生徒の思考の状態を把握できる。

研究課題3に対しては、以下の結論が得られた。「数学を創造し発展させる過程のアイデアを練り上げる活動」を、本研究における「数学的活動」と規定し、その機能が有効となるよう授業を構成する場合、従来の、「予想される反応」として誤答や解法の間違いを想定し、その予防を意図して立案していた学習指導案から、「期待する数学的活動」として学習のねらいである生徒に育成したい数学的な見方や考え方を生み出させるための「数学的活動」が実現するよう意図して立案する学習指導案への転換が要請される。このような考え方で、中学校2年生の連立方程式の学習指導案を立案し実践したところ、その授業記録の考察から、連立方程式の学習展開のモデルが抽出された。さらに、連立方程式の学習指導に特化した「数学的活動」から、一般的な学習指導における「数学的活動」へ抽象することで、中学校数学の学習指導の展開の1つのモデルが抽出された。

以上のことから、生徒が学習目標を達成することができるよう授業を構成する際の、中心的課題として位置づけるべきものであることが「数学的活動」の教授学的意義として認められ

た。

本研究では、「数学的活動」を中心的課題とした授業設計の1つのモデルを抽出することができた。しかし、数学を創造し発展させる過程が1つのパターンしか存在しないということは考えられない。したがって、他のモデルも構築し、教材に適したものを授業設計において選択できるようにすることが考えられる。

また、授業構成の中心的課題として、「期待する数学的活動」を位置づけるだけでは、実際の授業で生徒が教師の期待通りに活動を行う保証はない。「期待する数学的活動」が実現されるためには、まず、「期待する数学的活動」が行われるように課題の設定が為されなければならない。そして、生徒の考えのままに「数学的活動」が行われた場合、生徒の数学的な見方や考え方は、教師の意図しないものへ向かうことも考えられる。つまり、生徒の「数学的活動」が停滞したり、教師が意図しないものへ発散したりすることがないようにする必要がある。そのためには、生徒の考えのままで「期待する数学的活動」が実現されるよう、適切な支援を施す準備をしておかなければならない。また、教師が支援すべきことは、生徒の解決の修正ではなく、固執したり発散したりした見方や考え方を変えるきっかけをつくることであると考えられる。したがって、「期待する数学的活動」を生徒が行なうことを可能にするための、課題の設定と適切な支援についての研究も、今後の課題として残される。

主要引用・参考文献

- ・ Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. Biehler, et al. (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Kluwer, pp231-245
- ・ 溝口達也. (2003). 問題解決と評価 算数・数学教育論. 西日本法規出版株式会社
- ・ 中島健三. (1981). 算数・数学教育と数学的な考え方. 金子書房
- ・ 根本 博. (1999). 数学的活動と反省的経験. 東洋館出版社
- ・ 能田伸彦. (1983). 算数・数学科オープンアプローチによる指導の研究. 東洋館出版社
- ・ 島田 茂. (1977). 算数・数学科のオープンエンドアプローチ. みずうみ書房