卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究, 第 8 号, 2006】

数学教育における意味の拡張を基にした教材解釈とその展開に関する研究

熊谷　祐司

指導教員：矢部敏昭

Ⅰ．研究の目的と方法

本研究の目的は、第一に、数学教育における意味の拡張の指導方法を明らかにすることである。第二に、真野祐輔氏の意味の拡張場面の４つの活動を基に中学校数学の授業を展開することを検討することである。

また、方法として真野氏の先行研究で指摘する意味の拡張場面の４つの活動を検討するとともに、他の数学の内容（教材）を考察するものである。

真野氏のかけ算の意味の拡張場面での４つの活動は以下の通りである。

『1)　整数の場合に成り立ったかけ算の意味が、小数の場合（×小数）では不都合であることの認識；

2)　「×小数」の場合に成り立つ意味の構成；

3)　新しくつくった意味と既存の意味との比較；

4)　既存の意味を新しい意味に統合；』(1)

Ⅱ．本論文の構成

Ⅲ．研究の概要

3.1 比例から一次関数の拡張

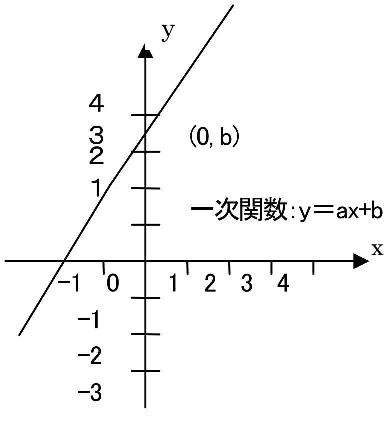
比例から一次関数の拡張は、真野氏の意味の拡張の４つの活動場面を用い、また学習者の立場からではなく、数学的内容に即して考察する。

1)比例の場合に成り立った意味が、一次関数の場合に不都合であることの認識

比例（例えば、y＝3x）の意味は対応する x と y についてつねに $\frac{y}{x}$ の値は一定になることや x を２倍、３倍すれば、y も２倍、３倍になることなどが比例の性質や意味であると考えられる。しかし、例えば、y＝3x＋2 では、比例の関係式では表せないこと、対応する x と y について $\frac{y}{x}$ の値がつねに一定にならないことやまた、x を２倍、３倍しても y は２倍、３倍にならないので、比例の場合に成り立った意味に不都合が生じると考えられる。

2)一次関数の場合に成り立つ意味の構成

一次関数の一般式を y=ax+b とすることで、b≠0 のときは、関数のグラフは原点を通らないで、点(0, b)を通る直線になるように新しく意味をすることで、一次関数の場合に成り立つ意味を構成する。（下図）



3)新しくつくった意味と既存の意味との比較
比例の意味では、原点を通るグラフと考えていたが、一次関数の意味で考えると、比例の式は$y=ax+b$の$b=0$の場合に成り立つ式と考えることができると考えられる。一次関数は原点を通る場合と通らない場合があるとすることで、4)の二つの意味を統合することにつながる。言い換えれば、数学的な立場から述べると、一次関数の学習において、$y=ax+b$を学ぶ。そのとき、$b=0$の場合では、比例の式になるので、一次関数の一般式の中に比例の式が含まれ、統合していくことが言える。

4)既存の意味を新しい意味に統合
1)から3)の活動を通して、比例は一次関数$y=ax+b$の$b=0$のときのグラフになると考えることにより、新しい意味の中に統合されたと考えられる。

3.2 □^{2}=k(平方完成の解法)の形の図的解釈について

『例えば、$x^2+6x=0$はどうすれば$\square^2=k$という形に直すことができるのか。まず、x^2+6xを図1のような長方形の面積と考える。図2のように、$6x$を表す部分を2等分し、(イ)の部分を(ロ)のところへ移動させる。

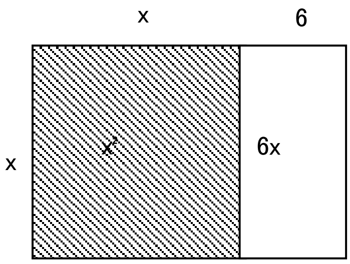


図1 x²+6xを表す長方形

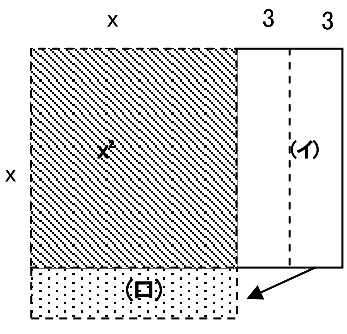


図2 6xの部分を2等分して移動させる。

すると、図3のようになり、(ハ)の部分さえあれば、1辺が$x+3$の正方形になる。

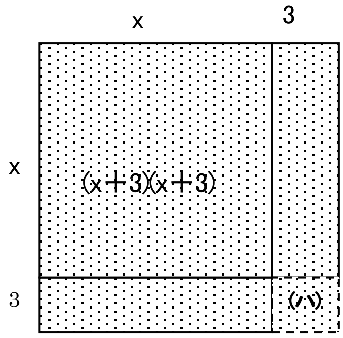


図3(ハ)の部分があれば正方形になる。

二次方程式$x^2+6x=0$から、両辺に同じ数(ハ)をたせば、$\square^2=k$の形になる。よって、$x^2+6x=0$に両辺に(ハ)の部分を加えると、x^2+6x+(ハ)$=0+$(ハ)となる。$x^2+6x+9=9$となり、1辺が$x+3$の正方形の面積になるので、$(x+3)^2=9$となる。このようにして$\square^2=k$の形に変形することができる。』[2]

3.3因数分解の解法についての解釈

『例えば、$x^2+5x+6=0$という二次方程式の左辺は因数分解でき、$(x+2)(x+3)=0$…(1)となる。これは、$x+2$と$x+3$をかけて0だから、少なくとも一方は0といえる。よって、

$x+2=0$	$x+3=0$
$x=-2$	$x=-3$

となる。このような因数分解を使った解き方は、$A\times B=0$ならば　$A=0$または$B=0$という性質を利用している。』[2] また、因数分解の解法の展開では、『因数分解を使って二次方程式を解く過程は、例えば、

$$x^2+5x+6=0\cdots(1)$$
$$(x+2)(x+3)=0\cdots(2)$$
$$x+2=0,x+3=0\cdots(3)$$
$$x=-2,\quad x=-3\cdots(4)$$

のように同値な変形をして、解を求めてきた。ここでは、(1)～(4)までの式が同値となるので、逆に(4)から(2)の式を導くこともできる。すなわち、解が$x=-2$であれば、$x+2=0$、$x=-3$であれば、$x+3=0$という式が必要になる。これを展開すると、(1)の式となる。したがって、$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$という形で因数分解できる。』[2]

以上から、因数分解の解法は、A×B＝0 ならば、A＝0 または B＝0 という考え方であると思われる。また、方程式の解を用いて、方程式をつくることができると考えられるので、今までの逆の過程で行うことについても授業の展開ができる。

3.4「因数分解の解法」の考えに基づく問題開発

因数分解の解法の意味や考え方を生かした問題開発を試みた。また、因数分解の解法の展開については、自分で考えた問題であり現行の教科書で扱わない内容である。

問題2　2と4をそれぞれ解とする二次方程式をつくりなさい。

(1)　ねらい　方程式の解から二次方程式をつくることを通して、因数分解の解法の考え方の A×B＝0 ならば、A=0 または B=0 を活用することで因数分解の解法のよさを示す。

(2)　予想される数学的活動

S1

x＝2、4…【0】
x－2＝0 または x－4＝0…【1】
(x－2)(x－4)＝0…【2】 x^2－6x＋8＝0…【3】

S2

二次方程式 ax^2＋bx＋c＝0 の 2 つの解が p、q のとき、$p+q=-\frac{b}{a}, pq=\frac{c}{a}$ となることを用いて、2 つの解が 2、4 なので、2＋4＝6、2×4＝8 となる。…【1】x^2の係数を1とすると、x^2＋bx＋c＝x^2－(p＋q)x＋pq から、x^2－6x＋8＝0 と二次方程式をつくる。…【2】

S2'　2 つの解を p と q とする。解と係数の関係と、二次方程式の x^2の係数を 1 とし、p＋q と pq に求めた数値を代入すると、x^2－6x＋8＝0 となり、二次方程式をつくる。

S3

ax^2＋bx＋c＝0…【0】x＝2 を代入すると、4a＋2b＋c＝0…【1】 x＝4 を代入すると、16a＋4b＋c＝0…【2】【1】－【2】より、b＝－6a …【3】【3】を【1】に代入 c＝8a…【4】【0】に代入 ax^2－6ax＋8a＝0…【5】 a で両辺を割る x^2－6x＋8＝0…【6】

(3)　数学的活動の価値・意味

S1 は、2、4 が解なので、式を導く【1】と考えられる。次に、x－2＝0 または x－4＝0 のいずれかが成り立つので、【2】となり、展開して【3】と考えられる。よって、A×B＝0 ならば、A=0 または B=0 という性質を用いて方程式をつくると考えられる。

また、x^2の係数が 1 以外の係数の場合でも式を表すことができる(例えば、x^2の係数が 3 である場合は 3(x－2)(x－4)＝3x^2－18x＋24＝0 と表すことができる)と思われる。以上から、解が 2、4 となる二次方程式は無数につくることができると考えられる。

さらに、(x－2)(x－4)＝x^2－(2＋4)x＋2×4＝0 から、この式は 2 つの解 2、4 を足して 6 かけて 8 ということを表している。よって、S2(S2')の考え方の解と係数の関係となるので、同じ考え方と見ることもできると思われる。また、S3 の式のつくり方に比べると、因数分解の解法の式展開の方が、容易に二次方程式をつくることができることがあげられる。

S2 は、2 つの解が 2、4 なので、解と係数の関係から、【1】として、x^2の係数を 1 とすることで、x^2－6x＋8＝0 と二次方程式をつくる【2】と考えられる。

また、S1 と同様で x^2の係数が 1 以外の係数についても、二次方程式をつくることができる(例えば x^2の係数が 5 の場合は{5x^2－5(p＋q)x＋5pq＝0}、5x^2－5×6x＋5×8＝5x^2－30x＋40＝0 として表すことができる)と思われる。

以上から、S2 の方法でも、解が 2、4 となる二次方程式は無数につくることができると考えられる。

S2'も、S2 と同様な考え方で、2 つの解を p と q という文字で置いてから、解と係数の関係を用いて、x^2－6x＋8＝0 と二次方程式をつくると考えられる。

S3 は、因数分解の解法以外の考え方で、二次方程式をつくる考え方である。【0】として、x＝2 のとき【1】、x＝4 のとき【2】をそれぞれ式に代入する。ここで、加減法により、b と c を a を用いて表す。よって、x^2－6x＋8=0 と二次方程式をつくる【6】と考えられる。

Ⅳ.　研究の結果

本研究のまとめとして、数概念の拡張、演算の可能性、方程式の解の存在等における不都合さの指摘は数学的内容の発展という立場での考察から導かれるものである。実際の授業構成と展開を考えるに置いて、指摘したこれらの不都合さを学習者側に立って、考えることが必要であり、教材解釈において考えていく課題とした。

また、意味の拡張は、真野氏の論文の中の小数の乗法の拡張の授業展開の中で子どもに期待される4つの活動を基に、他の単元についても、小数のかけ算の意味の拡張の展開のように、問題について、子どもが既存の知識のままでは解決できないという不都合さ、違和感を感じ、その困難さや不都合さを乗り越え意味づけを行い、さらに、その意味づけによって導かれた方法に基づいて既存の内容を捉え直し、既存の知識を新しい知識の中に入れる活動を他の単元に置き換えても展開できるのか検討してきた。

第3章の二次方程式の平方完成の解法と因数分解の解法の2つについても、初めは、意味の拡張の展開のように因数分解の解法は、平方完成の解法の中に含まれ、拡張していくと考えていたが、検討していくうちに、それぞれの解法は、考え方や意味が異なるものであると考えるに至り、これら2つの解法は拡張の関係にあるのではなく、別々の解法として捉えることにした。

平方完成の解法について、平方完成の解法の$□^2=k$の形に変形することは、正方形の面積と解釈することができる。平方完成の解法を用いる展開例では、二次方程式の解を求める式の展開の手続きを図的に解釈することで、平方完成の解法の意味を理解できることが分かった。しかし、式展開を検討する際に、正方形の面積の一辺の長さが負になる場合や、求めるxの数値が図のどこに表されるのかということが疑問に残り、$□^2=k$までの式展開の手続きしか、図的解釈ができないということが分かった。以上から、すべての二次方程式の式展開について、図的解釈ができないということが明らかになった。

また、因数分解の解法を用いる展開例については、因数分解の解法のよさや考え方を生かした問題開発を試みた。それは、方程式の解から、式をつくる問題である。またこの問題は、現行の教科書の二次方程式の内容では扱われていないものであり、自分が考えたものである。

今後の課題として、第一に、真野氏の意味の拡張場面を基に教材解釈を行ったり、数概念の拡張について数学的な内容から考察をし
たが、拡張と一般化のそれぞれの意味やこれらの違いについて明確にしていきたい。

第二に、意味の拡張を基に方程式から関数、比例から一次関数、一次関数から二次関数のそれぞれの展開について検討してきたが、子どもが未知の問題について既存の知識では不都合や違和感を感じるのか、という意識化をどのようにすればよいのかということや、真野氏の3)の既存の意味と新しい意味の比較をどのように展開すればよいのかということについて考察していきたい。

第三に、今回、真野氏の意味の拡張の4つの活動を基にして、二次方程式の中で扱われる平方完成の解法、因数分解の解法は考え方や意味が異なるものであると考えるに至り、それぞれの解法の授業展開を考察してきたが、両方の解法を用いる授業展開についても検討していきたい。

主要引用・参考文献

(1)溝口達也、矢部敏昭、姫田恭江、真野祐輔　小数の乗法の意味の拡張：教授学的契約の顕在化と認識論的障害の発現を視点として　第36回日本数学教育学会論文集　P163～168

(2)二次方程式の探求　本間俊宏・坂倉秀樹・寺田幹治　1979/04/10　P29～30、P34～38、P42、P62～65