卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究，第８号，2006】

生徒に期待する数学的価値と教師の支援に関する研究

～式の展開における置き換えの学習指導に焦点をあてて～

友森　達也

指導教員：溝口達也

Ⅰ．研究の目的と方法

本研究の目的は、学習指導において教師が生徒に対して行う支援がどうあるべきか。実際の授業場面において、どのように行われるべきかについて検討し明らかにすることである。この目的を明らかにするために以下の課題を設定する。

課題１、学習指導における支援とは何か。

課題２、支援を行うために教師がするべきことは何か。

課題１に対しては支援と数学的活動との関わりから学習指導における支援とは何かを考える。

課題２に対しては、式の展開における置き換えの学習指導を事例として、課題１からえられた知見をもとに学習指導案を作成し、そこでみられる問題点と改善点を検証する。

Ⅱ．本論文の構成

Ⅲ．研究の概要

３．１　数学的活動とは

はじめ私は支援とはただ単に生徒が次の数学的活動へ移るために助言することであると考えていた。問題解決学習は問題掲示、児童・生徒の自力解決、練り上げといった流れで授業は行われている。児童・生徒の自力解決の中の数学的活動といわれている前後には支援が必ずといっていいほどある。そこで、支援と数学的活動とは何かしらのつながりがあるのではないだろうかという疑問をもち、まず数学的活動とは何かを調べた。

『既成の数学の理論を理解しようと考えたり、数学の問題を解こうとして考えたり、あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり、数学を何かに応用して、数学外の問題を解決しようとしたりする、数学に関係した思考活動を、一括して数学的活動と呼ぶ』

島田(1977)においてはこのように数学的活動について述べられている。また、

『「数学的活動」とは、学校数学、主に、小学校の算数と中学校の数学に関連した思考活動を、総称して呼ぶことにする。したがって、ここでの「数学的活動」に含まれるものは、具体物からの概念形成、概念間の関係判断と関係推理、あるいは、数学の問題や内容の理解と解決、さらに、数学的活動による表現や処理から数学の問題に適用したり、応用したりするなどの諸活動を総称するものである。』

能田(1983)においては、このように数学的活動について述べられている、このような数学的活動に関する記述より、両氏においては数学的活動とは数学を行う際の思考活動として捉えられていることが理解される。確かに、両氏の述べている思考活動を数学的活動として理解できる。しかし、両氏の述べている数学的活動の捉え方としては支援を行うという立場から考えると不十分であると考える。なぜならば、授業を行う際、教師側の立場に立ったとき両氏が述べているように思考活動そ

のものを数学的活動と捉えると、数学的な見方・考え方を読み取ることが困難であろう。
数学的な見方・考え方が読み取れなければ、生徒がどのように考えているか推測できず、教師はどのような支援すればいいのか分からない。教師が生徒の数学的な見方・考え方を読み取る方法として、溝口(2003)は数学的活動を以下のように述べられている。
『「数学的な見方・考え方」は、文字通り”見方”、”考え方”であって、それは本来、目に見えないもの、観察不可能なものである。評価のプロセスの定義は、このことを指摘したものであるといってよい。すなわち、我々が評価しようとする事柄は、本来観察不可能なものである。その観察不可能なものに対する命題を作り上げるのであるから、その証拠となる観察可能なものに拠る必要がある。では、そのような観察可能なものとして何が挙げられるのか。まさに、ここに「算数的活動」あるいは「数学的活動」を位置づけたいと考えるのである。』
これを基に考えると、生徒の数学的な見方・考え方が顕在化されたものを数学的活動と捉えることで数学的な見方・考え方を読み取れる。支援をする際、生徒の数学的な見方・考え方が顕在化されたものを数学的活動としてとらえることによって支援は機能するのではないかと私は考える。

３．２　支援とは

　現在の問題解決学習に対する考え方は、問題解決の過程を通して、新しい知識や技能を獲得させるという考え方である。問題解決学習での数学的活動とは、新しい知識や技能を獲得させるような活動でなければならない。また、問題解決学習を考えるとき、問題とは生徒にとっての問題であるという考えもある。生徒にとっての問題は、一人で解くことが困難であるが、それを解くことにより新しい知識や技能を獲得できる。そのためには支援というものが必要となる。つまり、学習指導における支援というのは、新しい知識や技能を生徒に獲得させる手段のひとつであると考える。
また、能田(1983)は、
『子どもと同時に数学に開かれている指導とは子どもの発想や考えを取り上げ、それを数学的活動として位置づけながら発展させ、できることなら、子どもが進んで学習し、よりよい数学的活動を行うことができるよう助成すること』
と述べられている。つまり、子どもによりよい数学的活動を行うことができるように助成することが、子どもと数学の両方に開かれている指導と言い、よりよい数学的活動を行うことができるよう助成するものが「支援」と言えるだろう。

３．３実際に行った授業の分析

授業目標

　式の展開で文字を用いて、乗法公式にあてはめ、手際よく計算することができる。

問題

$(a+3b+c)(a-3b-c)$を計算してみよう。

自力解決Ｃ

文字の置き換えをせずに、分配法則を用いて答えを導く。

$$(a+3b+c)(a-3b-c)$$

$$=a\times a+a\times(-3b)+a\times(-c)+\cdots$$

$$=a^2-9b^2+6bc-c^2$$

自力解決Ｂ

　共通な部分を作り、一つの文字に置き換え、乗法公式で答えを導く。

$$(a+3b+c)(a-3b-c)$$

$$=(a+M)(a-M)$$

$$=a^2-M^2$$

$$=a^2-(3b+c)^2$$

$$=a^2-9b^2+6bc-c^2$$

自力解決Ｃの生徒から自力解決Ｂへの支援

　今までに習った乗法公式に似た形を作ってみよう。

　実際に行った支援では、自力解決Ｂへ移行した生徒はほとんど見られず、すでに分かっていた生徒の回答を黒板に書かせ、全員に納得させるような形になってしまった。この支援では機能したとは言えず、能田氏のいう子どもと数学の両方に開かれている指導とは言えない。また、実際に行った支援で自力解決ＣからＢへ移行したとしても、本当にこの数学的活動で新しい知識や技能を獲得

できたと言えるのだろうか。簡単な計算方法を身につけたというだけではないだろうか。つまり、私がしたことは「支援」とは全く違うものであると考える。

しかし、支援を考える前に、そもそもこの教材をなぜ扱うのだろうか。

ここでの中心となる活動は「置き換え」をすることである。教師は、「置き換え」の有用性を知らなくては、なぜこの教材を扱うのか分からない。それを知ることで、この授業でどのような授業目標を設定し、どのように問題を掲示し、どのように支援をすればいいのかが言えるのではないだろうか。

３．４式の展開における「置き換え」の数学的価値

中学校指導要領解説では、

『一次式と一次式の乗法では、単に形式的に計算できるだけではなく、交換、結合や分配法則などを基にして計算できることを理解することが大切である。例えば$(a+b)(c+d)$を展開するのに$a+b$をMと置いて$M(c+d)$と考えるように、式を一つの文字に置き換えると、既に知っている単項式と多項式の乗法に帰着することができ、思考や計算が容易に進められる。』

と述べられており、思考や計算が容易に進められることがこの教材での「置き換え」の有用性であると考えられる。しかし、思考や計算が容易に進められるためだけに置き換えをするのだろうか。置き換えをすれば簡単に思考や計算が容易に進められることが有用性であったとしても、この有用性だけだと時間はかかるが分配法則の方がいいと思う生徒もいるに違いない。また、乗法公式を導くためにMと置き換えるならばあまり必要性がみられない。乗法公式も分配法則で導くことができるからである。まだ他の有用性があるのではないだろうか。新たに数学史からの観点から見ることにした。$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$と$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$はカジョリ 初等数学史によると古い時代のインド人およびアラビア人には知られていた。その後、ニュートンによって二項定理が発見された。ニュートンの推論にしたがえばnが正または負の整数でも分数でも、$(a+b)^n$の展開が与えられる。nが正の整数の場合はパスカルの“算術三角形”(1654)によって二項係数を得ている。

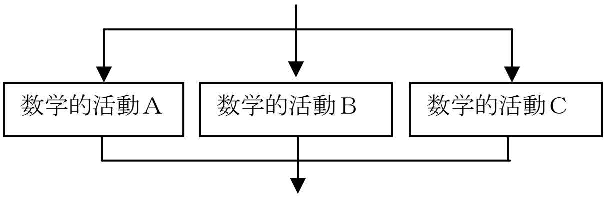
中学校では、$n=2$までの展開を習う。これは$(a+b)^n$の特殊な場合であるといえる。しかし、$n=2,3,4\cdots$としていくことで、パスカルの“算術三角形”では、計算せずに$(a+b)^n$の展開式の係数が分かる。つまり、中学校では$n=2$までしか習わないことで、「置き換え」は計算を簡単にするためだけの手段でしか感じられないが、授業でパスカルの“算術三角形”を扱うことで、「置き換え」は計算を簡単にするだけではなく、$(a+b)^n$の展開式を導く手段でもあると考える。これが、式の展開における「置き換え」の数学的価値ではないだろうか。

３．５「置き換え」の数学的価値を踏まえた授業の流れ

「置き換え」の数学的価値をパスカルの“算術三角形”を扱うことで、計算をするだけではなく、$(a+b)^n$の展開式を導く手段であると考えたが、授業ではどのように扱うのか。私は、問題の中に$(a+b)^n$の展開式を導くようにさせ、導く際に「置き換え」を用いてパスカルの“算術三角形”に気づかせるような流れがいいのではないかと考える。問題に$(a+b)^2$、$(a-b)^2$などの乗法公式だけの計算だけで、集団討議でパスカルの“算術三角形”を扱うと、「置き換え」が$(a+b)^n$の展開式を導く手段であると生徒はあまり感じないだろう。生徒が体験することで、より「置き換え」は計算を簡単にするだけではなく、$(a+b)^n$の展開式を導く手段でもあると感じるのではないだろうか。

例

> 問　$(a+b)^n$という計算をしたい。$n=2,3,4\cdots$としていくと、それぞれ展開式はどのように表すことができるだろうか。まず、$n=2$, $n=3$のときの展開式を表してみよう。(分配法則だけではなく、より簡単に展開式が表せられる方法はないだろうか。)



集団討議

▼パスカルの“算術三角形”について述べる。

$n=1$　　１　１

$n=2$　　１　２　１

$n=3$　　１　３　３　１

$n=4$　　１　４　５　４　１

Ⅳ．研究の結果

本研究では、課題１に対しては以下のように定義した。

> 子どもによりよい数学的活動を行うことができるように助成することが、子どもと数学の両方に開かれている指導と言い、よりよい数学的活動を行うことができるよう助成するもの

課題２に対しては、式の展開における置き換えの学習指導に焦点を当てて考えた。ここでは、少なくとも教師は指導案を作成する際に生徒に数学的価値を獲得させるためには、中学校指導要領解説や教科書通りにするだけでは限界があり、新たに数学史という観点から教材を見つけ、それを授業で扱うことで数学的価値を獲得させられるのではないかと考えた。今後の課題としては、指導案を作成する際に教材をどのように教材を扱い、問題として扱うならどのように問うかを考える必要がある。

主要引用・参考文献

- 成１８年度版　数学教科書　啓林館
- 中学校学習指導要領解説　数学編／文部科学省／H１１．９．２
- 島田茂(1977)　算数・数学科のオープンエンド アプローチ
- 能田伸彦(1983)　算数・数学科　オープン アプローチによる指導の研究
- 溝口達也(2003)　問題解決と評価
- フロリアン・カジョリ著　小倉金之助補訳(1960)　カジョリ 初等数学史　上巻・下巻