卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究、第 8 号、2006】

中学校数学における命題の連鎖に関する研究
～図形領域に着目して～

尾形　美保
指導教官：矢部敏昭

Ⅰ. 研究の目的と方法

1.1 本研究の目的と方法

本研究の目的としては、「命題の連鎖」とは何か、生徒が証明問題を構成していく過程における困難性について、生徒が自ら 1 つの命題から新たな命題を作り出せるようになるにはどのような教師の支援が必要か明らかにすることである。

研究の方法としては、第 1 に、「命題の連鎖」について考察していく。その考察にあたっては、磯谷氏の先行研究と授業観察から検討する。第 2 に、証明問題を構成する困難性については、乾氏の「図形の性質の研究－その発見と創造－」を参考にして考察する。教師の支援に関しては、第 1、第 2 の検討より、具体的な事例を取り上げ考察する。

1.2 研究課題の設定

研究課題 1　「命題の連鎖」とは

図形領域に限定し、「命題の連鎖」を定義する。また、ある証明から新たな証明が生まれるような「命題の連鎖」を本研究では「大局的な命題の連鎖」と呼び、1 つの証明の中でおこる「命題の連鎖」を「局所的な命題の連鎖」と呼ぶことにする。それぞれについて具体的な事例を基に検討する。また、「局所的な命題の連鎖」に関しては、命題の連鎖の捉え方についても検討する。

研究課題 2　「大局的な命題の連鎖」の過程

「大局的な命題の連鎖」とは、問題に依存しながらも、命題を証明し、証明された命題とその解決の過程を活用し、発展させ、新たな命題を作り出すものである。ここでは、証明された命題とその解決の過程を活用し、発展させる際に、どのような考え方が用いられるのか、また、用いられた考え方によって、命題の連鎖はどのように展開し得るのか考察する。

研究課題 3　事例に基づく「局所的な命題の連鎖」の考察

ここでは、「局所的な命題の連鎖」に焦点を当て、授業観察に基づいて生徒の推論の過程を命題の連鎖から捉え直すことを行う。また、推論を構成していく際の困難点を、命題間のつながりから考察する。

Ⅱ. 本論文の構成

1 本研究の目的と方法
　1. 1 研究の動機
　1. 2 本研究の目的と方法
　1. 3 研究課題の設定
2 命題の連鎖
　2. 1 大局的な命題の連鎖
　2. 2 局所的な命題の連鎖
3 大局的な命題の連鎖の過程
　3. 1 類推的な方法を使う
　3. 2 変換の考え方を使う
　3. 3 一般化、特殊化する
4 局所的な命題の連鎖の過程
　4. 1 相似な三角形の証明
　4. 2 平行線と線分の比（その 1）
　4. 3 平行線と線分の比（その 2）
5 本研究のまとめと課題
　5. 1 本研究のまとめ
　5. 2 今後の課題

Ⅲ. 研究の概要

3. 1 命題の連鎖

「命題」を、「真または偽であることが断定できる、あるいは真または偽であると明示されている記述」、「連鎖」を「鎖のように連なっているもの。そういうつながり。」と捉え、ここでは、命題の連鎖を大局的な命題の連鎖と局所的な命題の連鎖に分けて考察する。大局的な命題の連鎖とは、複数の証明同士の連鎖であり、局所的な命題の連鎖とは、1 つの証明の中で起こる連鎖とする。

3. 1. 1 大局的な命題の連鎖

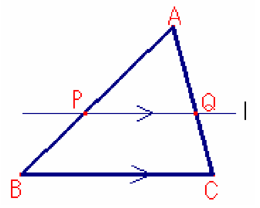
「大局的な命題の連鎖」とは、複数の証明同士の連鎖とする。この証明（命題）の連鎖として、3 つのパターンが考えられる。 前の命題と条件が同じで結論が異なる場合、前の命題と条

件が異なって結論が同じ場合、前の命題と条件が異なって結論も異なる場合である。このような３つのパターンがあるが、それぞれの場合について考察する。

前の命題と条件が同じで結論が異なる場合

問題場面

△ABC で,辺 BC に平行な直線 l をひき、２直線 AB, AC との交点を、それぞれ、P, Q とする。



命題１

条件：BC// l

結論：$\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AQ}{AC}$

→

命題２

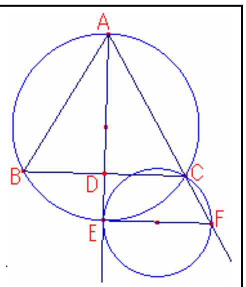
条件：BC// l

結論：$\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AQ}{QC}$

前の命題と条件が異なって結論が同じ場合

問題場面

円 O に内接する三角形 ABC をかき、BC 上に点 D をとり、頂点 A から点 D を通る直線を引く。直線 AD と円 O との交点を E とし、点 C を通り、点 E で直線 AE に接する円 O' をかく。AC の延長と円 O' との交点を F とする。



命題１

条件：

△ABC が正三角形

点 D が辺 BC の中点

結論：BC//EF

→

命題２

条件：

△ABC が

二等辺三角形

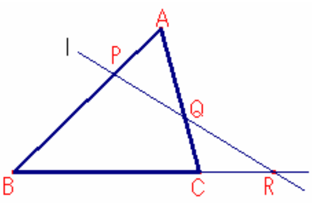
点 D が辺 BC の中点

結論：BC//EF

条件が異なって結論も異なる場合

問題場面

△ABC で、２直線 AB、AC に交わる直線 l をひき、２直線 AB、AC との交点を、それぞれ、P、Q とし、直線 l と辺 BC の延長線との交点を点 R とする。



命題１

条件：BC// l

結論：$\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AQ}{QC}$

→

命題２

条件：BC// l でない

結論：$\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BR}{RC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1$

新たな命題の結論が同じであった場合は新たな命題と捉えるのではなくて、命題の成り立つ範囲が広がっていると捉えたい。よって、前の命題と条件が同じで結論が異なる場合と条件が異なって結論も異なる場合を「大局的な命題の連鎖」とする。

以上より、「大局的な命題の連鎖」の定義は、「ある命題から、結論が異なる新たな命題を導くこと」とする。

3.1.2 局所的な命題の連鎖

生徒にとって一般的に証明問題が難しいと言われるのは、証明の中に論理が複数展開されているからである。論理が展開される所に子どもの思考が必要となる。

磯谷祐介氏は、命題の連鎖を「ある命題において前件から後件を導いた後で、先ほどの後件を次の命題においては新たな前件として用い先ほどとは別の後件を導く」と定義している。局所的な命題の連鎖は、１つの証明の中で起こる連鎖であるので、前件から後件を導くというこの定義が適切であると思われる。よって、「局所的な命題の連鎖」は、「ある命題において前件から後件を導いた後で、先ほどの後件を次の命題においては新たな前件として用い先ほどとは別の後件を導く」という磯谷氏の定義とする。

また、命題の連鎖を考察する方法として、磯谷祐介氏は以下のような方法を挙げている。

以下の条件を満たすことが必要

1）子どもの解答とその背後にあるものを比較、検討できるものであること。

2）子どもの文字の用い方と命題の連鎖の関係性が明らかであるものであること。

3）それらから支援を考える際に具体的な示唆が得られるものであること。

方法 C）子どもがどういう状況にあると、この子どもはこんな風に考える。こんな風に考えれば、例えば、例～が作れる。

磯谷祐介氏は命題の連鎖を考察する方法を決定するにあたって、３つの条件を挙げている。

今回、筆者が命題の連鎖を考察する場面は図形領域であることから、条件２の文字の用い方については、条件に含めないことにする。また、条件１の子どもの解答とその背後にあるものを比較、検討するとは、子どもの解答に表れている部分も表れていない部分も子どもの思考全てを読み取ることであると考えられる。よって、１つ目の条件として、子どもの思考が読み取れるものであることが挙げられる。また、命題の連鎖を捉えるときに、連鎖がうまくされていない部分をしっかり捉える事が必要である。また、条件３の支援に関しては具体的な示唆が与えられるまでの捉え方を作ることは難しいと考え、今回は含まないことにする。

以上の考察から、筆者は以下のような方法を提案する。

条件　１）子どもの思考が読み取れるもの。
　　　２）命題がうまく連鎖されていない部分がはっきり分かるもの。

方法　起こってほしい理想的な命題の連鎖を事前に作り、それを基に観察し、子どもの命題の連鎖がどこで止まっているか捉える。

3.2 大局的な命題の連鎖の過程

3.2.1 類推的な方法を使う

「類推的な方法で、新しい定理を導いたとき、その結論は、＋が－に変わる程度か、もとのままかで、その証明も、もとの定理の証明が、ほとんどそのまま使えるものである。」

つまり、類推的な方法とは、証明問題においてはその証明の仮定を他のものに変えても結論が同じか似たようなものになる場合を考え、前の証明と同じような方法で証明する方法である。

3.2.2 変換の考え方を使う

乾氏は、新しい定理を発見する方法として、変換の考え方を使う、連続的変化を加えるという方法を挙げている。筆者は、連続的変化を加える際、変換の考え方を利用することから、「変換の考え方を使う」と「連続的変化を加える」の２つをまとめて「変換の考え方を使う」とする。

変換の考え方を使うことに関して乾氏は以下のように述べている。「図形の全体、または、一部に、合同変換や相似変換を加えたり、または、変換したものと見なしたりして、新しい性質を発見する。ある定理の図で、その図の一部を、平行移動したり、回転移動したり、あるいはまた、対称移動したりすることが、新しい定理の発見につながることがある。」

つまり、この方法は、平行移動や回転移動のように図形を変え、その後証明をしている。様々に図形を変化させることによって、新たな定理を発見したり、同じ定理が似たような場面で成り立っていることを発見したりすることができる。

また、連続的変化を加えることに関して乾氏は以下のように述べている。「図形の中の点や線などを、それが持っている条件にしたがって、連続的に動かして観察したり、ぎりぎりのところではどうなるかと考えたりして、その性質を推定する。１つの三角形で、その１辺を、連続的に動かしていくと、その三角形の内心や傍心の位置も、連続的に変わっていく。その変わり方を観察して、新しい定理を発見するのである。」

つまり、平行移動、回転移動などの変換の考え方を使い、連続的に図形を動かすことによって、新たな定理を発見するものである。

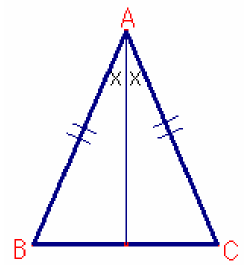
3.2.3 一般化、特殊化する

一般化、特殊化することに関して乾氏は以下のように述べている。「ある定理で、その仮定の条件をへらしたり、ふやしたりして、新しい定理を発見する。二等辺三角形を不等辺にすると、もとの二等辺三角形の性質はどうなるかと調べると、一般の三角形の性質を発見できる」

<u>乾東一氏の例</u>

<u>命題１</u>

△ABC で、
AB＝AC ならば、
∠A の二等分線を
AD とすると、

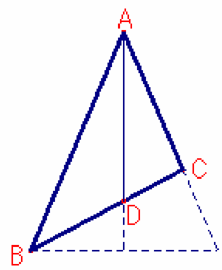


(1)　∠B＝∠C
(2)　BD＝CD　　(3)　AD⊥BC
なお、これらの逆も成り立つ。

この定理で、仮定 AB＝AC を、AB＞AC とする。

<u>命題２</u>

△ABC で、
AB＞AC ならば、
∠A の二等分線を
AD とすると、



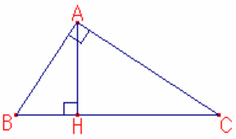
(1)　∠B＜∠C
(2)　BD＞CD　　(3)　∠ADB＞∠ADC
なお、これらの逆も成り立つ。

このように二等辺三角形を任意の三角形にしたり、正方形を任意の四角形にしたりするように一般化する、または、反対に任意の三角形を二等辺三角形にしたりするように特殊化することによって、新しい定理を発見することができる。

3.3 局所的な命題の連鎖の過程

3.3.1 相似な三角形の証明

問題



∠A＝90° の直角三角形 ABC の頂点 A から辺 BC に対する垂線 AH を引く。△ABC∽△HBA であることを証明しなさい。

P_1：∠BAC＝∠BHA

P_2：∠ABC＝∠HBA、 ∠B は共通

P_3：2 角がそれぞれ等しいので

P_4：△ABC∽△HBA

P_1 → P_3 → P_4
P_2

P_1 を見つけられない生徒、P_2 を見つけられない生徒、P_1 と P_2 の両方を見つけられない生徒が多く、P_1、P_2 を見つけられれば、P_4 までスムーズに連鎖されており、途中で止まる生徒はいなかった。つまり、連鎖の始まりが最も困難であった。

今回のような証明問題の場合、相似条件を利用することが問題から明らかである。よって、P_1、P_2 から P_4 の間で、止まってしまうことはなかったのではないか。

Ⅳ. 研究の結果

4.1 本研究のまとめ

本研究では、命題の連鎖とはどのようなものかについて述べ、局所的な命題の連鎖については、実際に授業観察を通して命題の連鎖を捉えることができた。

大局的な命題の連鎖は、「ある命題から、結論が異なる新たな命題を導くこと」と定義し、「類推的な方法を使う」、「変換の考え方を使う」、「一般化、特殊化する」の 3 つの大局的な命題の連鎖を促すものを述べた。

局所的な命題の連鎖は、「ある命題において前件から後件を導いた後で、先ほどの後件を次の命題においては新たな前件として用い先ほどとは別の後件を導く」と定義し、局所的な命題の連鎖の捉え方は、「起こって欲しい理想的な命題の連鎖を事前に作り、それを基に観察し、生徒の命題の連鎖がどこで止まっているか捉える。」とした。そして、この方法で実際に授業観察をし、命題の連鎖を捉えることを行った。

命題の連鎖を捉えることとは、証明の過程での生徒の思考を辿ることであり、命題の連鎖を捉えることができれば、その生徒の困難点を指摘することができ、生徒の困難点が分かれば、その困難点に対して教師はどのような支援するか考えることができる。なぜならば、生徒の証明の過程における困難点を命題の連鎖という観点で捉え直すことによって、命題が示す数学的内容の関連が明らかになるからである。さらに、そのためには、教師は事前に証明の過程を命題の連鎖から考えることが必要である。

また、授業では多くの生徒がいて、それぞれ異なった困難点を持っている。一人一人の生徒の困難点に対する支援の検討も大切だが、多くの生徒の同様の過程で起こる困難点を捉えることも必要である。多くの生徒の困難点が分かれば、その部分は練り上げでの話し合いの課題とすることができる。

4.2 今後の課題

今回、命題の連鎖について考察してきたが、以下のような課題が残った。

1 つ目に、「局所的な命題の連鎖」の事例として 3 つ挙げたが、今後は、より多くの事例を基に考察していきたい。3 つの事例では、命題の連鎖を捉えることができたが、より複雑な証明場面でも命題の連鎖を捉えることができるのか、他の証明場面でも今回考えた命題の連鎖の捉え方で問題はないのか検討したい。

2 つ目に、今回「局所的な命題の連鎖」に関しては、実際に授業観察を基に命題の連鎖を捉えるところまで行ったが、今後命題の連鎖を捉えた上で考えられる支援や授業構成について考察していきたい。

3 つ目に、「大局的な命題の連鎖」に関しては、連鎖させるためにはどのような支援や働きかけが必要かについてまで考察できなかったので、今後の課題とする。

主要引用・参考文献

・磯谷祐介 「文字式の論証における命題の連鎖に関する研究」 2004.

・乾東一 「図形の性質の研究－その発見と創造－」 新興出版社啓林館 1992.

・「平成 14 年度用教科書 数学 2 年」 新興出版社啓林館