【鳥取大学数学教育研究, 第８号, ２００６】

意味論的構成に基づく中学校数学の展開に関する研究

植田　周

指導教員:矢部敏昭

Ⅰ．研究の目的と方法

本研究の目的は、わかる授業を目指し、機械的な展開ではなく、数学の解法における意味を考えた意味論的構成を考究するものである。

文献をもとに数学教育の目標を明らかにするとともに、教材の数学的価値について追究をしていくものとする。また、わかる授業の構成要素は何かを実際の授業を観察・分析しながら考察をする。

具体的な教材を研究・開発しながら、数学を通してどんな人間を育てようとしているのか、また、数学が人間に対してどんな役割を果たしているのか(どんな可能性をもたらしているのか)という数学教育の原点をも考えていきたい。

Ⅱ．本論文の構成

Ⅲ．研究の概要

３．１　意味論、構文論の区別

中学校における数学では、具体的な事象をある観点から記号化し立式すれば、その式はその背後にあった具体を離れ、機械的・形式的に処理がなされていく。つまり、その式がはじめにもっていた意味を離れて、記号に与えられた規則と等式の規約のみに従って形式的に式変形が進められる。

中学校数学は抽象的形式的数学への過渡期に当たると考えられる。その手際のよさ、明確さから代数的な思考は有力であると実感し、いつしかその処理の速さだけに満足してしまいがちである。あまりにも形式ばかりがひとり歩きしてしまっては、その価値を見失うことにもつながるであろう。問題に直面したときの立式にいたるまでの思考、解決がなされるまでの式変形、解決の後の振り返りなど、当面した式に対しては、その式の背後にある具体が意識できる態度は必要である。このことが筋道を立てて考える態度につながるともいえる。

「1 個 120 円のりんごと 1 個 90 円のなしを合わせて 12 個かって、1200 円払った。買ったりんごとなしの個数はそれぞれ何個か」という問題について、りんごを x 個、なしを y 個買ったとすると

個数の合計が12個なので、$x+y=12$、

りんごは 120 円、なしは 90 円なので、合計
$120x+90y=1200$

したがって、連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} x+y=12 & \cdots\cdot ① \\ 120x+90y=1200 & \cdots ② \end{cases}$$

これを解くために、①より $y=12-x$ を②に代入して、

$$120x+90(12-x)=1200 \quad \cdots\cdots ③$$
$$120x-90x=1200-90\times 12 \quad \cdots\cdots ④$$
$$(120-90)x=1200-90\times 12 \quad \cdots\cdots ⑤$$
$$x=(1200-90\times 12)\div(120-90) \cdots ⑥$$

このようにしてりんごの個数がわかる。

この式の各段を読むことによって、新しい解法が得られる。

③をよむと、りんごの個数を x 個とすると、なしの個数は $(12-x)$ 個となるので、y を用いなくても最初の段階で③の式が得られることがわかる。

④をよむと、りんごの個数を x 個として、りんごもすべてなしと同じ代金だったとすると、全体の代金は、りんご1個120円のときの代金より、これを90円にした分だけ安くなるので、$120x-90x$ 円安くなる。これはまた、全部が90円になったのだから、その代金は、90×12 円になる。だから、(1200－90×12)円安くなる。したがって①②の式を立てることもなく、最初から④の式が得られる。

これはまた、りんごが 1 個について(120－90)円安くなったとみられるから、(120－90) x 円安くなったとも考えられる。したがって⑤の式が得られる。

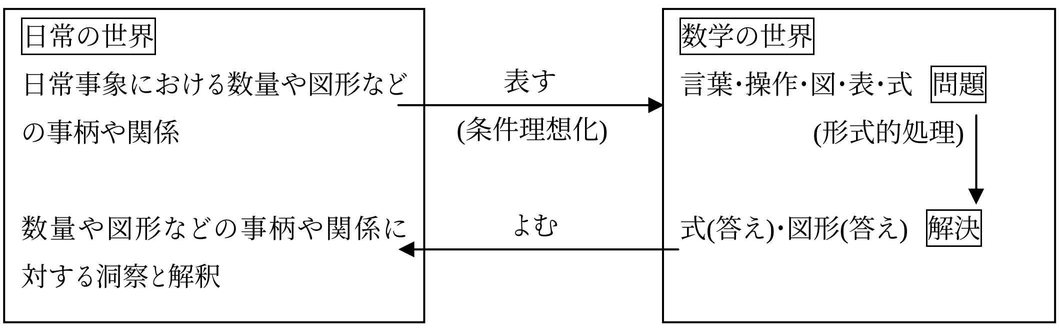
式をよむことによって新しい解法を得るとともに、解の正しさを確かめられるよさがある。いわば多様な解決のよさがここにある。

学習指導要領には数学科の目標として次のように述べられている。『数量，図形などに関する基礎的な概念や原理･法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。』

「事象を数理的に考察する」とは、現実の世界のことを数学的に定式化し、数学の手法によって解を求め、これを現実に照らして解釈するということ、ならびに、数学の世界の中での関係を簡潔な使いやすい形に表現し、手際のよい方法で能率的に処理することである。(図1)

事象の数理的な考察を通して数学的な知識･技能が獲得され、基礎的な概念や原理･法則の理解が深められるのであるが、数理化の過程では、それらが生きて使われる。数学的な表現や処理の仕方も事象の数理的な考察では重要な役割を果たすとともに、事象の数理的な考察の中から新しい表現や処理を考える必要が生じ、新しい表現･処理の仕方が考え出されることもある。

(図 1) 事象の数理的処理モデル



例えば、面積が 2㎠の正方形の 1 辺の長さを考えるとき、具体的な数値が与えられないために根号を使って$\sqrt{2}$ と表す約束を定めている。

日常の世界における事象を数学の課題としてとらえたり解決したりそれを振り返ったりする数学的活動を通して、数学的な見方･考え方のよさを感じさせることは数学教育の大きな目標であることは改めて感じるものである。

この、日常の世界と数学の世界をつなぐ部分が意味論であり、数学の世界における問題と解決をつなぐ部分が構文論ということになるが、数学の世界における形式的な問題解決の中に意味論的考察を位置づけることによって数学を活用する意味が深まるといえよう。

４．１　関係的理解、道具的理解

「道具的数学」とは、例えば、2 つの負の数の掛け算「マイナスかけるマイナスはプラス」、分数での割り算「分数で割るときは,除数の分母と分子をひっくり返してかける」などは覚えやすい規則の理解「道具的理解(instrumental understanding)」を志向した数学であり、対する、「関係的数学」とはそのやり方もその理由も知っているという「関係的理解(relational understanding)」を志向した数学ということである。

生徒にひとつの道を指定し、その上をわき目も振らずに歩く練習ばかりさせて、自由に歩き回ることを許さないゆとりのない学習を展開してはいないだろうか。ただ単に暗算や計算力が上がることばかりで、繰り返し練習で早さ正確さばかりに目が行きがちである。そういった学習ではなく、今自分たちが取り組んでいる内容の意味がわかり、なぜそのように考えるかという理由がわかる授業を展開するべきである。人間形成という立場からも、関係的理解を目指す教育が必要とされる。

４．２　「シェマ」について

スケンプ氏は文献で次のように述べている。

『関係的数学の学習は一つの概念構造(シェマ)を築きあげることにある。そしてその所有者は(原理的には)それから無限に多くの案内図をつくり出して、そのシェマ内の任意の始点から任意の終点に到達することができる。』

学習して習得した数学的概念や数学的技能がシェマであり、シェマの水準を高めていくことが学習していくことである。

式の展開の中に「心的地図」の具体例を見ることができる。式の展開は「単項式や多項式の積の形をした式を、かっこをはずして単項式の和に表すこと」。

基本となる考え方は分配法則になる。一般的な式に表すと$m(a+b)=ma+mb$であるが, これを出発点とし, 様々な式変形をこころみることができる。$m(a+b)$ の m の部分を $(x+a)$ 、そして $(a+b)$ の部分を $(y+b)$ とすると、$(x+a)(y+b)$ について考えることができる。実際に展開をすると、分配法則の考えを基にして

$$\begin{aligned}(x+a)(y+b) &= m(y+b)\\ &= my+mb\\ &= (x+a)y+(x+a)b\\ &= xy+ay+xb+ab\end{aligned}$$

$$\therefore ① (x+a)(y+b)=xy+bx+ay+ab$$

次に $(x+a)(y+b)$ の y を x とすると、$(x+a)(x+b)$ について考えることができる。

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2+bx+ax+ab\\ &= x^2+(a+b)x+ab\end{aligned}$$

$$\therefore ② (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

乗法公式をつくることができる。公式を利用して$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ のように展開できる。乗法公式の b の部分を a とすると、$(x+a)(x+a)$、つまり、$(x+a)^2$ について考えることができる。

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &= (x+a)(x+a)\\ &= x^2+(a+a)x+a^2\\ &= x^2+2ax+a^2\end{aligned}$$

$$\therefore ③ (x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

また、a を$-a$ に置き換えることで、

$$\therefore ④\ (x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

2種類の平方公式をつくることができる。

さらに，乗法公式②の b の部分を $-a$ とすると、$(x+a)(x-a)$ について考えることができる。

$$(x+a)(x-a) = x^2-ax+ax-a^2$$
$$= x^2-a^2$$
$$\therefore ⑤\quad (x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

①～⑤のように、展開の公式はそのパターンを次々と創り上げることができ，考えればさらなるパターンも創り上げることができる。公式の出来上がる考え方を理解しているのであれば，下のように展開における多項式項の数が増えようとも，次数が上がろうとも解くことは可能であろう。

$$(a+b)(x+y+z)=ax+ay+az+bx+by+bz$$
$$(2ax+y^2)(2ax-y^2)=4a^2x^2-y^4$$

以上のことが、文字式の展開における「心的地図」であると考えることができる。「展開のシェマ」とも言えるであろう。

４．３　内的理解、外的理解

ニューヨーク州立大学のブラウン氏は教材に枠をはめて，その内部だけで求められる理解を「内的理解(Internal understanding)」と呼び，枠外からの教材の理解を「外的理解(External understanding)」と呼んでいる。

「内･外」の概念は，ある枠を設定してはじめて確定するものであるが、教師が子どもを自分の設定した枠内にとどまらせるかぎりにおいて，子どもの論理性の発展にはまったく貢献していないと考えることができる。例えば、入学試験という枠の中で内へ内へと狭く身動きの取れない受験指導が教材の内的理解の偏重、外的理解の欠如という言葉で特徴付けられる。

これまでの実践的考察から理解の段階が明らかになっていることを知る。

第一段階として、計算や解き方について形式的に遂行できるが、ただ単にこうやればできると理解しており、その理由までは答えられない理解がある。いわば極端な道具的理解の段階といえる。

第二段階は、解法についてなぜそうするのかという理由がわかり、その意味が既習事項と関連付けられる段階である。これは関係的理解といえる。

第三段階として、数値や場面が変わったとしても、学習した内容を活用できる段階がある。新しい知識や技能を適用できることから内的･外的理解の段階といえる。理解したことが、新しい課題に対して生きて働いてこそ、理解できたといえるのではないだろうか。これが理解の本性と考える。

最後に、問題や教材のもつ価値までも見えてくる、そしてそのよさを鑑賞できるほどの段階が究極の理解といえよう。

今日の情報化社会において必要とされる知識は幾何級数的増加をしており、知識の量ばかりでなく質においても大きく変わりつつある。したがって、社会で必要とされるものを知識や技能にのみ限って指導しようとしても無理である。

日々変化し,多様化する社会においても通用する教育とは何であろうか。生徒が学校教育で身につけ社会に出て有効に働くものは何であろうか。それは,先の「理解」の解釈と同様、未知の困難な場面やあたらしい課題に遭遇したとき,そこてどう判断し,行動し,そして解決を図っていくか。つまり,未解決の重要な問題を見つけ,解決していくことができる力ではないだろうか。

中島健三氏は著書『算数･数学教育と数学的な考え方』の中で数学教育の目標を次のように挙げている。

①人間が社会の一員として生活をするのに必要な知識や能力を育成すること。[実用的な目的]

② 人間がこれまでに創り上げた学問や文化を、(生活上の必要という立場だけでなく)それ自体、人間にとって価値あるものとして、 理解し鑑賞することができるようにすること。[文化教養的な目的]

③ 人間が本来そなえているべき、また、そなえることが望まれる諸能力を、可能なかぎり引き出し育てること。[陶冶的な目的]

④ 創造的な活動を実践し、体験させ、その過程の中に,文化の創造や問題解決の美しさ楽しさを認め、味わうことができるようにすること。[創造的実践の体得と鑑賞] ―人間性を豊かにするための価値観の多様化―現在の数学教育を、 さらに

は、これから先の数学教育の目的を考えるときに、特定の数学的な知識や技能を、少しでも多く能率よく習得させるというねらいに立って数学教育を考えるよりは,むしろ,算数なり数学にふさわしい創造的な活動を体験させ,それを通して創造的に考察し処理する能力や態度をのばすようにすることが,しだいに重要な意味をもってくることがわかる。

　そして、能田伸彦氏は『“創造的"活動のできる人間形成のために必要な観点が“発展的"見方であるが,その発展を促す前提としての代表的な観点が“統合的"考察である。』と紹介している。

・統合的な見方、考え方とは

　既習の学習内容があって,それらをある高い,あるいは,広い観点からみることによって,それらの内容をみな同じとみなし,一つにまとめてみる心の働きである。いいかえると,既にいくつかの特殊な事例があって,それらを今までと違う観点からみることによって,一つの新しい生命,つまり組織体を創造する心の働きである。

・発展的見方、考え方とは

　既存のことがらに含まれている法則や規則をより広い範囲の対象まで及ぶよう条件をゆるめる心の働きとする。いいかえると,今まで成り立っていた特殊な性質を包括してより広い一般的な性質でもって,考察の対象を新しい生命をもった組織体につくり変え,新しい価値あるものを創造する心の作用であるとする。

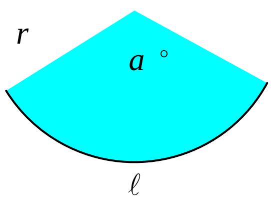
　例えば、次のような問題を考える。

右のおうぎ形の面積 S はいくらですか

半径　r

中心角　a °

弧の長さ　ℓ



　円の面積＝πr^2 をもとにして、具体的な数値からおうぎ形の面積を考えはじめたとすると、

もしも中心角が180°なら　$\pi r^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi r^2$、

90°ならば $\frac{1}{4}\pi r^2$、45°ならば $\frac{1}{8}\pi r^2$ となる。

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ がどういう意味から引き出された数であるかを考えると、一周360°のうちどれだけの割合を占めているかを考えていることになる。このことから特殊な図形から一般へ発展的に考えられる。すなわち、中心角が a °であるから　$S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$

　一方で、弧の長さとの関係から面積を考えることができる。

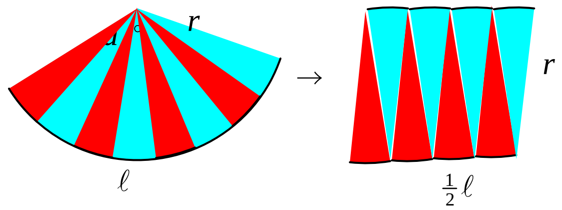
　おうぎ形の弧の長さ ℓ が円周の一部であるという考えから　$\ell = 2\pi r \times \frac{a}{360}$　→ $\pi r \times \frac{a}{360} = \frac{1}{2} \times \ell$

先に導かれたおうぎ形の面積から

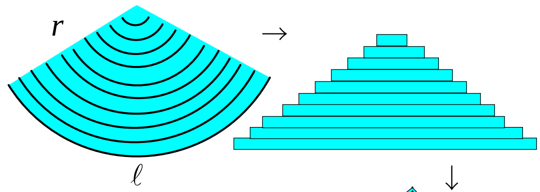
$$S = \pi r^2 \times \frac{a}{360} = r \times \pi r \times \frac{a}{360} = r \times \frac{1}{2} \times \ell$$

したがって、$S = \frac{1}{2}\ell r$　となる。この意味を考える。

おうぎ形を細かいおうぎ形に切って張り合わせると、長方形の面積＝縦×横を考えることができる。

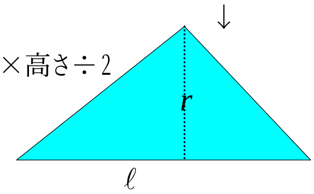


　また、同心円の弧に切って伸ばすと



三角形の面積＝底辺×高さ÷2

を考えることができる。



　以上のように、おうぎ形の面積を、長方形や三角形の面積の考え方に統合できる。

Ⅳ.　研究の結果

　結果が得られてもそれにとどまらず、その新しく解決された事象が既習のどのようなものと同じであるかというように考えていって、既知のいくつかのものと新しいものとを同じものとみなしていく、あるいは少し高い立場から見てそれらを同一視していくといったような統合的な考えや、得られたものをもとにしてその条件の一部を変えたり、その条件の一部を緩めたりというようなこと、あるいはそのことがらに対して、見る側面を変えたりして、新しい見方や新しい問題を作り上げていく。その過程に

おいては常に新しい解決のしかたを見つけていくといったような発展的な考え方もきわめて大切な数学的な考え方である。

統合･発展的な見方や考え方は内的理解と外的理解へ向けた見方であると考えられる。このような見方や考え方ができるような授業展開が求められる。

以上のような考察から、わかる授業の構成要素として、

① 数学的な知識･技能を活用できる、数学的に意味のある問題を扱う
② 多様な解決が期待できる問題を扱う
③ その解法を論理的に構成できる時間を保障する
④ 自力解決における生徒の数学的活動の中から、いかに意味のある課題を創出するか
⑤ 練り上げにおいて手際のよい解法を見出す
⑥ 統合･発展的な見方や考え方をひきだす

を挙げる。

問題解決に当たり数学の学習では、誰もが共通に理解できることを元にこれを一つ一つ積み上げ、筋道を立てて考え一定の結論を導く。したがって、導かれた結論の真偽について、数学的には、この思考過程を丁寧にたどることで自ら確かめられるということを意味している。自力解決において生徒自身が論理を構成できる時間は重要であり、練り上げの段階で各自の論理を出し合うことにより、学習者自ら手際のよい解法を導き出すことができるであろう。③④⑤は授業を構成する要素として重要な意味をもつ。この経験を繰り返す中で、社会生活においても、自らの力で物事について最適な判断を行えるようになるであろうし、自分でしたことについては責任を持ち主体的な行動をすることができるようにもなる。すなわち、数学の学習を通して自主自立の精神を育てることができるようになる。これは、社会を構成する一員として身につけるべき、人間としての根幹にかかわる資質であると考えられる。

数学を見つけ、つくり、発展させるプロセスで感動を伴うような授業の展開を工夫するためには、教師が数学を教えてやるという立場ではなく、生徒とともに数学をつくっていくという気持ちでいることが必要である。

学習とは、知識として覚えさせるのではなく、よさを味わることを通して学習に意欲を持たせることに狙いがある。よさを味わわせるには、数学を学ぶとき、数学的な見方や考え方によって能率的に処理できるようになった、簡潔に表現できるようになった、事柄がすっきりわかるようになったということを振り返って見せることが大切である。

「数学的な見方や考え方のよさ」を感じさせるためには、数学を活かして使う経験をすることが必要である。⑥の要素は、学習した内容について、これまでのばらばらな知識･技能ををまとめたり、いつでも使えるようにしたりする学び方･意欲であろう。単に数学を知り、与えられた問題が解けるだけでなく、数学を活用することを学ばせたい。活用することによって、数学のよさが認識できるであろうし、よさが認識できれば活用しようとする態度もおのずと作られていくにちがいない。

このようにして、事象の中に法則を見つけて事柄の性質を明らかにしたり、具体的な操作や実験を通して数学を帰納したり、数の世界を拡張して新しい数を作ったり、問題を一般化して新しい数学を作り出すなど、数学を作り、発展させる活動を通して数学を学ぶことを経験させ、その過程に見られる工夫、驚き、感動を味わい、数学を学ぶことの面白さ、考えることの楽しさを味わえるようにすることを大切にしたい。

Ⅴ.　主要参考文献

平林一榮著『数学教育の活動主義的展開』 第 2 版,東洋館出版社,1990

R.R.スケンプ著,平林一榮監訳『新しい学習理論にもとづく算数教育』,東洋館出版社,1992

依田新監修『新･教育心理学辞典』第 4 版,金子書房,1988

中島健三著『算数･数学教育と数学的な考え方』

金子書房,1981