修士論文要約【鳥取大学数学教育研究，第 7 号，2005】

生徒の数学的信念に着目した関数指導の在り方についての研究

沢田　慶子
指導教官：矢部敏昭・溝口達也

I. 研究の目的と方法

国立教育政策研究所（以下，国研）による平成 13 年度小中学校教育課程実施状況調査報告書において，「通過率」[1)]が全体の半数を下回るだけではなく「設定通過率」[2)]との差が 10%を超えるものがしばしば観察される。「数量関係」領域においては，同一概念を別の表現形式に表すことについての問題がそれである。これは比例，反比例の学習のみならず，一次関数の学習にも同様に観察される。「設定通過率」が決定された背景をみると，「通過率」と「設定通過率」の間に生じる差は，学習指導要領に対して教師の解釈が乖離していることを示唆しており，子どもの学習の仕方云々ではなく，教師の指導に改善の余地があると考えられる。

一方で，Schoenfeld(1985) らによって生徒の信念が数学的問題解決に関わってくることが指摘されている。本研究では，生徒の行為に反映される数学的信念を視座とし，同一概念を別の表現形式に表すことに困難を示す生徒に対していかなる関数指導が求められるべきかについて示すことを意図して，次の研究課題の解決を目的とする。

研究課題：生徒の数学的信念を関係的に捉えることによって，関数指導に対するどのような新しい示唆が得られるか。

このために本研究は次のような方法をとる。まず，国研による調査報告書 (2003) により，「数量関係」領域における中学生の実態を整理，分析する。分析の結果，生徒が困難を示すものとして導出された表現形式の移行についての教育的な価値を整理するにあたり，小倉金之助の言明を準拠する。また Schoenfeld の理論的枠組みに基づいて，数学的信念を視座とし，生徒の数学的信念を実体的なものとしてではなく関係的なものとして捉えることについての示唆を得る。上記の事柄を受けて，表現形式の移行について育成すべき数学的信念を設定し，それに基づく学習指導の提案を行う。

II. 論文の構成

第6章　本研究の結論と今後の課題
　6.1　本研究から得られた結論
　6.2　今後に残された課題
引用・参考文献
（1ページ35字×30行，60ページ）

III. 研究の概要

3.1　関数における中学生の実態

国研による調査報告書に基づき，「数量関係」領域において生徒が困難を示す点を明らかにすることを試みた。そのために，以下の2点を考察の対象とした。

1)「通過率」が全体の半数を下回るもの
2)「通過率」と「設定通過率」の差が10%を超えるもの

「設定通過率」は，学習指導要領に示された内容について，標準的な時間をかけ，学習指導要領作成時に想定された学習活動が行われた場合，個々の問題ごとに，正答，準正答の割合の合計である通過率がどの程度になると考えられるかということを示した数値である。また，「設定通過率」を決める手続きについては，問題作成委員会において，個々の問題における出題のねらいを踏まえて数値を決定し，分析委員会においてその数値の妥当性について検討されている。そうであるにもかかわらず，この数値を過度に下回るような値が結果として示されるのであれば，学習指導要領に対する教師の解釈が乖離していることを示唆している。実際に，上記2つの観点で調査結果を分析したところ，「通過率」と「設定通過率」との差が10%以上のもの，中には20%を超えるものまでしばしば観察される。

比例に関する調査問題［第1学年］の結果（表1）によると，A7(2)「グラフから直線の式を求める」，B8(1)「グラフから直線の式を選ぶ」，C8「比例の式からグラフをかく」といったグラフと式の相互関係の問題について「通過率」と「設定通過率」との差が比較的大きい。

表1.　比例に関する問題の概要および通過率

問題番号	問題の概要	観点	設定通過率 A	通過率（全体） B	全体ー設定 B-A
A7(1)	直線上の点の座標を求める	知	80	79.4	-0.6
A7(2)	**グラフから直線の式を求める**	**表**	**65**	**40.0**	**-25.0**
A9(1)	事象から反比例の式を求める	表	65	50.2	**-14.8**
B8(1)	**グラフから直線の式を選ぶ**	**知**	**60**	**44.5**	**-15.5**
B9(2)	事象から比例の式を求める	表	70	60.7	-9.3
C8	比例の式からグラフをかく	表	75	60.0	**-15.0**
C9(1)	反比例の表の値を求める	表	65	62.1	-2.9
C9(2)	反比例のグラフを選ぶ	知	75	79.1	4.1

表2.　一次関数に関する問題の概要および通過率

問題番号	問題の概要	観点	設定通過率 A	通過率（全体） B	全体ー設定 B-A
A10	一次関数の式でないものを選ぶ	知	60	72.0	12.0
B10(1)	**一次関数の式からグラフの傾きを求める**	知	75	53.2	**-21.8**
C9	不十分な表から一次関数の式を求めることができる	知	65	55.5	-9.5

中でも，グラフをもとに式について考察する問題は「通過率」が50%を下回っており，表現形式の移行，とりわけグラフからの式化についての問題に対し，生徒は困難を示す。ところが表現形式の移行に関わらない問題（A7(1)「直線上の点の座標を求める」）に対しては8割近くが正答する。

一次関数に関する調査問題［第2学年］の結果（表2）では，式をもとにグラフについて考察する問題の「設定通過率」との差が大きい。ところが第1学年と同様に，表現形式の移行に関わらない問題（A10「一次関数の式でないものを選ぶ」）に対しては7割以上の生徒が正答する。

以上より，第1学年の比例，第2学年の一次関数ともに次の2点が示される。

1) 単一の表現形式に関わる問題は8割近くが正答している。【「直線上の点の座標を求める」等の問題】
2) 同一概念を別の表現形式に表すことが要請される問題には非常に低い正答率を示す。【「グラフから直線の式を求める」等の問題】

つまり，「同一概念を別の表現形式に表すこと」が困難であることが明示化された。これは単独の学年のみに観察される行為ではなく，少なくとも2学年にわたり観察される。

（以上，第2章）

3.2　表現形式の移行に関する教育的価値

生徒は表現形式の移行が要請される問題に対して困難を生じることが示されたが，教授学的に表現形式の移行はいかなる意味を有するのか。その教育的価値を明らかにするためにまず，数表，グラフ，式それぞれの特徴を明らかにした。そして個々の特徴を考慮し，表現形式の移行が有する意味を分析した。

数表は，取り得る値が離散的であるため，連続量を考える場合に近似的な表現にとどまる一方で，対応が数値として明確に示される。

グラフは連続的な値の対応を示し得る。また，対応の規則を示す線の幾何的性質によって直観的にその変化の有様を明瞭にすることが可能である。しかし，グラフから読み取り得る値には近似性が入るため，正確さを追求するには劣る。

式は，数表やグラフと異なり，値に正確さを追求することができる。

このように個々に特徴を有する3つの表現形式の移行が有する意味を，表から式を一例として分析した。関数教育にはともなって変わる数量の変化や対応の見方を獲得し，獲得した変化や対応の見方で所与の現象を捉えていくことが要請される。表から式への表現形式の移行を一例とすることで，小学校では2量の変化に焦点をおかれがちであった関数の見方を集合間の一意対応へと拡張することができる。表現形式の移行によって，変化と対応の見方を所与の表現形式に与え，多角的に関数の関係を捉えることにつながると考えられる。

（以上，第3章）

3.3　理論的枠組み

3.3.1　議論の方向性

教授活動において，教師の営みは生徒の潜在的な行為を顕在的なものから判断することが要請される。生徒が数学的問題解決において誤りやつまずきを表出したとき，生徒の顕在的なものから潜在的な行為を判断し，その潜在的な行為に対して修正を加えなければ，生徒の誤りに対して何の解決にもならない。本研究では先行研究における以下の言明に基づき，潜在的な行為を信念に依拠する。

E. Diaz-Obando(2003) らは信念は個人の暗黙の知識の構成要素の一つであるとし，Schoenfeld(1985) は，数学的問題解決の文脈において，信念とはいかにして問題に取り組むかを決定する数学的世界観であり，人の態度は数学の本性についての信念によって形成されると指摘する。また，問題解決における決定作用への関与は Lerch(2004) によっても次のように指摘される：解決しようとしている間になされた決定は，個人の知識内容や個人的な信念システムに依存する。個人の信念システムは様々な数学の状況に人がいかにアプローチし，いかに反応するかということに影響を及ぼす。

つまり，生徒の信念が数学的問題解決に関わり，表出する誤りの背後には信念が可能性として存在し得るといえる。Schoenfeld は生徒の活動分析に基づく信念の同定を行うことで，信念を有した結果として形成される態度を描写することを可能にする。

ところが教育的に要請されることは，生徒の

活動分析に基づく新たな信念の同定ではない。先行研究においては信念を実体性として捉えるか，関係性として捉えるかという点については極めて無意識のうちに議論が展開されてきたようである。実際のところ，個々人の経験から産出された信念は個々人によって異なるものであり，観察者（授業においては教師）の視点からすれば被観察者（生徒）が表出する行為として被観察者が有しているであろう何らかの信念の存在を想定することは可能であっても，それが言語化されない限り，実体として確認する術を持たない。実体として捉えられない場合が時として存在するのであれば，観察者から見て取れる被観察者の行為に対し，関係的に信念を用意することが可能性として示唆される。

3.3.2　先行研究にみる数学的信念

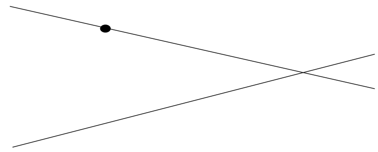
信念研究はその対象が教師と生徒に分類され，Beliefs about Mathematics（数学についての信念），Beliefs about Self（自身についての信念），Beliefs about Mathematics Teaching（数学教授についての信念），Beliefs about the Social Context（社会的文脈についての信念）等のカテゴリーのもとで議論されてきた。

例えばBeliefs about Mathematics（数学についての信念）に関する議論の概要は以下のようなものである。Dossey(1988)とMcKnight(1987)の言明からは，信念の普遍性が指摘される。つまり，Dossey(1988)が調査したアメリカの3，7，11学年の児童・生徒と，McKnight(1987)が調査した同じくアメリカの8，12学年の児童・生徒に観察される「数学は有益だが，主に記憶と規則性である」とする信念は学年固有のものではない。Kouba, McDonald(1987)の言明からは，信念によって生起される態度がそれまで有していた信念をより強固なものとして確立する可能性が示唆される。

Schoenfeld(1985)は「数学の問題を解決するのに，いつも10分以上はかからない。」というBeliefs about Mathematics（数学についての信念）等をはじめとするMathematical Beliefの理論的枠組みを整理するにあたり，幾何学における生徒と数学者の活動分析の比較を行った。

大学生に与えた問題

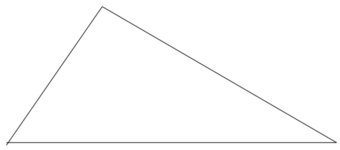
図のように2本の交差する直線があり，そのうち1本の直線上には点Pが与えられている。定規とコンパスを用いて，点Pを通り，2本の直線に接するような円を作図しなさい。



被験者となった2人のペアの大学生は上記の作図問題において何が重要であるかを理解するために略図を描き，その略図に基づいて，いかなる解決が導出されるか推測した。そしてお互いに評価したり実行したりしながら推測を確かめた。その判断基準は，実行したときに経験的に妥当性を与え得る図となるならば，仮説を正しいものとして受け入れる，というものである。描写した図から，仮説が否定される可能性を導出した2人は，最初の仮説の反例を実証しようとした。結果として，一方の大学生は正しい作図方法で円の中心を導出したが，自分の作図方法は正しいとしながらも経験的に，現実的な状況として作業を遂行することが困難である状況（すなわち，作図で得られるべき線分が極めて短いこと）に遭遇したことがなかったために，活動を終えたとみなすことができなかった。この行為は現実世界との関連を要求しているものと解釈し得る。

数学者に与えた問題

定規とコンパスを用いて，下図の三角形に円を描きなさい。その円は三角形の内部にあり，3つの辺全てに接しているものとする。



数学者に与えた問題は，大学生に与えた問題と本質的な部分（いかに円の中心を見つけるか）が共通している。数学者はその本質的な部分を捉えた上で略図を描いた。そして問題の条件を満たすための種々の性質を意識し，条件を満たすであろう関係図を構築した。関係図の描写か

ら新たな性質に気付き，解決に至った。

大学生の一連の態度は，経験に基づいて問題解決に取り組む純粋経験主義者であると考えるならば説明がつく。経験から考えを抜粋することで人は現実世界において効果的に機能し得る現象のモデルを発達させる。それは現実世界との関連を要求する態度でもある。

また Schoenfeld(1985) は，現実世界との関連を要求する態度が極めて多く観察される物理学領域の問題等についても検討し，以下の示唆を得た：人はもし誤っていることが分かったならばその誤りを含む例を構築し，誤りを論証する例がないならば自分の結果は真であると再び信じ始め，表出した誤りは自分の範疇外であるとしてしまう。つまり，人は経験的な規則正しさからなる抽象概念をもって問題解決に取り組み，そこから独自の規則性を妨害する場面に対して規則性そのものを再構築しようとするが，再構築できないならば経験的な規則正しさに，より固執し，独自の世界観を強めることになる。独自の規則性が定例化，一般化されるにつれ，他の説明領域に関して排他的になる。このような人の態度は数学の本性についての信念によって形成され，その信念とは人の数学的世界観であり，人が数学や数学の課題にアプローチするパースペクティブである。

幾何学的作図問題においても人が問題解決に取り組む中で問題に対する反例が挙げられたとき，先行経験に基づく暗黙の知識がその反例を満足させ得るか否かに信念が大きく関与している，といえる。従って，反例に直面したときに人がいかに行動するかによって，被観察者は観察者に対する信念の存在を捉えることができる。

3.3.3　数学的信念の構え

以上の議論より，信念は態度として表出する以前の「行為への構え」であり，行為から信念を捉えることができると解釈し得る。換言すれば，経験に基づく規則正しさ，つまりある場面で機能した考え方を別の場面においても適用させようとする行為に信念が反映されていると考えられる。ところが「反映」と表現するように，態度として表出する以前の行為への構えである信念それ自体は観察不可能であり，いかなる行為をもって反映されたかは先行する種々の観察可能な行為に依る必要がある。

これまでの議論は下の図 1 のように示される。

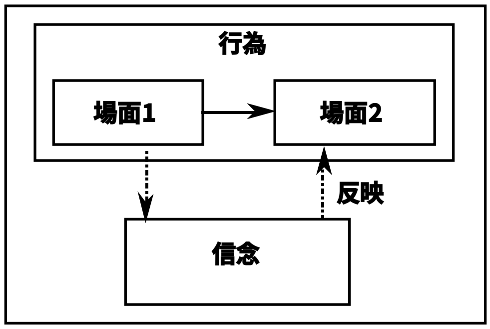


図 1

（以上，第 4 章）

3.4　事例的考察

3.4.1　関数の学習に要請される信念

本論文第 5 章では「同一概念を別の表現形式に表すこと」に対する困難を解決するために信念を視座とすると，どのように明らかにされるのかを示した。このことはつまり，関数の学習において育てたい信念の想定とそのための学習指導への示唆を意味する。

第 3 章で述べたように，表現形式の移行に価値があることを踏まえると，関数の学習に要請されるべき，換言すれば表現形式の柔軟な移行が促されるであろう数学的信念を「同一概念間には何通りかの表現形式があり，それらは個々に関連し合うものである」と設定する。

3.4.2　望ましい学習指導の例証

上述の数学的信念を育成するために，通常の学習指導における問題点と，新たに提言した学習指導がその問題点を克服するためにどのように機能するのかを指摘した。通常の学習指導では，「表をかいたから次は式を，あるいはグラフをかいてみましょう」というものが多く見受けられる。本来ならば，形式的な表，式，グラフの扱いではない，表現形式の柔軟な移行が促される学習展開が期待される必要がある。以下に，表現形式の移行の中でもとりわけ生徒が苦手とする式化（グラフからの式化）が柔軟に促されるための指導への示唆を行う。

3.4.3　例証（比例：グラフからの式化）

中学校第 1 学年の比例・反比例の学習時にグラフを扱う際に，傾きという語は使わないまでも，グラフに対し「x が増加するときの y の値

の変化を調べてみよう」とし，「x が 1 ずつ増加すると y はどれだけどのように変化しますか」という問いで傾きの概念を学習する。ところが，それを（y の増加量／x の増加量）という形式でみることはない。変化の割合の扱いとされる（y の増加量／x の増加量）が登場するのは第 2 学年の一次関数からである。

中学校第 1 学年の比例の学習における一連の流れ，とりわけグラフに関わる内容は現行では次のようになっている（図 2）。ここでは座標の表記法と式との関係を学習するものとしてグラフが扱われる。グラフと式との関係を学習する際には，与えられた式に対し，まず表を用いて x，y の値の組を座標とする点をプロットする。そしてそれらの点の集まりが為す直線が当該の式を満たすと説明づけられる。このとき，表は点をプロットするための手段として介在する。

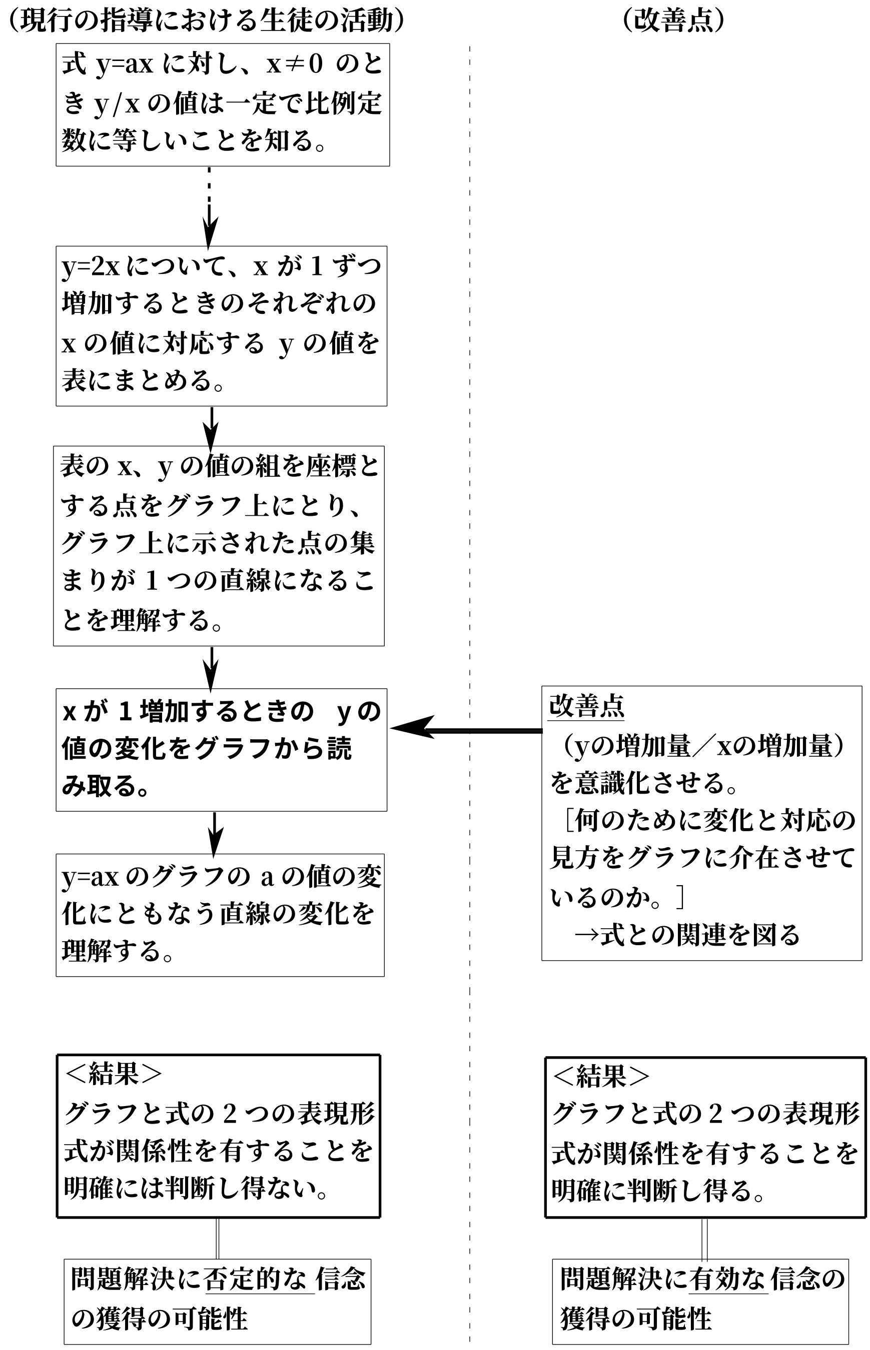


図2．　中学校第1学年におけるグラフの扱い

続いて，比例の関係が示されたグラフ上の直線に対し，x が 1 増加したときの y の変化に着眼する。ところが x の増加量が 1 であるために，（y の増加量／x の増加量）と示される見方は生徒の中に介在していない。x，y の変化量に着目することによって式化との関連が図られ，同一概念が種々の表現形式で表されることが意識化されることになる。つまり，設定した数学的信念の獲得如何に関わってくる。

そもそも傾きの背景には x 軸方向，y 軸方向の成分，つまり x の増加量とそれに対応する y の増加量が必要である。そしてその基礎には「x が X1 から X2 まで変化すると，それに対応して y が Y1 から Y2 まで変化する」という図 3-1 に示されるような「変化」と，図 3-2 に示されるような「対応」とが内在している。

X1→X2，Y1→Y2

図3 - 1

X1，X2
↓　↓
Y1，Y2

図3 - 2

従って，グラフから式への表現形式の柔軟な移行のためには，グラフの中に変化と対応の見方を同時に存在させるべきである。つまり x が増加したときの y の増加量を（y の増加量／x の増加量）の関係とみなし，グラフの中に変化と対応の見方，なおかつ x の変化に対しては変化量が 1 とならないものを同時にみさせることができれば，グラフの傾きが式の比例定数を指すことがおのずとみえてくる。教科書では x の変化量が 1 のときのみを扱っているように描写されているが，背後には x の変化量が 1 以外のことも含まれている。ゆえに，x の変化量が 2 や 3 のときを見越した指導が必要である。図 2 に示したように，生徒らは既に a=y/x であることを学習している[3)]。式に対するこの見方は（y の増加量／x の増加量）を意味している。グラフから，x が 1 増加したときの y の増加量を読み取るという生徒の活動を，単に「読む」行為に終わらせず，式で表すところの y/x として捉えるために，式化を意識してグラフに変化と対応の見方を介在させる必要がある。グラフと式とをつなぐこの関係が生徒に獲得されるならば，2 つの表現形式の間に互換性が生じるのである。

（以上，第 5 章）

IV. 研究の結論

本研究では，生徒の行為に反映される数学的信念に着目し，同一概念を別の表現形式に表すことに困難を示す生徒に対していかなる関数指導が求められるべきかについて示すことを意図して，「生徒の数学的信念を関係的に捉えることによって，関数指導に対するどのような新しい示唆が得られるか」に答えることを目的とした。

その結果，生徒が暗黙裡に有しているであろう数学的信念を実体性としてではなく関係性として捉え得ることが示唆された。従来の捉え方，つまり実体性として生徒の行為から信念を捉えようとするならば，問題として表出される行為を前提とするため，否定的な信念しか想定され得なかった。ところが，関係性として捉えることによって，問題解決に有効に働く，換言すれば肯定的な信念が想定され得る。

また，関係性としての信念の想定により，肯定的な信念を生徒に獲得させるための学習支援の改善を試みることが可能となる。本研究で考察してきた学習支援とは，表現形式の柔軟な移行が促されるべきものとした。関数概念の表現形式の移行は教育的価値を有するものであり，表，式，グラフといった単一の表現形式のみで扱うのではなく，表現形式を移行させることに，より重点をおくことが要請される。重点をおくとは言うものの，表現形式の移行の際に，形式的な扱いとなることは避けなければならない。根本にある関数概念を無視して，表からグラフ，あるいはグラフから式を作成することが目的なのではない。例えば，第 1 学年におけるグラフの扱いに対して（y の増加量／x の増加量）とみなす傾きの概念を獲得させることが，式化につながる表現形式の柔軟な移行を可能にすると考えられる。

（以上，第 6 章）

V. 今後に残された課題

本研究では，生徒の数学的信念が「数量関係」領域における困難に対していかに機能するかを吟味し，理論的枠組みに基づく例証を行った。本研究で設定した数学的信念は，表現形式の移行について生徒が獲得すべきものとしたが，提示した以外にも表現形式の移行に関する数学的

信念は存在し得る。それについての議論は行っていない。

また，行為をもって育成すべき数学的信念が獲得されたとしたが，関数の学習に設定した数学的信念が獲得されたかを判断する行為は同定できていない。

以上の点が本研究の課題として残される。

注

1) 諸問題に対して生徒が示した正答の割合を指す。

2) 調査結果が明らかになる以前に国研が確定した，生徒が示すであろう正答の割合を指す。

3) 比例を表す式が表との関係からy=axで表されることを学習した後の第1学年の教科書に以下の文言が記載される：「比例の式のなかの文字aは定数であり，比例定数という。x≠0のとき，y/xの値は一定で，比例定数に等しい。」

引用参考文献

A H. Schoenfeld. (1985). *Mathematical Problem Solving*.LEA

McLeod, D. B.(1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. p.578-581.

Carol M. Lerch(2004). Control decisions and personal beliefs: their effect on solving mathematical problems. *Journal of Mathematical Behavior 23.* p21-36.

E. Diaz-Obando et al.(2003). The impact of beliefs in student's Learning: an investigation with students of two different contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology Vol. 34. no.2*.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2003). 平成13年度小中学校教育課程実施状況調査報告書－中学校数学－. ぎょうせい.

小倉金之助(1924).数学教育の根本問題.イデア書院.

藤井斉亮，武井祐子(2003).関数関係を「式に表す」ことの困難性について.第36回数学教育論文発表会論文集.p235～240.

中島健三(1981).算数・数学教育と数学的な考え方.金子書房.