卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究，第７号，2005】

文字式の論証における命題の連鎖に関する研究

磯谷　祐介
指導教官：溝口達也

Ⅰ．研究の目的と方法

論証という分野は子どもにとって難しく，何のために学ぶのかを理解しにくい単元であるといわれ，論証を不得意とする子どもは多いことが近年の先行研究や調査等から知られている。

そのような現状に対してそれを改善しようと様々な方法がとられていると考えられるが，現状には何も変化が見られないようである。

そこで，本研究では文字式の論証において子どもが証明をできるようにするために教師がするべき指導のあり方を指摘することを目的とする。これを達成するために「命題の連鎖」という観点を設定し，以下の課題を定める。

課題１　論証指導における命題の連鎖の持つ意味とは何か

課題２　学校数学において命題の連鎖はどのように機能するか

これら設定した課題の解決のために課題１に対しては宮崎樹夫氏による先行研究を参考にし，命題の連鎖の果たす役割について考察を行う。また，現在の学習指導の問題点について考えることで命題の連鎖を教師側が意識することの必要性について述べる。

課題２に関しては課題１で明らかにした命題の連鎖という観点を用いて子どもに対する教師の支援を考える。子どもがどのように命題の連鎖を行っているのかの分析や子どもの思考と解答の記述を対比することを通して，子どもの思考を捉え，エラーを修正できるような支援を考える。あくまで表面的に子どものエラーを修正するのではなく，子どもの思考という本質的な部分を修正できるものを目指す。

Ⅱ．本論文の構成

（1 ページ 35 字×35 行，43 ページ）

Ⅲ．研究の概要

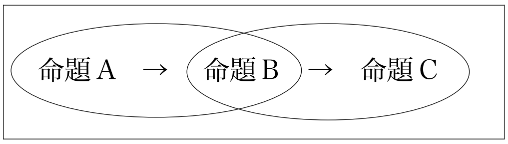
3-1 命題の連鎖の持つ意味

宮崎（1995）は「学校数学における証明に関する研究」において「命題の連鎖に関する言語」を以下のように定めていた。

・数や図形という対象，対象の性質，対象間の関係，命題の前件から後件を導けること，命題の前件から後件を導ける理由を表すための，記

号とその規則配置がある。
・命題を表すための，語とその配置規則がある。（語は上記の記号とその配置規則による）
・命題の連鎖を表すための，文の省略／配置規則がある。（文は上記の記号とその配置規則による）
これを参考にして「命題の連鎖」とは何かと考えた。

その結論として，本研究では「命題の連鎖」を「命題A→命題Bから命題Bを用いて命題B→命題Cを導く」という意味で用いる。



では，なぜ「命題の連鎖」という観点を考える必要性があるのだろうか。

文字式の論証においては長年にわたる問題点として，子どもが証明が書けない，文字が正しく使えない等の問題が指摘されている。これらの問題に対して従来の学習指導では子どもの解答を教師が修正するような支援しか行われていない。これは子どもの解答を表面的に修正したに過ぎず，子どもの解答の背後にあるものを正しい方向に修正したとはいえない。つまり，どの命題からどの命題を導いたのか，ということを子ども自身が理解することができなければ，解答を表面的に修正してもあまり進歩したとは言えない。

子どもの解答の背後にあるものを修正することこそが，証明をできるようにするために必要不可欠であると考える。そのための方法として「命題の連鎖」という観点を用いて子どもの思考を分析し，支援を考えることが有効であると考える。

命題が連鎖されるということは簡単に言えば当たり前のことかもしれないが，その連鎖のされ方の違いを知ることで，子どもの思考や認識の仕方などを分析できるものと考える。

また，命題の連鎖というものは，子どもが問題を解く上では無意識的なものであると考える。だからこそ教師側がそれを意識的にとらえることが必要である。

3-2 子どもの文字の用い方について

先行研究として羽住邦夫，中西知真紀ら（1990）は文字式の論証における子どもの正答率を知るための調査を行った。そこで得られた子どもの解答例を文字の用い方という観点で再分類すると、子どもの解答は大きく分けて以下の３種類が考えられることが導かれた。

・ある数の代わりに文字を当てはめているもの
・xの値を求めているもの
・xの値に関わらず成り立つことを示しているもの

つまり，子どもの文字の用い方は以下の３種類に分類できるということである。

・ラベルとして文字を用いているもの
・未知数として文字を用いているもの
・変数として文字を用いているもの

補足を加える。本研究において「ラベル」というのは「ある数値のかわりに文字を当てはめるという用い方をするもの」、「未知数」というのは一般に値が決まっているがその値がまだ分かっていないもの、「変数」とは「変わりうるもの」「様々な値をとりうるもの」という意味で用いる。

本研究にて扱う問題については後述するが、「ラベル」として用いているものには以下の解答があてはまる。

2=x とすると，9=x+7，16=x+14，x+x+7+x+14=3x+21。両辺が等しくなるので，どこでもいえる。

「未知数」として用いている解答には以下のものがあてはまる。

3つの数はx，x+7，x+14…Ⅰ。3(x+x+7+x+14)=x+7，9x+63=x+7，8x=56，x=7となって，Ⅰに代入。7，14，21より14×3=7+14+21，42=42となって，成立。

また、「変数」として用いているものには以下の解答があてはまる。

３つの数は，x，x+7，x+14。
x+(x+7)+(x+14)=3(x+7)。x+7 はまん中の数だから，3(x+7) はまん中の数の３倍。よって成立。

これを踏まえて考えれば，文字式の論証においては文字を変数として用いるのが望ましい。それは「ある特定の数の場合に成り立つ」ではなく「全ての場合において成り立つ」ということを示す必要があるからである。しかし，子どもの中には文字をラベルとして，あるいは未知数として用いて解答を書くものもいる。文字の用い方が異なるのであれば，命題の連鎖も異なるものになり，その結果として支援も異なるものになると考える。

すなわち，これらの文字の用い方というものが命題の連鎖というものとどのような関係にあり，それを踏まえたうえで教師はどのような支援をするべきなのかという点についても考えなければならない。

また，このような解答を示した子どもに対する支援はどうあるべきか。どのような支援をすることで文字を変数として用いる状態にまで子どもを引き上げることができるのであろうか。

3-3 分析の方法について

本研究では，子どもの解答から子どもの思考を分析し，そこから得られた結果をもとにその子どもに対してどのような支援を行ったらいいのか，ということを考えることを目的とする。

子どもに対する支援を考えるにあたって子どもの解答を分析する。解答の分析にあたって，筆者はまず以下の方法をとった。

方法 A）子どもの記述から命題の連鎖を読み取る。

しかし、この方法ではこの方法では子どもがその解答においてどの命題からどの命題を導こうとしているのかを分析することができた。

しかし，子どもの解答を分析するだけでは子どもの思考というものをうまく捉えることができなかった。また命題の列挙の中に「命題の連鎖」が含まれてしまったり，筆者自身の解釈が必要以上に含まれることで拡大解釈をしてしまったりしたため，この方法では目的を達成するには不十分であると感じた

先ほどの方法では子どもの解答から子どもの思考を読み取ることはできなかった。それは，子どもの記述だけでは子どもの思考を読み取ることはできないからである。そもそもこのような方法で子どもの思考を読み取ることができるのであれば，現行の学習指導において取り入れられ，成果を上げてるに違いない。現在この方法は取られているのであろうが，それだけでは十分な成果が得られていないのは明らかなことである。すなわち，これにかわる新たな方法を設定し，子どもの記述を分析することが子どもの状態を知るにあたって必要となってくるのはないか。では，どのような方法を新たに設定し，子どもの解答を分析すればよいのか。

そこで，先ほどとは異なる方法 B を設定した。

方法 B）潜在的な命題，顕在的な命題に分けて考える。

なお、「顕在的な命題の連鎖」と「潜在的な命題の連鎖」を以下のような意味で用いることにする。

・顕在的な命題の連鎖－子どもの解答から読み取ることのできる命題の連鎖
・潜在的な命題の連鎖－教師側の考える命題の連鎖

子どもの解答からの命題の連鎖，つまり顕在的なものからだけでは子どもの解答を読み取るのは困難であった。ならば，子どもの解答に含まれる「顕在的な命題の連鎖」と「潜在的な命題の連鎖」を比較検討すれば，きっと子どもの思考におけるエラーの発見や，その修正を行うことができるのではないかと考えた。

分析・考察を行うにあたっては「顕在的，潜在的」という視点を取り入れる。それを踏まえて子ども，教師の解答を考えれば，以下の４つが定まる。

・子どもの顕在的な解答
　－子どもがノートに書く解答
・子どもの潜在的な解答
　－子どもの思考の中にある解答

・教師の顕在的な解答
　ー教師が板書する解答
・教師の潜在的な解答
　ー教師の思考の中にある解答

これらを比較検討することで，目的を達成できるものと考える。

子どもの潜在的な解答というものはノート等を通して顕在的なものにすることが可能であろう。だが，子どもが自分の考えていることを必要以上に詳しく記述することは考えにくい。子どもの潜在的な解答に比べれば顕在的な解答というものは省略等がされているという可能性を含むものである。子どもの潜在的な解答が全く同じ形で顕在的に現れるとは限らないが，顕在的な解答をみることで子どもがどの状況にあるのかを把握することができると考える。すなわち，最終的には子どもの潜在的な解答に含まれるエラーを改善することが目的となりうるのである。

ここで，子どもは正答あるいは誤答を書くと考えられるが，教師は普通正答を書くと考えられる。よって，子どもの顕在的な解答と潜在的な解答，教師の解答（正答）の３つを比較すればいいのでないかと考えられる。それを通して子どもの潜在的な解答のエラーを発見し，それを修正できるような支援を考えるのはないか。
その結果，子どもの解答からだけでは省略されていた部分を読み取ることができ，この２つの対比から支援を考えられるかのように思えた。しかし，このような方法ではうまくいかなかった。その理由は以下による。

方法Ｂでは観察可能であれば顕在的，でなければ潜在的としたが，そもそも顕在的・潜在的を観察可能かどうかで判断していいのかという疑問が残った。また，「解答」とは目に見える形で示されているものであることから，「潜在的な解答」という言葉に自己矛盾を含んでいること，「顕在的な命題」と「潜在的な命題」を同じ水準で考えることには無理に気がついた。よって，この方法では目的を達成するには不十分であると感じた。
これより、先ほどの方法Ａとも方法Ｂとも異なる方法Ｃを設定する。具体的には以下の方法をとるものである。

・子どもがどういう状況にあると，この子どもはこのように考える
・このように考えれば，例えば例～が作れる

この方法Ｃを用いて子どもの解答の分析を行う。

3-4 子どもの解答の考察

前節で述べたように子どもの解答を分析するにあたって「子どもの記述から命題の連鎖を読み取る」といった方法や「顕在的な命題，潜在的な命題に分けて考える」等の方法をとったが，いずれもうまくいかなかった。これより「子どもがどういう状況にあると，この子どもはこのように考える」といった方法を用いて分析を行う。なお本研究で取り扱うのは以下のようなカレンダーの問題である。

調査問題

下のカレンダーをもとにして次の問いに答えなさい

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

上のわくに囲んだように，たてに３つ続いている数の和は，まん中の数の３倍になっています。
このことがどこでもいえることを説明しなさい。

この問題において、望ましい文字の用い方をしているのは以下の解答である。

「３つ続いている一番小さい数をｘとすると，３つの数は，x，x+7，x+14 と表すことができる。
x+(x+7)+(x+14)=3(x+7)。x+7 はまん中の数だから，3(x+7) はまん中の数の３倍である。
つまり，カレンダーでたてに３つ続いている数の和は，まん中の数の３倍になっている。」

この解答において、文字が変数として用いられ、どの値においても成り立つことが示されている。この問題では文字を変数として用いるのが望ましいが、中には文字をラベルとして、または未知数として用いる子どももいると考えられる。それらを以下に挙げる。

3-4.1 ラベルとして文字を用いている例

ラベルとして文字を用いている解答の例としては以下のようなものが考えられる。

> 2=x とすると，9=x+7，16=x+14，x+x+7+x+14=3x+21。両辺が等しくなるので，どこでもいえる。

この解答が導かれたということは，この子どもは2,9,16という数において成り立つことは示すことができ，そこからどの場合でも成り立つことを示そうとしたと考えられる。これを図で示せば以下のようになる。

P1：2=x
P2：9=x+7
P3：16=x+14
P4：x+x+7+x+14=3x+21
P5：両辺が等しくなる
P6：どこでもいえる

2+9+16=3×21→P1→P2→P4→P5→P6
P1→P3→P4

このような解答をした子どもは，ある特定の値の場合であれば成り立つことを理解している，という状態にいるということである。このような状態にいる子どもは先ほどの例より「特定の場合において成り立つ」という命題から「すべての場合において成り立つ」という命題を直接的に示そうとする命題の連鎖が行われる。だが,「特定の場合において成り立つ」という命題から「すべての場合において成り立つ」という命題は直接的に導くことはできないため，その中間命題となるような命題を挟むことが必要となり得る。

このような解答をした子どもに対しては，上記のような文字の用い方ではすべての場合を示すことはできないため，「どのように文字を用いたらいいのか」ということについて考えさせたい。

3-4.2 未知数として文字を用いている例

未知数として文字を用いている解答の例としては以下のようなものが考えられる

> 3つの続いている一番小さい数をxとする。x, x+7，x+14…Ⅰ。
> 3(x+x+7+x+14)=x+7。置き換えることができて，3x+3x+21+3x+42=x+7, 9x+63=x+7, 8x=56，x=7となって，Ⅰに代入すると7，14，21となって14×3=7+14+21，42=42となって，3つ続いている数とはまん中の数の3倍になっている。

この解答が導かれたということは，3x+3x+21+3x+42=x+7を恒等式ではなく方程式であると考え，その値を求めたと考えられる。すなわち，x=7の場合についてのみ成り立つことを示したことになるのである。つまりこれを図で示せば以下のようになる。

D1：3つの続いている一番小さい数をxとする。
D2：x
D3：x+7
D4：x+14
D5：3(x+x+7+x+14)=x+7。
D6：3x+3x+21+3x+42=x+7
D7：9x+63=x+7
D8：8x=56
D9：x=7
D10：7，14，21
D11：14×3=7+14+21
D12：42=42
D13：3つ続いている数とはまん中の数の3倍になっている

D1→D2→D5→D6→D7→D8→D9
D1→D3→D5
D1→D4→D5
D1→D10→D11→D12
D9→D10

上記の解答は文字を用いて適切に表すことができるが，３つの数の和と真ん中の数の３倍の関係式を方程式と見なし，それを解くという傾向があるように思われる。これは「すべての場合において成り立つ」ことを示す必要がある本問題においては誤りであるといえる。

この解答は，３整数の関係を正しく示しているものの，その後の方程式を解き x=7 という解答を導き題している。この解答に関しては問題文に含まれる「すべての場合において成り立つ」という条件を満たしていないことに気づかせ，では「すべての場合において成り立つ」ことを示すためにはその式（例４を答えた子どもが方程式として解いたもの）をどのように扱ったら条件を満たすことができるのか，ということを考えさせたい。

Ⅳ．研究の結果

課題１「論証指導における命題の連鎖の持つ意味とは何か」に対しては「命題の連鎖」を「命題Ａ→命題Ｂから命題Ｂを用いて命題Ｂ→命題Ｃを導く」という意味で定義し，現在の学習指導の問題点である「表面的な解答の修正」だけでは子どもは本当に問題を理解したとはいえず，命題の連鎖を用いた本質的な解答の修正を行うことが必要であることを述べた。

課題２「学校数学において命題の連鎖はどのように機能するか」に対しては，課題１で考察を行った，「命題の連鎖」を用いて調査問題に対する解答例を分析考察を行うことで文字の用い方によって子どもの解答が異なることを発見した。具体的には，命題の連鎖と文字の用い方の関連性について以下のことが得られた。

・子どもが「個別の場合」について考えるという状態にあれば，子どもは文字をラベルとして用い、個別の場合に成り立つことを示すための連鎖がされる。
・子どもが「すべての場合」について考え方程式を解こうとする子どもは、文字を未知数として用い、方程式を解くための連鎖がされる。
・子どもが「すべての場合」について考え恒等式を導こうとする子どもは、文字を変数として用い、両辺が等しいことを示すための連鎖がされる。

また，誤答を答えた子どもを正答の状態まで引き上げるための支援について

・ラベルとして文字を用いている子どもにはすべての場合について成り立つことを意識させ，そのためにはどのように文字を用いたらいいのか，という点に気づかせる。
・未知数として文字を用いる子どもは方程式を解いてしまいがちなので，すべての場合について成り立つことを示すためには「両辺が等しい」ことを導けばいいことに気づかせる。

であることが導かれた。

また、本研究では達成することができなかった内容や，残された課題は以下のものである。

1）最終的にそれぞれの子どもに対して具体的な支援のあり方について示す，ということを目的としていたが，「具体的な支援」といえるほど支援に具体性があったようには思えない。例えば，先ほどのラベルとして文字を用いた子どもに対して，「すべての場合で成り立つ」ことに気づかせるためには具体的にどのような発言をするべきなのか。

現場経験のない筆者にはこのことを考えるのは困難なことであった。

２）子どもの解答からその背後にあるものをとらえるには，子どもの解答とは異なる次元のものを必要とした。このような方法を用いた分析の方法というのは筆者の力量を超えるため扱うことのできなかった部分であった。

Ⅴ．主要引用・参考文献

宮崎樹夫（1995），「学校数学における証明に関する研究―証明に至る段階に説明の水準を設定することを目的として―」

杜威（1991），「学校数学における文字式の学習に関する研究―数の世界から文字の世界へ―」，東洋館出版社

小関熙純（2001），『「論証」の理解に関する研究』，第 34 回数学教育論文発表会論文集

国宗進・関口靖広・宮崎樹夫（2003），「昨年度の「証明」分科会における　成果と課題」第 36 回数学教育論文発表会論文集