卒業論文要約　【鳥取大学数学教育研究、第７号、2005】

中学校数学教育における確率指導に関する研究

―確率の意味における多様な解釈について―

丸山勝寛
指導教官　矢部敏昭

Ⅰ．本研究の目的と方法

確率という言葉は、降水確率、懸賞に当たる確率、野球の打率、というように我々の生活の中でよく使用されている。そして我々は確率を利用することにより、今後よりよい結果が得られると予想される行動をとることができる。しかし、確率を利用するには、確率というものがどのようなものであるかをしっかりと理解しておかなければうまく利用することはできない。実際に確率を利用して考える場面では「硬貨投げで表が連続で出たから、裏が出ないとおかしい、そろそろ裏が出るはずだ」「降水確率 10％で雨が降ったから天気予報は外れた」というように、確率において正しい理解がされていないと思われる場面が見られる。そこで本研究では以下の２点について明らかにするものである。

１、確率が示す数の意味について
２、確率が示す数の多様な解釈について

前者の目的については、統計的確率と数学的確率を取り上げ、そこで扱われる事象の考察を通して検討するものである。

後者の目的については、確率についてどのように捉えているかを調査問題によって明らかにしていくものである。

以上の疑問点を中心課題として検討していくものである。

よって本研究の課題としては、以下の３点を課題とする。

Ⅱ．本論文の構成

第１章　統計教材の位置づけ
　１　統計とは
　２　統計の機能と役割
　３　確率とは
第２章　本研究の目的と方法
　１　本研究の目的
　２　本研究の課題の設定
第３章　本研究の内容
　１　確率教育のねらい
　２　確率の示す数の意味
　３　「同様に確からしい」の解釈について
第４章　確率の多様な解釈について
　１　確率の多様な解釈について
　２　調査問題の作成
　３　指導への示唆
第５章　終わりに
　１　本研究のまとめ
　２　終わりに

Ⅲ．研究の概要

３．２　確率の示す数の意味

ここでは確率の二つの定義からその意味を明らかにする。また、実際にサイコロを振る試行を行うことによって、確率とはどのような意味を持つものなのかを明らかにする。

３．２．１　統計的確率について

統計的確率の定義は「n 回試行を行った結果、ある事象 E が r 回起こったとする。ｎを大きくしていくとき、ｒ/ｎが一定の値 p に近づけば、E の確率 P(E)を、$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{p}=p$ とする」とされている。

統計的確率とは、多くの試行を繰り返したときや、死亡率のようなほとんど等質なものの繰り返しを集めたとき、事象Ａが現れる割合である。この統計的確率は実際に多数回の試行をする実験などから得られたデータを整理し、その表やグラフから割合が一定の値に近づくことが読み取れるので直観的に理解し易いと考える。ただ、実際に無限回の試行を繰り返す、無限のデータを集め

る、ということは不可能であるから、真の値を見出すことは実際のところ不可能である。

統計的確率では、データ数さえ集めればどんな場合の確率も求めることができる。ただし、そのデータは、同一条件化で集められなければならず、データ数が少ないとばらつきが大きく正確な値は求められない。

3．2．2　数学的確率について

数学的確率は「ある試行について、標本空間の大きさがｎで、どの根元事象も同様に確からしく起こるとする。表本空間の中で、ある事象Ｅをとり、Ｅ の起こる場合の数がｒであるとき、Ｅ の確率

P(E)を　$P(E)=\frac{r}{n}$」と定義してある。

数学的確率は、「同様に確からしい」という条件のついたものしか求めることができない。しかし統計的確率のように多数のデータを集めるような手間を取らずに、計算で求めることができるので簡単に正確な値を求めることができる。

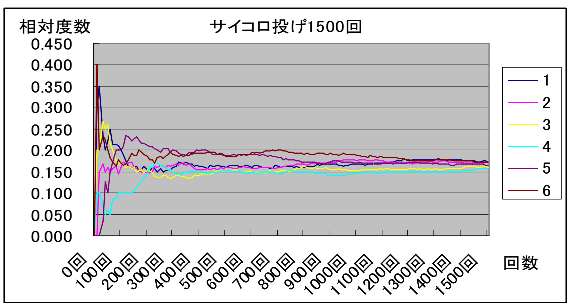
3．2．3　統計的確率と数学的確率の共通点、相違点

統計的確率は実験や観測による多数のデータから求める。数学的確率は同様に確からしいことから計算によって確率を求める。

確率を求める場合には、その事象が同様に確からしいものであれば、統計的確率、数学的確率のどちらでも求めることができ、その値は一致する。同様に確からしくない場面では、統計的確率でしか求めることはできない。

3．2．4　サイコロ投げの試行からの考察

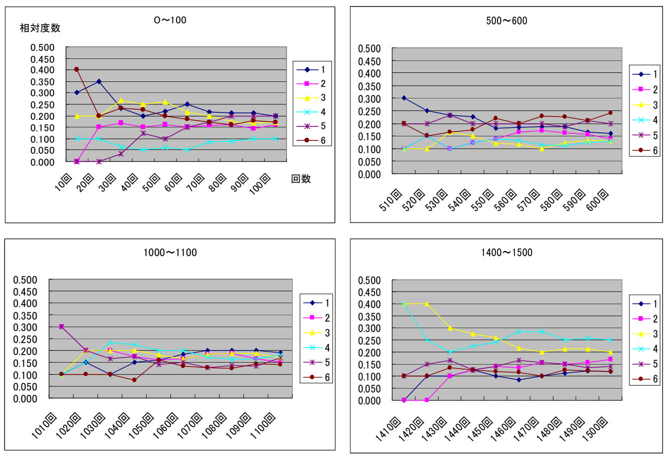
確率の意味を考えるために、実際にサイコロを振って相対度数を求め、その結果をグラフにあらわした。それが以下の結果である。



1000 回あたりまで多少の上下のばらつきが見られるが、1000 回を越えると安定して 0.15 から 0.18 あたりの値に収まっていくことが読み取れる。このことよりさらに実験を重ねることで、相対度数が数学的確率である0.166…のあたりに近づいていくと考えられる。

このように試行回数を増やしていくことで、出る目の割合がある一定の値に近づいていくことが読み取れる。このときの値が統計的確率であり、その値は数学的確率と一致するのである。

また、このグラフだけを見ると 500 あたりから 1500 までは出る目のばらつきが少ないように感じるが実際はどうなのか。また 0.166…近づいていくことから、多く出すぎた目はあまりでなくなりその値に近づいていくように感じるが実際はどうなのか。考察するために 1500 回の試行を 100 回刻みごとのグラフにしてみる。（一部抜粋、 0～100 回、500～600 回、1000～1100 回、1400～1500 回）



どのグラフも最初はばらつくものが多いが、100 回目には 0.1 から 0.25 あたりに近づいていることがわかる。グラフ 2 では、試行回数が多い部分はばらつきが少ないように見えるが、実際はそうではなく何回目でも同じようなばらつきを見せることがわかる。

また、0～100 間では 1 の目が多く、100～200 間では 5 の目が多いというように多く出ている目や少なく出ている目もばらばらである。よってある目が多く出た後にはそのほかの目が出やすくなるのではなく、多く出た目が今度は少ししか出なかったり、今度は他の目が多く出たりとさまざまな出方が絡み合うことと、試行回数という分母が大きくなることによってばらつきが微々たる物となる。その結果割合がある値(この場合は 1/6)に近づいていくのである。

3．3　「同様に確からしい」の解釈について

同様に確からしいの定義、指導については「ベストを求める数学科授業研究」の中で次のように

述べられている。
「この定義について『確率論』（渡辺孫一郎著、春日屋伸昌改訂、日進出版）に、次のように述べられている。
『“同じ程度に確からしい”という意味についてのいろいろな説があるが、そのうち代表的なものが２つある。１つは消極的定義であって、他は積極的定義である。

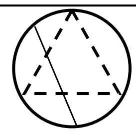
定義Ⅰ　２つの事象があって、一方の事象が起こることよりも、他方の事象が起こることのほうが多く期待できる理由がまったく存在しないときは、これら２つの事象はその起こることが同じ程度に確からしいという

定義Ⅱ　一方の事象が起こることと他方の事象が起こることが同じ程度に期待できる十分な理由が存在するときは、これら２つの事象が起こることは同じ程度に確からしいという』

このあと、それぞれの定義に対して確率論上矛盾を含んでいることを具体例を挙げて述べている。
　このように定義してかかることは無理なので、数学的確率は先験的確率とも言われるように、確率の前提となる『同様に確からしい』は無定義で承認していきたい。
　ただ、まったくの先験的なものとして扱うことには、その事象を理想化して考えるにせよ、教育的には問題がある。なぜなら、ある事象がＡ子にとって同様に確からしいことでも、Ｂ子にとってそうでないと考えている場合がありえるからである。
　同様に確からしい事象は、私たちの知る限りでは、有限個のものであるし、また、学習対象になりえるものとなると数はずっと少なくなる。そこで、サイコロ、くじ、硬貨、袋の中の碁石取りなどは同様に確からしいことを通して同一レベルにしておく必要がある。先験的なことについても、経験上知りえたことも含めて、確認しうるための配慮・指導は当然されなければならない」
　この著書では同様に確からしいの指導には、厳密な定義をするのではなく、先験的なものとして扱うのであるが、同様に確からしいということを同一レベルにしておくことが必要であると述べている。同様に確からしいことを同一レベルにするということとは、この事象は同様に確からしい事象であり、この事象は同様に確からしくないということを、全体で共通することであると考える。例えば、サイコロの出目は同様に確からしいものであり、今日家に電話がかかってくることは同様に確からしくない事象である。このように、どのような事象が同様に確からしいのかを理解しておくことが必要なのである。

４．３．２　「同様に確からしい」の解釈について
　では「同様に確からしい」ということを同一レベルにしておかないと数学的確率を求めるには不都合があるとはどういうことかを考える。その例としてベルトランの問題を挙げる。

与えられた円０において１つの弦をランダムに引くとき、その弦の長さが内接正３角形の１辺より大きい確率を求めよ。



解１、1/2 となる証明
　直径ABに垂直な弦CDがABのどの部分においても交わることを、同様に確からしいと仮定すると図１－１のように直径ABに垂直な弦が無数に引けることとなる。

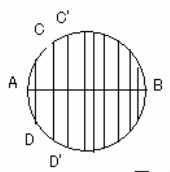


図1-1

この弦が内接する正三角形の一辺より長くなるのは、図１−２の EF の範囲であり、直径 AB と EF の比を求めればよい。

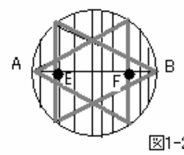


図1-2

　図１−３より、点Ｏは内接三角形の重心なので AO：OF＝２：１　BO：OE＝２：１。

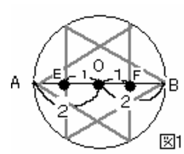


図1-3

このことより、AB：EF＝２：１、よって求める確率 1/2 となる。

解２、1/3 となる証明
　円周上の１点Ｐを通る弦が半径 OP とどのような角をなすことも同様に確からしいと仮定すると、図２－１のように点Ｐから無数の弦がひけることとなる。

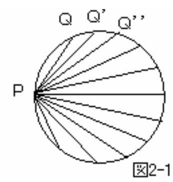


図2-1

　図２−２より弦が内接正三角形の一辺より長くなるのは、点Ｐと弧 AB の中の１点を通る弦である。円周上の一点を選ぶとき弧ABが選ばれる確率を求める、すなわち弧 AB と円周の比を求めればよい

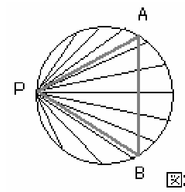


図2-2

図２−３より∠APB は正三角形の角であるから　∠APB＝60°
よって∠AOB＝120°
　このことより弧 AB と円周の比は 360：120＝3：1
よって求める確率 1/3

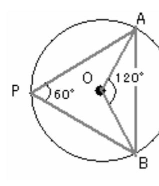


図2-3

この問題は、同様に確からしいのということの解釈においては、異なる結果が得られることを示している。このように同様に確からしいの解釈は困難なものであると考えられる。

４．１　確率の多様な解釈について

４．１．１　確率を表す数の意味について

確率は、分数表示や百分率で表されている。その表された数を、ある事柄が起こると期待される程度を数であわしたもの、という認識ができているのか。また確率がｐであるということは、同じ実験や観測を多数回繰り返すとき。その事柄の起こる割合がｐに近づくという意味である。しかしこの意味について正しく捉えられていないのではないか。例を挙げ考察する。

例１、	サイコロを投げるとき、1 が出る確率は 1/6 なのに、6 回投げて一度も 1 の目が出ない。これはおかしい。

確率が 1/6 というとき、それは、6 回その試行を行えばいつもそのうちの 1 回は必ず起こる、という確定的なことを表す数ではないのである。

しかし、このことを生徒はどうとらえているのだろうか。サイコロ投げの試行を 6 回行うとき、1 回は必ず 1 の目が出ると思っているのではないであろうか。また、5 回目までに 1 から 5 までの目が出ると次は 6 の目が出ると思っているのではないか。

例２、	硬貨を投げる試行で表が 60 回、裏が 40 回出た。硬貨を投げるときも他が出る確率表が出る確率も裏が出る確率も 1/2 になるはずだから裏が多く出て、1/2 に近づいていくはずだ。

実験結果が確率どおりの値から離れても、その値に近づこうとする何らかの力が働くのではなく、1 回 1 回の試行は独立である。Ⅲ.2.4 で述べたように、裏が連続で出て確率どおりの値から－にずれていく可能性も、表が連続で出て確率どおりの値から＋にずれていく可能性も同様に期待され、試行回数を増やすことにより＋と－のずれがうち消しあうこと、さらに分母数が大きくなることで 1/2 に近づいていくのである。

しかし生徒は表が出すぎると、表が出る確率が 1/2 に近づかないからおかしいから裏が出やすくなる、と考えてしまうのではないか。試行回数を増やしていくと表の出る割合は、同様に確からしいことから求めた 1/2 の値に近づいていく、という考えのみが深く残っているためにこのような考えに至るのではないか。

４．２．３　調査問題の作成

実際に子どもたちが確率の意味についてどのような認識を持っているかを明らかにするために調査を行う。

調査問題の対象はＴ中学校の第 2 学年 137 名と第 3 学年 148 名である。第 2 学年では確率を学習する前の生徒が、普段の生活などから確率についてどのようなとらえ方を持っているのかをよみとるものである。第 3 学年では確率を学んだ後に、確率についてどのようなとらえ方をしているか、正しい意味を理解しているのかどうか、という点を見るものである。

第２学年問１

あなたは確率ということをどの程度知っていますか。下の記号から選びなさい。 　①知らない　②聞いたことはある 　③なんとなくわかる　④知っている また、確率という言葉をどのような場面で聞いたことがあり、その数が何を表していると思いますか。自由に書いてください。(複数回答可)

この問題は確率を未習の生徒が日常の中で、どの程度確率というものを知っているかの認知度を見るものである。

第２学年問 2、第３学年問１

(２年)　次の事柄のでやすさは同じといえるか、異なるといえるか、理由も書いてください。 (３年)　次の事柄は同様に確からしいといえるか、理由も書いてください (1)　右の正六面体のサイコロを投げるとき、1 の目が出ることと 2 の目が出ること。 (2)　右の直方体のサイコロを投げるとき、1 の目が出ることと 2 の目が出ること。 (3)　A 君がじゃんけんをするとき、グーを出すこととチョキを出すこととパーを出すこと。 (4)　歪みのない硬貨を 2 枚同時に投げるとき、2 枚とも表がでることと 1 枚表で 1 枚裏が出ること。

この問は同様に確からしいの概念について見るものである。第２学年については「同様に確からしい」という言葉を習っていないので「でやすさは同じといえるか、異なるといえるか」という問題提示にした。第２学年は今までの経験などから、同様に確からしいという考えを持っているのかを明らかにし、第３学年には同様に確からしいという考えが定着しているかを見る。

第２学年問３　第３学年問２

(２年)　正しく作られたサイコロを５回投げた結果、1,4,5,3,6 の順に目が出た。６回目を投げるとき、どの目が出ると思いますか。理由とともに書いてください。

(3年)　正しく作られたサイコロ投げるときそれぞれの目が出る確率は 1/6 である。このサイコロを 5 回投げた結果、1,4,5,3,6 の順に目が出た。
6回目を投げるときどの目が出やすいと思いますか。理由とともに述べなさい。

この問題では、確率の意味について、特に確率の数の捉え方についてみる問題である。第２学年では今までの経験から感覚的にサイコロについてどのように捉えているかをみる。第３学年では「サイコロ投げるときそれぞれの目が出る確率は 1/6 である」ということを問題文に出すことにより、1/6 という値について、どのように捉えているかを見る。

第２学年問４　第３学年問３

A,さん、B さん、C さんの 3 人がそれぞれ歪みのない硬貨を持ち、各自それを 10 回投げたところ次のような結果が出た。
A さん、28 回表、72 回裏　　B さん、48 回表、52 回裏　　C さん、79 回表、21 回裏
(2 年) 3 人が 101 回目を投げるとき、誰が一番表が出やすいといえるか。また理由も書いてください。
(3 年)3 人が 101 回目を投げるときの確率を求め、その上で誰が一番表が出やすいといえるか。また理由も書いてください

この問は確率の意味、特に数学的確率と統計的確率の混同について見るものである。3 年は確率も求めさせることによって、その確率の数についてどのように考えているかを見る。

第２学年問５　第３学年問４

あなたは何回硬貨を投げると、表と裏の出る回数が同じになると思いますか。次から選びをつけて下さい。
①　２回　②10 回　③50 回　④100 回
⑤500 回 ⑥1000 回 ⑦3000 回 ⑧それ以上

この問では、統計的確率の「多数回」というものを生徒がどの程度の回数と捉えているかをみるものである。この結果と実際の実験結果を比較することにより、感覚と実際のズレを明らかにする。

４．２．２　調査問題の結果と分析　(一部抜粋)

調査の結果を分類に分け、それぞれがどのような考えから来ているものかを考察する。

第２学年問 2、第３学年問１
(3)　A 君がじゃんけんをするとき、グーを出すこととチョキを出すこととパーを出すこと。

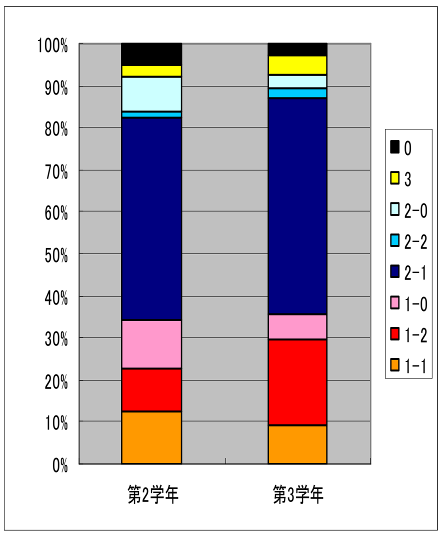
出やすさ	理由	分類
変わらない	「適当に出すと、なんとなくそうなる」 「適当にやっていればうまく分かれる」 じゃんけんは手を適当に出すものであると考えている。	1-1
	「手は 3 つだから」「確率は 1/3 だから」 ３つあるから同様に確からしいと考えている。	1-2
	なんとなく、理由なし	1-0
変わる	「人には癖、こだわりがある」「A 君の気分による」 人の意思が絡むため同様にたしかっでは無いと考えている。	2-1
	「チョキは出しにくいから少ない」 「統計ではグーが出やすい」 人の意思が絡む理由を統計などから指摘しており、同様に確かではないと考えている。	2-2
	なんとなく、理由なし	2-0
どちらともいえる	人の意思が絡む場合とそうでない場合の前提により答えが変わることを理解している。	3
無回答		0

第２学年

分類	人数	割合
1-1	17	12.4%
1-2	14	102%
1-0	16	11.7%
2-1	66	48.2%
2-2	2	1.5%
2-0	11	8.0%
3	4	2.9%
0	7	5.1%

第３学年

分類	人数	割合
1-1	14	9.5%
1-2	30	20.3%
1-0	9	6.1%
2-1	76	51.4%
2-2	3	2.0%
2-0	5	3.4%
3	7	4.7%
0	4	2.7%



両学年ともに３割５分ほどの人数がじゃんけんを同様に確からしいものであると考えているが、その理由付けに差が出ている。第３学年は１−２の理由付けをする割合が第２学年に比べて多くなっている。すなわち手が３つあることから、同様に確からしいものとして認識している生徒の割合が多いである。

このような生徒はすべての事象を同様に確からしいものと見てしまいがちになっているのではないか。じゃんけんでの人の意思のように理由が見つけにくいものに関しては、あまり考えずに同様に確からしいものと決め付け、割合だけを求めてそれを確率としてしまうのではないか。

第２学年問３
正しく作られたサイコロを 5 回投げた結果、1,4,5,3,6 の順に目が出た。6 回目を投げるとき、どの目が出ると思いますか。理由とともに書いてください。

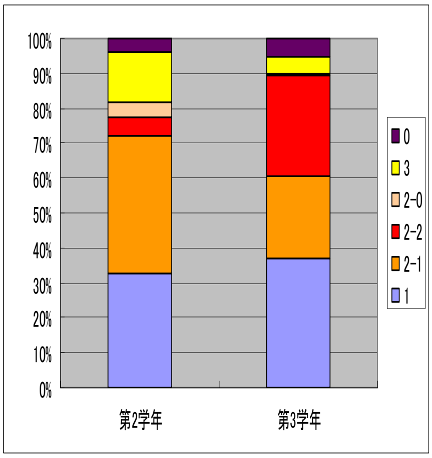
出やすい目	理由	分類
どの目も同じ	「今までの結果は関係ないから」「サイコロはどの目も同じでやすさだから」 サイコロの性質や同様に確からしいの意味や、試行の独立性等の確率の意味に対する理解が深い。	1
２が出る	「２だけが一度も出てないから」「順番で考えると 2」 サイコロはどの目も同じように出るということの意識はあるが、どの目も同じように出なければいけないと考えている。直感的に「2 だけが出てないから出る」と考えているのではないか。	2-1
	「６回に１度は２が出るはずだから２が出やすくなる」「どの目が出る確率も等しくて今までに２以外が出たから」「1/6 にならないとおかしい」 どの目が出る割合も 1/6 になるはずだから、出ていない目は出やすくなると考えている。	2-2
	・なんとなく、理由なし	2-0
その他		3
無回答		0

第２学年

分類	人数	割合
1	45	32.8%
2-1	54	39.4%
2-2	7	5.1%
2-0	6	4.4%
3	20	14.6%
0	5	3.6%

第３学年

分類	人数	割合
1	55	37.2%
2-1	35	23.6%
2-2	42	28.4%
2-0	1	0.7%
3	7	4.7%
0	8	5.4%



正当である1-1に関しては第３学年でわずかに高いがそこまで大きな差は見られなかった。注目すべきは両学年とも約５割の生徒が「2 が出る」と答える結果になり、若干ではあるが第３学年のほうが多くなる結果となった点である。またその内訳は、第２学年は単に「2 が出てないから出そう」という 2-1 が多いのに対して第３学年は「1/6 になるから、2 が出ないといけない」という 2-2 の回答が多く見られる。

確率を既習である第３学年で 2-1 や 2-2 の考えが多く出てくるのは、確率の意味に関する理解が不十分であると考えられる。むしろ「1/6 に近づかないとおかしい」という間違った確率の意味の捉え方によって「2 が出る」という考えが強くなっているとも言える。

Ⅳ．研究の結果

調査によって明らかになったように、多くの子どもたちが確率の意味について正しく理解できていなかった。この原因は、統計的確率と数学的確率の違いである「同様に確からしい」の意識付けによるものと、「実験回数を増やせば、計算で求めた確率の値に近づく」ということの不十分な理解からくるものであった。

これらを改善するには、確率には二つの定義があることをしっかりと理解させる必要があり、同様に確からしいとは何であるかを理解させることが必要であるのではないか。また、「試行の独立性」を気づかせられるような指導をすることで、確率の意味の理解はより深いものとなり、正しい解釈ができるようになると考えられる。

主要引用・参考文献

・統計・確率の仕組み　郡山彬　和泉沢正隆著　日本実業出版社　1997 年 8 月 10 日
・ベストを求める数学科授業研究　佐藤俊太郎・片平嘉正編　明治図書出版株式会 1992 年 8 月