卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究，第７号，2005】

問題解決における学習過程とその枠組みに関する研究

村田　和章

指導教官：矢部　敏昭

Ⅰ．研究の目的と方法

算数･数学における問題解決の学習はどのように行われるのか。問題解決の学習にはいくつかの段階を経て解決の手立てを発見･構成していくような過程があるとすれば、指導者はそれを確実に捉えた上で学習者に適切な指導を行う必要があるだろう。問題解決の学習過程にはどのような捉え方が提唱されてきたのか。諸氏の問題解決の過程を考察し、本研究おいて今一度問題解決の枠組みを検討していく。

生徒は問題を解決する中でどのような既習の事柄に着目し、どのように未習の事柄を求めるのだろうか。生徒が学習活動の中で自ら問題を捉え、自身の解答を吟味していけるような学習とはどのように行われるのか。また、その過程で生徒にもたされるものとは何か。本研究では問題解決の学習の際の、とりわけ学習者の視点に立ったときの課題となるものを指摘し、よりよいと考えられる問題解決の学習はいかに行われるものかを明らかにしていく。

Ⅱ．本論文の構成

（１ページ 40 字×40 行，79 ページ）

Ⅲ．研究の概要

第３章の１では、G.Polya 氏の示す問題解決過程の問いや注意に関するリストを実例と照らし合わせながら考察することにより、問題解決過程の各段階における学習者の側から見た課題を見出した。第４章ではその課題を、さらに多くの実例を通して考察していくこととする。

＝実例Ｂ＝

『平面上のある点の座標と直線の式が知れているとき、その間の距離を求めよ。』

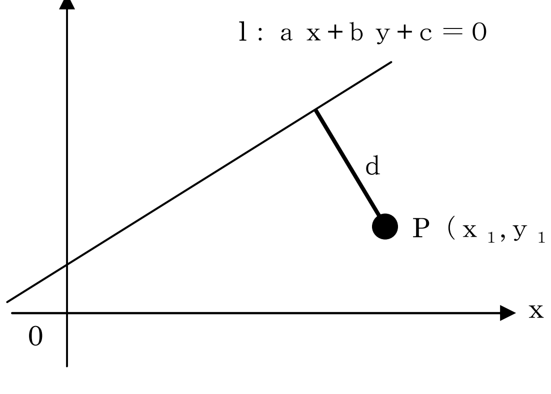

図１．実例Ｂ “問題の理解”の作図

本研究における問題解決の過程は、

- 問題の理解
- 解決の計画開発
- 計画の遂行
- 振り返り

以上の４つの段階で構成されている。

3.1　“問題の理解”における課題①

> “未知なもの”、“与えられているもの”、“条件”とはどのようなものか。またどのように判断するのか。

与えられているものは、実例Ｂでは点の座標と直線の式であった。与えられているものとは、例えば図形では線分の長さや角の大きさ、関数では直線や曲線の式や点の座標などの中で明らかにされているもの、事実として用いてよいもの指している。与えられているものとは、しばしばデータと呼ばれることもある。

未知なものは、実例Ｂでは点と直線の距離ｄであった。未知なものとは初めからは与えられていない値や形や位置などでわからないものであり、問題の最後で到達し明らかにされるべきものを指している。何を求めるかをはっきり知ることは、問題がどこに行き着くのかという目標を定めることになる。

条件は、実例Ｂでは「ｄは点Ｐと直線ｌとの距離である」ということだった。条件は未知数をデータと結びつけるものを指している。条件には、言葉で表されていたものだけでは十分な理解がされず、式に直すと複数の式が現れるような複雑なものもあるので、条件を部分に分離することが必要な場合がある。

問題を理解するに当たって、問題を全体としてその目的や要点を捉えた後に細かい部分に移るのであるが、問題を理解するには多くの場合、未知のもの、与えられたデータ、及び条件の３つの主な部分から始められる。すなわち**未知のものは何か、与えられているもの（データ）は何か、条件は何か**という３つの問いから出発することになるだろう。これらのことは言い換えると、問題を全体の中に個々を見、その目標や仕組みを捉えることといえよう。すなわちここでの課題は、問題の状況場面に基づいた数学的構造（仕組み）を概括的に捉えることといえる。

3.2　“解決の計画開発”における課題④

> 問題を違った形に言い換えるとは、どのように言い換えることなのか。

問題を変形させることにより、われわれは問題の新しい側面を開くことができ、問題との新しい接触をもたらし、問題にとって適当な関連ある要素を見つけ出す可能性が生まれる。

問題を違った形に言い換えるやり方には、「もとの問題を、一般化する・特殊化する・類推する」こと、「条件の一部を残し、他を捨てる」こと、「未知のもの若しくはデータ、あるいは必要ならば、その両方を変える」ことなどがある。

3.3　“解決の計画開発”における課題④－１

> もとの問題よりやさしくてもとの問題と似た問題を考える時、「もとの問題を、一般化する・特殊化する・類推する」とはどういうことか。

◎　特殊化

「ある事象の集合に関する考察から、それに含まれるそれより小さい集合、又はその中の１つの事象について考えることを特殊化という。」(G. Polya, 1954)

＝実例Ｂの特殊な問題＝

点の座標と直線の式に具体的な数値を与える。

『点Ｐ（３，２）と直線ｌ：２ｘ－ｙ＋１＝０との距離を求めよ。』

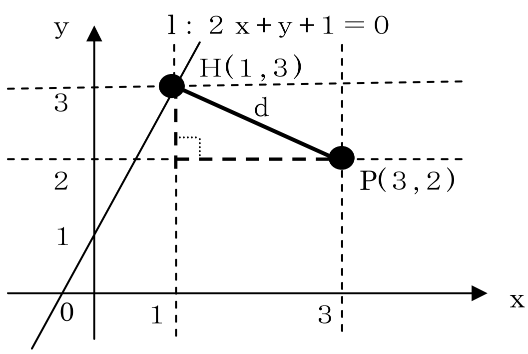

図２．実例Ｂ　特殊化の例

数値は簡単な整数値がよいだろう。点の座標と直線の傾きをあらかじめ考慮しておくことで、点Ｈの座標も整数値となりｄが求めやすいような問題を作ることができる。

この問題を解く中で、点Ｈの座標を見つけ出すことができれば２点間の距離の問題に帰着できることを発見し、元の問題に応用しようとするのである。

このように、より難しいより一般的な元の問題を解くための踏み石としてもっとやさしい特殊な補助問題を解くことによって、その結果や方法を元の問題に役立たせようとする。

すなわちここでは、特殊な事象を考察することからそれを含む一般的な集合の性質を見出すということをするのである。

3.4 “解決の計画開発”における課題④－２

問題の一部を解く時、「条件の一部を残し、他を捨てる」とは、どの条件を残してどの条件を捨てることなのか。

無いものを与えるよりもあるものを無くすことの方が比較的容易にできよう。このことは問題を違った形に言い換えるときに役に立つ。すなわち、**条件の一部を残し他を捨てる**のである。条件の一部を捨てることによって、未知のものが決まりうる範囲の制限がずっと緩まる。このとき、**どの程度まで未知のものが定まるか、どの範囲に変わりうるか**と尋ねることによって新しい問題を作ることができる。

実例Ｂの補助問題１は文章に置き換えると、「点Ｐ（x_1, y_1）から直線 l：$ax+by+c=0$ に下ろした垂線と直線 l との交点Ｈの座標（x_2, y_2）を求めよ。」といえる。

この補助問題１の条件は、「点Ｈ（x_2, y_2）は、点Ｐ（x_1, y_1）から直線 l：$ax+by+c=0$ に垂線を引き、できた直線と直線 l との交点である。」となる。よって、「点Ｈは直線 l 上の点であること」「点Ｈと点Ｐを結ぶ直線は直線 l と垂直に交わること」を考慮して条件は２つの部分に分離される。

・点Ｈは直線 l 上に存在する。

したがって、点Ｈの座標（x_2, y_2）は直線 l の式 $ax+by+c=0$ に代入することができる。よって、$ax_2+by_2+c=0$ …①が得られる。

・点Ｐと点Ｈをつなぐ直線は直線 l と直交する。

直線 l の傾き　$-\dfrac{a}{b}$

直線ＰＨの傾き　$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

直交条件より、$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\times\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1$　…②

が得られる。

以上２つを満たす範囲に存在することがわかる。それぞれの条件を満たすような点Ｈの軌跡をそれぞれ図にかき、２つの軌跡が交わる点に点Ｈが存在するのが分かる。

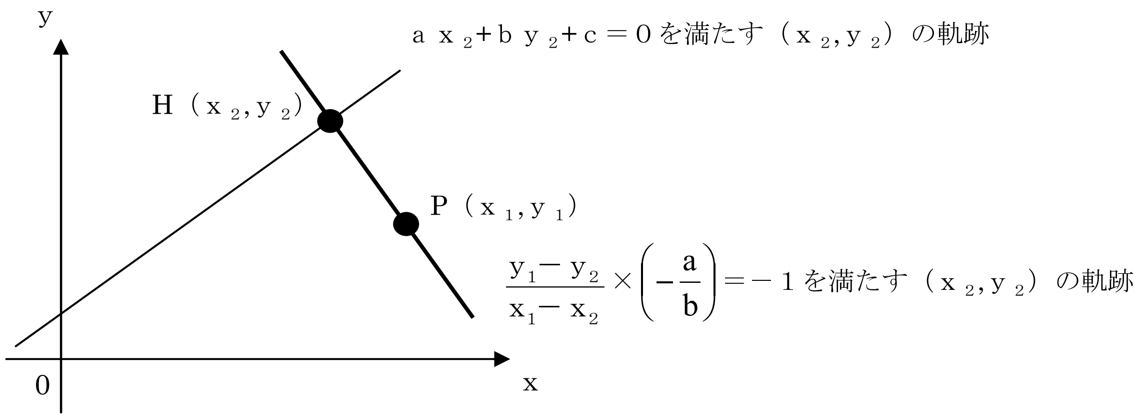

図３．直線ＰＨと直線 l は直交する

3.5 “振り返り”における課題③

結果や方法を利用することができる他の問題はどのように作られるか。

“解決の計画開発”の段階で触れたように、数学の問題を解くために必要な材料は適切な数学的知識や技能、また問題を解いた経験である。これまでの実例を解くために様々な材料を動員して役立たせたように、今解いたばかりの問題もまた他の問題を解くための材料として役立つものなのである。つまり、問題を解いてその結果や解法を知るだけではなく、結果や方法が利用できる他の問題を探る習慣をつけておく必要がある。言

い換えるとここでの課題は、結果や方法を利用することができる他の問題を作ることを通して問題間の関連を調べることと言えよう。

新しい問題を作るには、やはり問題を変形するための方法である一般化、特殊化、類推、適当な他のテータを与えることなどが役に立つ。

応用問題①：**三角形の高さ**

「３点Ａ(１，１)，Ｂ(３，５)，Ｃ(５，２)がある。△ＡＢＣについて、辺ＢＣを底辺としたときの高さを求めよ。」

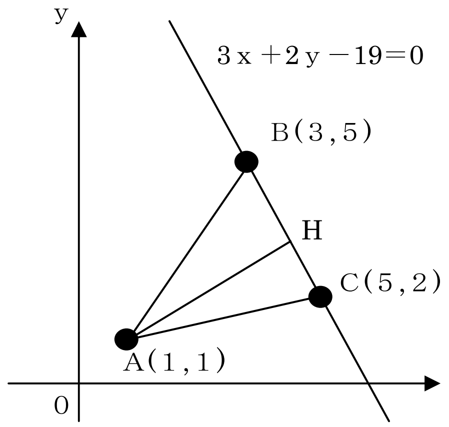

図４．三角形の高さ

- 三角形という概念を付加し、点は三角形の頂点、直線は三角形の一辺というような具体的な解釈を与えている。
- この問題の三角形は辺の長さも求めることができるので、この後さらに三角形の面積も求めることができる。

応用問題②：**放物線と直線との距離**

「放物線$y=x^2$……①と直線$y=x-1$……②がある。放物線①と直線②との距離の最小値を求めよ。」

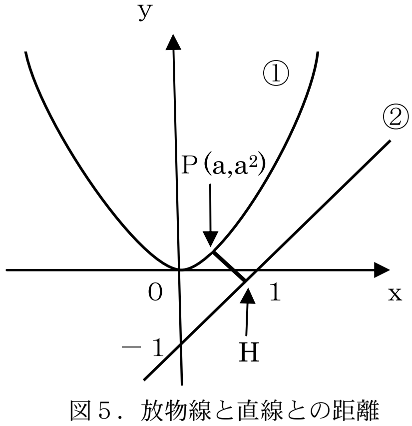

図５．放物線と直線との距離

- 放物線①上の点を$P(a, a^2)$とし、点Ｐと直線②との距離の最小値を考えればよい。

応用問題①には三角形の概念が付け加わっている。このような概念は取り外しがしやすいので、取り払ってしまえば元の問題に戻るのである。

応用問題②は放物線と直線との距離の問題である。点と直線との距離の問題を応用すれば、曲線と直線との距離や図形と直線との距離を求める問題が解けることが分かる。

自分で作った問題を解いたことのない生徒には、教師は解けた問題から新しい問題をどのように作るのかを示す必要がある。そのとき教師は、生徒自身が解いてみたいと感じられる部分を発見できるような余地を残しておくとよいだろう。応用問題②で教師が、「二次関数上のどの点と直線との距離を調べてみたいですか。」と尋ねたら生徒は、「二次関数の頂点と直線との距離です。」と答えたり、「直線との距離が最短となるような二次関数上の点との距離です。」と答えたりすることができる。

Ⅳ．研究の結果

本研究で見出し検討していった「学習者の側から見た課題」とは、問題を解決する主体者の視点で見るとそれは学習者自身の課題である。しかし問題解決の支援を施す者の視点から見ると、「学習者の側から見た課題」を理解することが支援をする上での課題だといえる。教師は生徒に支援を行う上でこの「学習者の側から見た課題」を捉えている必要がある。

今後は、問題解決における「学習者の側から見た課題」を捉えた上での教師の指導についての研究を深めていく。また、本研究ではG.Polya氏の示す問題解決過程を主として算数・数学における問題解決の枠組みを考察する上でのよりどころにしてきたが、他の諸氏の示す問題解決過程についても詳しく検討していきたい。

主要引用・参考文献

・R.チャールズ／F.レスター［中島健三　訳］(1983)．算数の問題解決の指導．金子書房．
・G.ポリア［柿内賢信　訳］(1954)．いかにして問題をとくか．丸善株式会社．
・片桐重雄（1988)．数学的な考え方・態度とその指導２　問題解決過程と発問分析．明治図書．

資料１　『問題解決の各過程における学習者の側から見た課題』

本研究では問題解決の過程を４つの段階に区分し、教師は指導を行う上で『問題解決の各過程における学習者の側から見た課題』を捉えている必要があることを指摘した。それら課題を以下のように示しておく。

“問題の理解”における“学習者の側から見た課題”

【課題①】“未知なもの”、“与えられているもの”、“条件”とはどのようなものか。またどのように判断するのか。言い換えれば、ここでの課題は問題の状況場面に基づいた数学的構造（仕組み）を概括的に捉えることといえる。

【課題②】“問題を理解すること”の段階の作図はどのようなものか。どの程度問題が理解されるのか。言い換えれば、問題を理解するとは既知の数学的事柄と未知に数学的事柄の違いを意味することといえる。つまり、問題を理解することとは、問題を通して多くの既知の事柄を洗い出し、その理解の上に立って未知の事柄を捉えることであるといえる。

【課題③】与えられた条件を満足しているかをどのように判断するのか。

“解決の計画開発”における“学習者の側から見た課題”

【課題①】関連した問題とはどのような問題か。

【課題②】未知数が同じかまたは似た問題とはどのような問題か。

【課題③】既に解かれた似寄りの問題を見つけたがそれを直ちに利用できない場合、それ利用できるような状態を作り出す必要がある。それはどのような方法があるのだろうか。適切な補助問題はどうやって作れるのか。どこに補助線を引くのか。

【課題④】問題を違った形に言い換えるとは、どのように言い換えることなのか。

《課題④－１》もとの問題よりやさしくてもとの問題と似た問題を考える時、「もとの問題を、一般化する・特殊化する・類推する」とはどういうことか。

《課題④－２》問題の一部を解く時、「条件の一部を残し、他を捨てる」とは、どの条件を残してどの条件を捨てることなのか。

《課題④－３》未知のものを定めるのに適当な他のデータを考える時、「未知のもの若しくはデータ、あるいは必要ならば、その両方を変える」とはどう変えることなのか。どのように変えたらよいのか。

【課題⑤】問題を解く計画を立てるのに用いた手続きは、どのようにふり返るのか。

“計画の遂行”における“学習者の側から見た課題”

【課題①】一歩一歩各段階を検討し確かめながら進むとは、どのような検討がされるのか。

【課題②】計画の立て直し方はどうか。どこから立て直せばよいのか。

【課題③】各段階が正しいことを理解するために、直観的に理解していればよい場合と証明を必要とする場合にはどのようなものがあるか。

“振り返り”における“学習者の側から見た課題”

【課題①】結果や議論が正しいことをどのように試せばよいか。

【課題②】同じ結果を違った仕方で導くとは、どのような仕方があるのか。

【課題③】結果や方法を利用することができる他の問題はどのように作られるか。

資料２　諸氏の問題解決の過程

「第３章　問題解決の学習過程の検討」では、８諸氏の問題解決の過程を検討した。本研究ではすべての諸氏の問題解決の過程について十分な考察が行えたわけではない。それらを本研究から得た問題解決の過程と照らし合わせながら考察を深めることが今後の課題となる。８諸氏の問題解決の過程を以下の表に示す。その区分はまだ大まかなものである。各段階の名前は片桐重雄氏の著書のものを参考にした。

表６．諸氏の問題解決の過程

<table>
<tr><th>人物
段階</th><th>G.Polya</th><th>J.Dewey</th><th>G.Wallas</th><th>F.Fehr</th><th>A.H.Schoenfeld</th><th>F.K.Lester Jr.</th><th>Leone Burton</th><th>杉原一昭</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1
問題形成・把握の段階</td><td rowspan="2">1
問題を理解すること</td><td>1
暗示</td><td rowspan="4">(a)
準備期

(b)
孵卵期

(c)
解明期</td><td>Ⅰ
混乱、必要感、目的探求行動</td><td rowspan="2">1
分析</td><td rowspan="2">1
方向付け</td><td rowspan="2">1
Entry</td><td rowspan="2">①
問題理解の段階</td></tr>
<tr><td>2
知性的整理</td><td>Ⅱ
分析、
問題形成</td></tr>
<tr><td>2
解決の見通しを立てる段階</td><td>2
計画を立てること</td><td>3
仮説</td><td rowspan="2">Ⅲ
暫定的仮設、検討</td><td>2
計画
3
探求</td><td>2
組織化</td><td rowspan="2">2
Attack</td><td rowspan="2">②
解決の見通しと実行の段階</td></tr>
<tr><td>3
解決の実行の段階</td><td>3
計画を実行すること</td><td>4
推理作用</td><td>4
実行</td><td>3
実行</td></tr>
<tr><td>4
解の論理的組織化の段階</td><td rowspan="2">4
ふり返ってみること</td><td rowspan="2">5
検証</td><td rowspan="2">(d)
検証期</td><td>Ⅳ
演繹、
精確化の段階</td><td rowspan="2">5
検証</td><td rowspan="2">4
検証</td><td>3
Review</td><td>③論理的組織化の段階</td></tr>
<tr><td>5
検証の段階</td><td>Ⅴ
検証段階</td><td>4
Extension</td><td></td></tr>
</table>