卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究，第７号，2005】

生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導の実現のための課題と解決

田中　慎一
指導教官：溝口　達也

Ⅰ．　研究の目的と方法

中学校での教育実習や授業観察において「課題の解決に適した図を描くことができない」「図形のどこに着目して証明を進めればよいのかわからない」といった生徒の現状を目の当たりにし，このような困難を生徒が自ら克服できる力を養いたいと考えた。しかし、そのためにはどのような観点を持って学習指導を行うことが必要なのかという疑問が生じた。この疑問に対し，前田隆一氏の著書「算数教育論　―図形指導を中心として―」からその解決への示唆を得た。

前田氏は「算数における創造的思考」と「算数教育の現代化」について，「教材」「帰納」「学習の構造」「発見的思考」といった観点から意見を述べている。その中で，今までの教材研究に問題があり，教師は教材を研究する立場として数学を既成の知識体系と捉え他の学問の道具として数学をみるという「数学を外から眺める」立場に立つのではなく，数学を創造的・生成的なものとして見る，「数学を内から眺める」立場に立たなくてはならないと述べられている。前田氏は算数・数学の学習において「発見」に価値を置き，そして，教材を見直し授業・指導法を発見的な思考を育成するものに変えるために，その考えの中心となる「帰納」の考えから見直さなくてはならないと主張されている。

これらの前田氏の意見を参考にし，「発見」という観点を持つ学習指導が先に述べた疑問の解決に有効ではないかと考え，「生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導」を通して生徒に自ら図形の性質を推測し，それを検証できる力を育成したいと考えた。自ら図形の性質を推測する力を育成することで，「図形のどこに着目すればよいのか分からない」といった困難を解決することができ，その推測を検証する活動を通して「証明」を行う力を養うことができるのではないかと考えたからである。

そこで，生徒に自ら図形の性質を推測し，検証する力を育成するために，生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導を現行の幾何指導に導入するにあたり，どのような問題点があるのかを明らかにし，その解決を明らかにすることを本研究の目的とする。この目的を達成するために以下の課題を設定する。

課題１　なぜ生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何が必要とされるのか

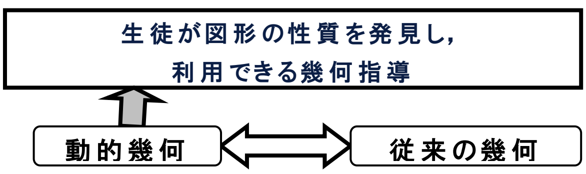
課題２　生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何としての具体的な活動とはどのようなものか

課題３　生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何にはどのような環境が必要とされるのか

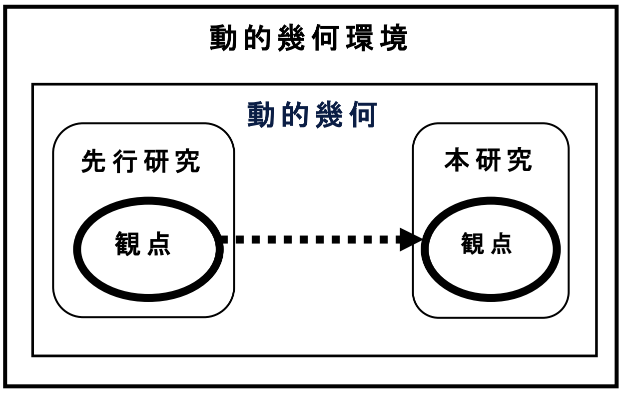
課題１は生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導を実現しようとするにあたりどのような条件が必要とされ，また，このような幾何指導を行うことで現行の学習指導をどのように改善することが可能であるのか，ということを明らかにすることを目的とする。これには，前田隆一氏の意見を参考に生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導を行うことに必要とされる条件を明らかにし，次に，生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導を行うという観点で現行の幾何指導を見た際，どのような問題点があり，それをどのように解決できるのか明らかにする。

課題２は，生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何に必要とされる条件を満たすには具体的にどのような活動を行うのか，ということを明らかにするために設定した。

この課題の解決に当たり，後述の通り先行研究から動的幾何がその解決に有効であると言う示唆を得た。そこで，動的幾何と静的幾何を用いた事例の考察を行うことで，動的幾何がどのように生徒が図形の性質を発見し利用できる幾何に適合しているかを明確にする。



また，同じく先行研究から動的幾何を有効に機能させるためにはその環境も考慮しなくてはならないという示唆を得た。よって、課題3を本研究の目的である，生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導の実現にはどのような環境を構築するべきか明らかにするために設定した。この課題には，先行研究における動的幾何環境を構築する際の観点を明らかにし，本研究の目的である生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導の実現にはどのような環境が構築されるべきかを考察することで解決を試みる。



II.　本論文の構成

（1ページ35字×35行，88ページ）

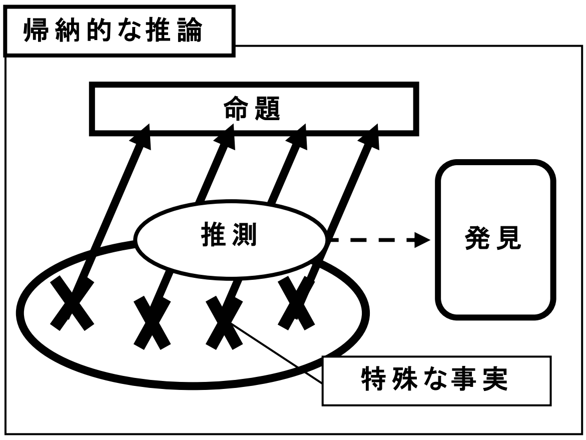
III.　研究の概要

3.1　帰納的な推論の必要性に対する考察

生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導を通して生徒が自ら図形の性質を推測し，検証する力を養いたい。では，生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何を行うにはどのような条件が必要なのか。前節に引き続き，先行研究である前田氏の意見を参考に生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導を行うにあたり，必要とされる条件を明らかにする。

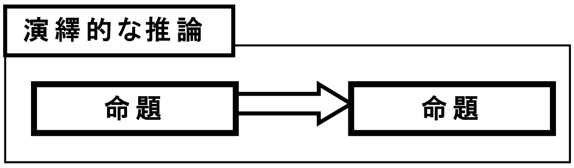
生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導の目的は生徒に自ら図形の性質を推測し，検証する力を養うことである。そのためには，生徒が図形の性質を推測する活動，推測を検証する活動の2点が必要であると言える。推測については，図形の性質を発見することを目的とした推測であることが必要条件となる。

では，どのように図形の性質を推測することを期待するのか。これは，具体的な図形についてその特徴を調べることにより，その図形についての一般的な性質を推測する活動，例えばひし形を平行四辺形の特殊な場合と見たり，正方形が一般化された場合と見たりすることでひし形の性質を推測する活動を通して図形の性質を推測することを期待する。つまり，生徒が帰納的に図形の性質を推測することを期待する。



前田氏によれば，帰納的な推論はその具体的な事実の忠実な記載に価値があるのではなく，それが

事実を越え，事実を理想化することで既知の事実以上の範囲に適用できる力を付与される。しかし，帰納的な推論では，推測した性質を推測する際に用いた範囲外の特殊な事実でも成り立つことを保障できない。そこで，推測した性質が特殊な事実に依存することなく普遍に成り立つかどうかを検証する活動が必要となり，演繹的な推論の必要性が生じると考えられる。演繹的な推論では，前提となる命題が正しい限り，そこから導かれる命題は正しいことが言える。



この，帰納的な推論を有する活動という観点で現行の幾何指導を見ると，現在，中学校数学科図形領域において，三角形の内角の和が 180°であることを証明するために，平行線の性質を用いて証明をするという活動が行われている。例えば，K 社の教科書では「三角形の角」という単元において，「三角形の 3 つの角の和が 180°であることを平行線と角の性質を使って，確かめてみよう」と記述され，次に三角形の各頂点をちぎって一つの頂点に集めた図が示され，「直線 BA と CP の位置関係はどうなるでしょう」（直線 BA と CP は平行になっている）と問が提示されており，平行線の性質から三角形の内角の和が 180°であることが示されている。

このように平行線と角の性質から三角形の内角の和を導くという，演繹的な推論を行うことにより論理的な思考を養うことが目標として挙げられていると考えられる。これは平成 10 年度版中学校学習指導要領解説―数学編―において，第 1 章　総説　2　中学校数学科改訂の要旨　イ　改善の具体的事項　（イ）『「図形」の領域では，自ら課題を見出し，解決するために，根拠を明らかにし，筋道を立てて説明する表現力や論理的な思考力の育成を重視して，図形の証明に関する内容に重点をおく。』という記述，第 2 章　目標および内容　2　各領域の内容の概観　②　論理的な思考力の育成について，『中学校数学の大きな特徴は，「図形」領域において演繹的な推論の方法を活用することにある。それは，図形に関する内容が，演繹的な推論を行うのに適した素材であり，また，豊富な問題を提供し得ること，その推論の過程が視覚に訴える図形によって裏づけされることによる。』という記述からも言える。

問題は，演繹的な推論を行うことにより論理的な思考を養うにあたり，生徒にはなぜ演繹的に性質を述べなくてはならないのか，という演繹的な推論を行うことの必要性が感じられていないことである。上の例において，生徒はどのようにして演繹な推論の必要性を感じるのか。なぜちぎって合わせる説明ではいけないのか，なぜ平行線と角の関係を用いて確かめなくてはならないのか，といったことに対して，上記のような指導では生徒が問題意識を持てないと考えられる。

生徒が問題意識を持つためには，ちぎって合わせる説明では不都合が生じる場面に立たせなくてはならない。ちぎって合わせる説明で説明がつくならば，平行線と角の性質を用いる必要性はない。ちぎって合わせる，つまり特殊な事例に依存する説明ではその性質が普遍に成り立つことを示すことはできないことを考えさせるために，初めから演繹的な推論を促すのではなく，生徒に帰納的な推論を行わせることが必要である。

帰納的な推論によって推測された性質はある範囲内において一般的であることや正しいことを保障できるが，調べた範囲外でもその性質が成り立つこと，つまり普遍に成り立つことを保障することはできない。この観点を持つことで，ちぎって合わせる説明では調べた範囲外でも成り立つことを保障することはできないということが考えられ，普遍に成り立つことを保障しようとすれば帰納的ではない考えが必要になることが想起されると考えられる。

よって，演繹的な推論，つまり平行線と角の関係を用いることで具体的な三角形に依存せず，全ての三角形の内角の和は 2 直角に等しいことを説明することの必要性が生じ，それは証明の必要性を生徒に生じさせることにも繋がり，現在の図形指導の問題点を改善できると考える。

帰納的な推論を行うことができておらず，そのため性質を検証するという演繹的な推論の必要性が生徒に感じられていないことがいえる。

この問題点に対し，生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導を行うことで，帰納的な推論を行い，これにより演繹的な推論の必要性を生じさせることによって改善できると考えられる。

以上のことから，帰納的な推論を有する活動を行わせることができるという点で，生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導が現行の問題点を改善するために必要であるという課題 1 に対する結論を得た。

3.2　動的幾何を用いた活動についての考察

課題 1 を解決する中で生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導には帰納的な推論を有する活動が必要であることが明らかとなった。この帰納的な推論を有する活動には動的な幾何がその具体的な活動に適すると前田氏の先行研究では述べられている。

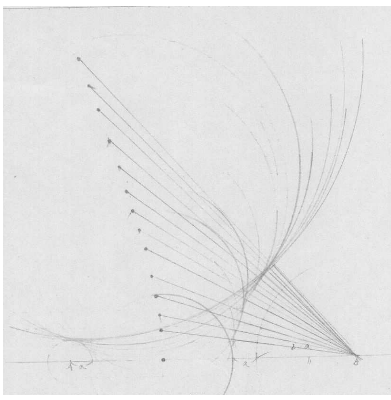
前田氏の述べられている動的な幾何とは，折り紙や竹ひごなどの教具を用いて図形を自由に移動･変形する中で図形の性質を発見することをねらいとしたものである。では、動的な幾何がどのように帰納的な推論を有する活動を行うことに適するのか，同じ問いを従来の紙と鉛筆を用いた幾何と動的な幾何のそれぞれで解決した過程を分析・考察することにより明らかにする。

考察に用いた問いは次のとおりである。

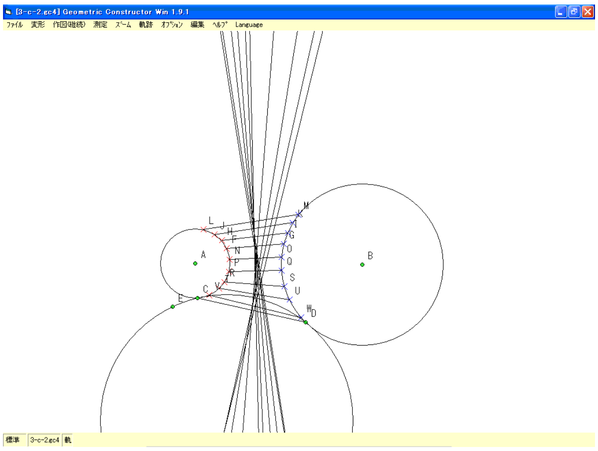
問：与えられた 3 つの円に接する円を描け

解決者は大学生で，動的な幾何，従来の幾何それぞれに 1 名ずつである。ここで，前田氏が主張されていた動的な幾何は現在，コンピュータを用いた幾何で実現されると捉え，動的な幾何を利用する解決者はコンピュータを用いて課題の解決を行った。解決過程の分析から，従来の幾何を用いた解決者，コンピュータを用いた解決者は共に課題を特殊化しその中で普遍な性質を見つけ，それを一般化することで解決を行おうと試みていることが考えられた。そして，考察の結果従来の幾何とコンピュータを用いた幾何の両方で帰納的な推論が行われていると考えられた。しかし，解決の中で性質を推測する際に多数の事例を必要とする場面において，従来の幾何では困難な場合があることが考えられた。

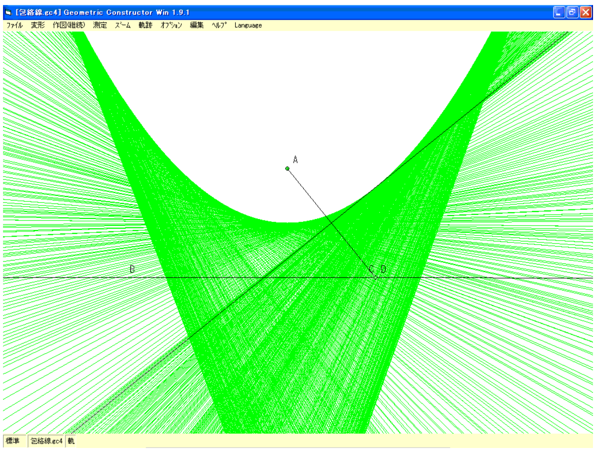
例えば，従来の幾何を用いた解決者は，与えられた 3 つの円に接するという条件のままでは解決が困難であると考え，与えられた 2 つの円に接する円の中心の軌跡に着目したと考えられる。このとき，2 つの円に接する円の中心の軌跡の性質を求めようとして描いた図が次の図である。



しかし，解決者はこの図から 2 つの円に接する円の中心の軌跡の持つ性質を明らかにすることができていないと考えられる。これに対しコンピュータを用いた解決者は，2 つの円に接する円の中心の軌跡を，与えられた 2 つの円と，それに接する円の接点を結んだ線分の垂直二等分線を様々にとることで下の図のように示した。



上の図で示された，ある線分の一方を固定し他方を直線に沿って動かしたとき，線分の垂直二等分線が描く軌跡をより限定して示したものが下の図である。ある線分の垂直二等分線の軌跡は包絡線を描き，これは放物線となっている。課題の解決にあたり，動的な幾何を用いた解決者は下の図で明らかにされた性質を用いている。



上に示したように，コンピュータを用いた幾何は多数の事例を用いて推測を行う場面にも対応でき，帰納的な推論を有する活動を必要とする生徒が図形の性質を発見し利用できる幾何に適していると言える。また，考察で用いたようなコンピュータを用いて図形を自由に移動･変形させる幾何を本研究では動的幾何と定義する。これに対し，従来の紙と鉛筆を用いて図形の性質を探る幾何を，図形が動くという観点で見ると課題の解決に用いた図は動かすことができないので，静的幾

何と定義する。

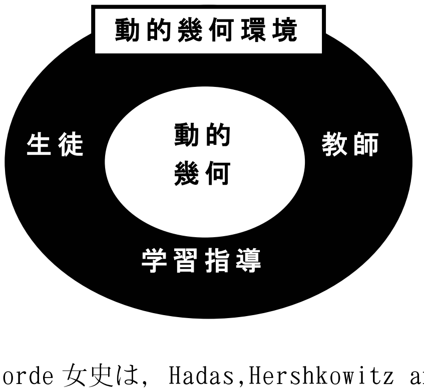
以上，事例の考察から生徒が図形の性質を発見し利用できる幾何指導に対し，性質を推測するにあたり多数の事例を必要とする場合にも帰納的な推論を行いやすいという点で動的幾何が適している，という課題２に対する結論を得た。

3.3　動的幾何環境についての考察

課題２を解決する中で，生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導に動的幾何を利用することが適していることが明らかとなった。しかし，動的幾何が演繹的な推論を導くのではないことから，帰納的な推論から演繹的な推論へと生徒の思考が変化する場を設定することが必要であると考えられる。

これは，Laborde(2000)の先行研究の中で「動的幾何システムそれ自身は十分に組織化された“環境”無しに証明の必要性を刺激することはないだろう」と，動的幾何を含むその周りにある「動的幾何環境」を整備することの必要性が明らかにされている。

本研究では，「生徒，教師，学習指導」を「動的幾何環境」と捉え Laborde(2000)，辻(2002)らの先行研究における動的幾何環境についての考察を行った。



Laborde 女史は，Hadas,Hershkowitz and Schwarz(2000)らの動的幾何を用いた実験による結果から，動的幾何環境構築の観点を述べられている。

Hadas らの行った実験は以下のとおりである。

『課題Ａ：　多角形の辺の数が増えていくときの内角の和を(動的幾何ソフトを用いて)測定しなさい。

あなたの結論を一般化して，説明しなさい。

課題Ｂ：　四辺形の外角の和を（動的幾何ソフトを用いて）測定しなさい。

多角形の辺の数が増えていくときの外角の和についての仮説を立てなさい。

あなたが見つけたことと測定したことを用いて，あなたの仮説が正しいか確かめなさい。』

Hadas らによれば，課題Ａによって，生徒たちは課題 Ｂ における多角形の外角の和は辺の数によって増えるという仮説を立て，その仮説は課題 Ａ の結果から正しいことを後押しされることになる，と予測が立てられている。この予測は正しかったことが次の課題Ｂの結果から言える。

『課題Ｂについては 49 組の回答が集められた。

37 組は外角の和は辺の数によって増えると仮説を立てた。10 組は外角の和は固定されていると仮説を立てた。このクラスの教師によると，生徒は以前の学習で外角の性質を知っていた。2 組は仮説を立てることができなかった。

課題 Ａ は多くの生徒に外角の和は増加するという仮説を発生させた。』

この中で述べられているように，生徒が考えた課題Ｂにおける仮説は，外角の和は辺の数が増えると増加するというものであり，これは正当でなく根拠がない。しかし，課題Ａの結果によって生徒は課題 Ｂ における仮説が正しいと考えてしまっている。

このことから，動的幾何を用いることは事実から帰納的に推測を構成するという活動に適している反面，変形・移動できる範囲内で推測が成り立つことにより，構成した推測が普遍に成り立つものであるかのような印象を与えてしまう可能性も考えられる。

また，辻女史は『動的幾何の利用によって生じる知識は，個人的な性質を持つものであるため，他者との議論を起こす機会を教師は設定する必要性がある。』と述べられている。つまり，生徒が個々に作り上げた推測に対し，教師が他の生徒との議論の場を設定することにより各々の推測を振り返らせることで，推測した事柄が常に成り立つかという点に着目し，常に成り立つことを示すためにはどうすればよいか考えさせる契機を与えることが必要であると考えられる。

以上の先行研究の考察から動的幾何環境の構築における観点として，生徒に自らの推測を振り返らせる場としての「生徒同士の討議」の設定という観点を得た。この観点を基に生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導に必要とされる環境について，その構築に対する観点として以下の２点を述べる。

第１の観点は，生徒に自らの推測を反省的に見ることを目的とするという観点である。

ここでは，生徒同士の討議の場がその具体的な

活動に当たる。生徒同士にお互いの推測を討議させる中で，自らの作り出した推測はデータに依存するものであり，普遍性を持たないことに気付かせることを目的とする。そのためには，討議において，生徒が帰納的に作り上げた推測はそれを作り上げる際に用いたデータ以外のときでも適用できるのか，ということを検討させなくてはならない。この，自らの作り上げた推測が他の場合にも適用できるのか，ということを考えさせることによって，討議において自らの推測を反省的に見ることで，生徒の思考が推測に普遍性を持たせる，つまり演繹的になる契機を与えることを期待する。

第２の観点は，生徒に決定的な例を用いて事例を説明することにより，普遍的な説明を行わせることを目的とする観点である。

討議によって反省的に自らの推測を見させることにより，普遍性を持たせることに意識を向けることが第１の環境の目的であった。この討議により帰納的な推論から普遍性を持つ演繹的な推論へと生徒の思考が変化することを期待するが全ての生徒がこの契機を与えることにより演繹的になるとは限らない。

そこで，生徒が決定的な例を用いて，推測の持つ普遍性を説明することを目的とした第 2 の環境の構築を考える。この環境では，データのなかでの決定的な例を用いて推測を説明し，その説明の中で生徒に具体的なデータを扱いながらも操作は普遍的となっていることを期待する。言い換えれば，特殊(１つ１つのデータ)の中に個数に依存することのない普遍な操作を見ることを期待する。

この活動を経ることにより，生徒に帰納的な推論からより演繹的な推論へと思考が変わることを促し，特殊の中の普遍的な操作を考えさせることで，次に，演繹的な推論を行うことが容易になると考える。

これら 2 つの観点を基に動的幾何環境を整備することで，生徒に帰納的な推論から演繹的な推論へと思考が変化するよう促す場を提供できるという，第３の課題である「生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何にはどのような環境が必要とされるのか」についての結論を得た。

IV.　研究の結果

以上，生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導には帰納的な推論が必要とされ，その活動には動的幾何が適していることを明らかにし，その利用には動的幾何環境を考慮に入れることが考えられ，その観点を２点明らかにした。

本研究では動的幾何環境について，その構築に対する観点として２点を明らかにした。しかし，本研究に必要な動的幾何環境の観点としてこの 2 点で十分かどうかはさらに検討する必要があると考える。

さらに，動的幾何を用いた事例においては，環境を考慮せず問いの解決を行っている。今後，動的幾何環境を整備した中で動的幾何を用いることにより，本研究の目的とする「生徒が図形の性質を発見し，利用できる幾何指導」が実現され得るかどうか，議論する必要があると考える。

主要引用・参考文献

前田隆一(1979)．算数教育論―図形指導を中心として―．金子書房．

辻宏子・清水克彦(1999)．数学の教授学習におけるコンピュータ利用の捉え方についての一考察　―相対的システム“milieu”の概念の導入―，第 32 回数学教育論文発表会論文集．

辻宏子(2002)．数学教育における教材・教具としてのコンピュータの機能に関する一考察―Cabri-Geometry における『点の自由度』を事例として―，筑波数学教育研究　第 21 号．

Colette Laborde(2000)．Dynamic Geometry environment as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving, *Educational Studies in Mathematics*, 44, (pp. 151-161)．

Nurit Hadas,Rina Hershkowitz and Baruch B.Schwarz (2000)．The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments, *Educational Studies in Mathematics*, 44,（pp. 127-150)．

平成 10 年度版中学校学習指導要領　解説―数学編―