卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究，第７号，2005】

問題解決過程における教師の支援に関する研究

山田　章広
指導教官：溝口達也

Ⅰ.研究の目的と方法

算数・数学科の学習指導では，ほとんど毎日の時間において，ある問題が提示され，それを解決するという活動が営まれている。言い換えると，問題の解決を通して学習のねらいが達成されるように意図されている。一時間の授業において，問題解決は①問題提示，②児童・生徒の自力解決，③練り上げ，という流れで進行していることが多い。その中で，②児童・生徒の自力解決の最中に，教師による「支援」が行われている。

教師は児童・生徒に経験的，あるいは，感覚的に支援を施していることが少なくない。その結果，果たして児童・生徒（以下，子どもたち）の問題解決能力を育成することが出来るのであろうか。

結果的に，子どもたちは問題解決能力を身に付けることができるかもしれない。だが，そこには確実に身に付くという保証はどこにもない。

そこで，本研究では，「支援」についての理論的枠組みをつくることにより，教師の支援能力の向上を目指し，子どもたちの問題解決能力の育成に貢献したいと考えるのである。

そこで本研究では，問題解決過程において，教師が行う支援がどのようなものであるべきなのか，ということを探ることを目的とする。その為に，次の課題を設定する。

課題：問題解決過程における教師の支援にはどのような性質が必要か？

この課題に答える方法として，ペアの大学生が問題を解く過程のプロトコールをとる。それを，有効に機能した支援にはどのような性質があるのか，また，このような性質があれば有効に機能したであろう，という観点で分析し，支援の理論的枠組みを構築する。

また，その理論的枠組みを基に，問題解決学習指導の具体例を提示し，実際に中学三年生の生徒が問題を解く過程をプロトコールに起こし，検証する。

プロトコール分析においては，被験者に対し，課題に取り組む間に考えていることの「全て」を言語化することが課せられる。そこで，より正確な言語データを得るために，大学生を対象にする。これは小・中学生を対象にするより，被験者自身が考えていることを正確に言語化できるからである。

また，得られた成果は「教室」という空間で適用できなければ意味がない。教室では教師１人に対して子どもたちは20～40人もいるが，問題解決過程で教師が支援を施すのは１対１の場面が複数回あるものだと考える。よって，プロトコール分析も１対１で行われることが望ましい。だが，被験者が１人の場合，いくつかの不自然さが生じる。

第一に，観察者が介在し，ビデオテープ等に記録されるということは，被験者に対して心理的な「重圧」を与えるであろう，という点である。

第二に，問題に取り組みながら１人で言語化し続けるということ自体も不自然である，という点である。本来ならば，問題を解く際には黙ったまま思考を進めるのに対し，声に出しながら考えることを強いられるのである。

上述の不自然さを解消する為に，被験者が２人という状況を設定する。２人の被験者が会話を行いながら問題解決を進めるという場面を考えると，「単独」の場合に比べ，仲間と共に問題に取り組むという安心感が「重圧」を緩和するであろうし，発話が自然と行われるので「声を出すこと」の不自然さも少ないであろう。

被験者が３人以上のグループでは，被験者同士の議論が続くので，観察者という「権威」が取り除かれる。だが，３人以上で課題に取り組む場合，ある者の考えは取り上げられたり無視されたりすることがある。また，ある者は黙ってしまい，その人の思考過程については多くは知ることはできない。

よって，「権威」の解消という点では，被験者は3人以上の方が優れているが，個人の思考過程を分析するという目的から，被験者は2人の方が優れている。したがって，本研究の方法として被験者を2人としたプロトコール分析を選択する。

Ⅱ.本論文の構成

（1ページ33字×25行，66ページ）

Ⅲ.研究の概要

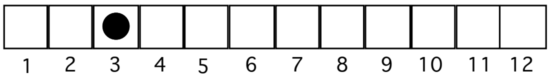
3.1 支援の定義

本研究では，まず「支援」を次のように分類し，定義する。

教化的な支援：その問題でのみ有効に機能するであろう教師の問い方で，他の問題にも有効に機能する問題解決能力が身に付く保証がないもの。

教育的な支援：その問い方によって，他の問題にも有効に機能するような問題解決能力が身に付くことが期待できるもの。

具体例として，次のような場面を考える。



ある数だけ場所を移動する数の道（いわるゆすごろく）という遊びで，子どもはしばしば移動する場所の数に出発点を含ませるという間違いをおかす。例えば，3の場所にいる子どもがサイコロで4を出したとすると，3，4，5，6と指しながら6の上で止まることがある。この場面で教師は次のように言う。

A：「出発点は数に入れるべきではない」

B：「もしサイコロが1の目を出したらどうなるの？」

Aの結果，子どもの間違ったやり方は改まるかもしれない。しかし，この場面以外で正しいやり方ができる保証はない。

Bの場合，この問い方は効果的であり，どの子どもも出発点から一つ移動することが期待できる。また，違う場面において（例えば，サイコロの目が2だったらどうするの？）でも正しいやり方ができることが期待できる。

これは，*G.Polya*（1954）の言葉を借りるなら，「もし与えられた問題がとけなかったならば，何かこれと関連した問題をとこうとせよ。もっと特殊な問題は？」にあてはまるであろう。このような問い方は他の問題でも有効に機能する場合が多々

ある。

本研究においては，A のような問い方を「教化的な支援」，B のような問い方を「教育的な支援」と捉え，B の方を研究対象としていく。また，今後「教育的な支援」を単に「支援」と記す。

3.2 支援に関する理論的枠組みの構築

本研究では，下記の調査問題を用いた。

底辺 BC が $6cm$，高さが $4cm$，底辺に向かい合う角が $30°$ の三角形 ABC を作図して下さい。

大学生がこの問題を解く過程をプロトコールに起こし，有効に機能した支援はなぜ有効に機能したのか，また，有効に機能しなかった支援はなぜ有効に機能しなかったのか，それが有効に機能するためにはどうすればよいか，という観点を基に分析した。

3.2.1 場面 1

013 佑一：一般の三角形を描く作図。（図 3）

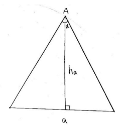


図3

014 佑一：違いますよね？
015 山田：できた？じゃあさ，α は 15°で，a が 6 で，h_a が 4.8 の三角形をその方法で描いてみて。（具体的な問題）
016 達男：a が 6…。
017 達男：$6cm$ の線分（a）を作図。
＜少し間＞
018 佑一：a を底辺とした一般の三角形を描く作図。
019 佑一：できた三角形の高さを測定しようとする。
020 佑一：違うな…。
021 佑一：018，019 を繰り返す。
022 達男：適当にやってる？
023 佑一：高さが 4.8 になるように…。
024 達男：あーなるほど。…でも 4.8 になっても 15°なるかな？
025 佑一：あーそっか。
＜間＞
026 佑一：三角形ってやっぱ三角形ですか？例えば，二等辺三角形とかは…。
027 山田：結果そうなるならいいんじゃない？
028 佑一：だったら…。
029 佑一：角度を先にとろうとする。
030 佑一：あーでも…。
（中略）
033 達男：$h_a = 4.8$ の軌跡を作図。
034 達男：これ上にあるんだよな？
035 佑一：$\alpha = 15°$ になる点を探す。
036 達男：適当だなー…もっと鋭くしたらどう？
037 佑一：035 を繰り返す。
038 達男：きたんじゃない？おっ，できた！
039 山田：なるほど…じゃあ…角度を 7° にして，高さを 2，a は 6 のままでやってみて。

支援 015 を与えた後，解決者は試行錯誤をし（016～023），間違いに気付き（024～025）（後に確認），新たな解決（029，031，033）に向かうことができた。これは支援 015 によって解決者自身が解決の不十分さに気付いたので，次の活動に移行したのではないか，と考えることができる。

実際，支援 039 を与えたとき，これは有効に機能しなかった。これは，033 から 038 の過程での解決に自信があったので（後に確認），自分たちの解決が不十分であることに気付かなかったからであると考えられる。

よって，支援には，**その解決は不十分であることに解決者自身に気付かせること**が必要であろう。

3.2.2 場面 2

033 達男：$h_a = 4.8$ の軌跡を作図。
034 達男：これ上にあるんだよな？
035 佑一：$\alpha = 15°$ になる点を探す。
036 達男：適当だなー…もっと鋭くしたらどう？
037 佑一：035 を繰り返す。
038 達男：きたんじゃない？おっ，できた！
039 山田：なるほど…じゃあ…角度を 7° にして，高さを 2，a は 6 のままでやってみて。
（中略）
042 達男：計算して（数値を）言ってるんだと思う。たぶん。じゃないと…どういう計算をするとこういう値がでるってのがあるんだよ。きっと。
＜少し間＞
043 山田：今度は偶然じゃなくて一発でできないかな？

「計算して（数値を）言ってるんだと思う。たぶん。じゃないと…どういう計算をするとこういう値がでるってのがあるんだよ。きっと。」（042 達男）から伺えるように，解決者は支援 039 の数値に着目した。支援 039 がなぜ有効に機能しなかったかを考えると，解決者の考えにあった支援を行っていなかったからであると考えられる。解決者が数値に着目しているので，数値を着目することから考えを改めさせる支援が必要であった。支援は，**解決者に何が不足しているのかを考え，それに応じた支援を考える必要がある。**

また，「（一発で）解くためには次に何をするべきなのか」ということも解決者自身が自ら気付くことにも期待したい。

三角形の作図は，軌跡の交点を求める作図がほ

とんどである。このことに解決者自身が気付くような支援を行えば，角αがどのような軌跡を描くのかということを考えたかもしれない。活動を移行する支援には，**次になにをすればよいのかということを解決者自身に気付かせること**が必要である。

3.2.3　場面 3

124 山田：じゃあ，「与えられた一直線」ってのを$6cm$とするよ。で，「与えられた距離」を$4.8cm$として，同様に作図してみて。

125 達男：図 15 を作図。

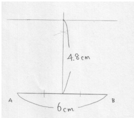


図15

126 山田：じゃあ戻ろうか。具体的に，aが 6，αは$15°$，h_aが 4.8 の三角形 ABC を作図してみて。

127 達男：線分 BC=6 をひく。

（中略）

138 佑一：半径。

139 山田：だな。じゃあさっきのやつを思い出してみようか。（図 11，12）佑一くんが描いてくれたやつだけど。

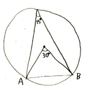


図11

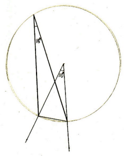


図12

140 達男：だよな〜使えるはず。

141 山田：αが$15°$だから…。

142 佑一：… $75°$と$75°$をとればいいんじゃない？それと垂直二等分線が交わったところが交わったやつが半径になるんじゃない。

また，支援 112「与えられた一直線から与えられた距離にある変点の軌跡は何か。」を与え，そのあとに「じゃあ，「与えられた一直線」ってのを$6cm$とするよ。で，「与えられた距離」を$4.8cm$として，同様に作図してみて。」（124 山田）のように支援 C と関連づけたものを与え，支援 126（C）を与えたところ，支援 B1 と支援 C とを容易に関連づけることができていた。

よって，活動を移行する支援は，**活動のつながり・関連が明確にされる必要がある。**

3.3 支援に関する理論的枠組みの検証

導きだされた枠組みを基にした問題解決学習指導の具体例を示す（資料 1 参照）。

この問題解決学習指導の具体例は，中学三年生を想定したものであり，実際に中学三年生のあるペアにこの指導を行い，プロトコールを起こし，前章で導いた支援に関する理論的枠組みを検証する。

3.3.1　学習指導案について

（1）自力解決 D において

全く手がつかない，または，問題把握ができていない解決者には，問題把握をさせる必要がある。そのとき，各々の「課題」を自身で把握させなければならない。

具体的には**「どんな三角形を描きたいの？」**と訪ね，「高さが$4cm$」で「底辺に向かい合う角が$30°$」の 2 つの条件の三角形を描かなければならないことを気付かせる。

（2）自力解決 C において

どう作図するのかわからない解決者には，まず，なぜわからないのかを把握させる必要がある。この場合，条件が 2 つあるからわからないと考えられる。それを解決者自身に把握させ，ではどうすればよいかを気付かせる必要がある（**次に何をすればよいのかということを解決者自身に気付かせることができる支援**）。

具体的には**「なぜ難しいの？」**と訪ね，条件が 2 つあるから難しいことに気付かせたい。その上で，条件を 1 つにしぼって描いてみる，という活動につなげさせたい。

（3）自力解決 B（B-1，B-2）において

条件を一つにしぼって作図する場合，2 つのアプローチが考えられる。

①$h_a \rightarrow \alpha$

点 A は，高さの軌跡上にあると気付き，その軌跡上で$\alpha = 30°$となる点を探す。

②$\alpha \rightarrow h_a$

点 A は，底辺 BC を弦とする円上にあると気付き，その軌跡上で$h_a = 4cm$となる点を探す。

おそらく解決者は①の活動を行うと考えられる。②から考えようとしても，②の方が①より困難であり，解決者もそれを感じるであろう。そこで①の活動をさせる支援を行う。具体的には**「（角度が）難しかったら，高さの方でやってみよう。」**と訪ねる。①の活動によって得られた解決も間違いではないが，曖昧さがある。また，三角形が作図できるまでに，角度の測定を数回繰り返すことになり，非常に面倒である。この面倒さは解決者自身も感じているはずである（**行った解決が，何がどのように不十分かを解決者自身に気付かせることができる支援**）。

次に②の活動を行わせたい。ここで「もっと簡単に$30°$の位置を決められないかな？」と訪ねる。だが，この支援で次の活動に移る保証はない。

解決者は②は難しいという理由で①の活動に移ったのであり，②の活動を行わなければならない理由がない。ここでは②の活動を行わせる契機を与える支援を行わなければならない（**次に何をすればよいのかということを解決者自身に気付かせることができる支援**）。

具体的には「なぜ$30°$の位置を決めにくかったのだろう？」と訪ねる。①の活動では先に高さを決めたために，角度の位置を特定しにくかった。次は先に角度の位置を特定して，後に高さを決めればよいのではないか，という発想に移行させてたい。また，この発想だと$\alpha = 30°$の三角形を描く活動より，円周角の定理に気付くことが期待できる。

3.3.2 浮かび上がった問題点

大学生を対象として導きだした枠組みだが，実際に中学生に指導してみると，有効に機能しなかった。これはなぜか？

一つ目の理由として，「問い方」に問題があったものだと考えられる。今回調査するにあたって，出来るだけ最善な「問い方」を考えたのだが，これが上手く伝わらなかったのかもしれない。

この問題を解消するには，子どものこと，特に個人差について理解している必要があるのではないか。ここでいう個人差というのは，学習スタイルとしての個人差のことである。例えば，支援を言われるとますますわからなくなるという子どももいるであろうし，言葉で言われるよりも，文字で支援を出された方がよいという子どももいるであろう。また，子どもがあまり使わないような言葉を使用しても，支援として有効に機能しないであろう。したがって，子どものことを普段からよく観て，理解する必要がある。

また，二つ目の理由としては解決者は自力解決B-1からスタートしたので，自力解決Dや自力解決Cの考えが抜けているのではないか，ということだ。想定した活動予測に沿って，解決者に期待される考え方は次の通りである。

Ⅰ. 底辺はすぐ描けるので，条件は２つ（高さと角度）ある。
Ⅱ. ２つの条件を同時に満たすのは難しいから，条件をどちらかにしぼって考える。
Ⅲ. 高さに条件をしぼって考えると，高さが$4cm$の三角形が無数にでき，平行線の軌跡が見えてくる。その軌跡上に点Aが存在する。
Ⅳ. だがこの方法では，曖昧さがあり，不十分である。
Ⅴ. 先に高さを決めたから，後から角度をそれにあわせなくてはならなかった。よって，先に角度を決めて，後から高さをそれにあわせればよいのではないか。
Ⅵ. 角度に条件をしぼって考えると，角度$30°$の三角形が無数にでき，円の軌跡が見えてくる。その軌跡上に点Aが存在する。
Ⅶ. ⅢとⅥとを考えれば，点Aの存在すべき場所は自然に決まる。

だが，実際，解決者が行った解決では，このような考え方になっている。

Ⅲ'. 高さ$4cm$の軌跡を描く。その軌跡上に点Aが存在する。
Ⅳ. だが，この方法では，曖昧さがあり，不十分である。

まず，ⅠとⅡの考えが抜けていることにより，Ⅲの考えにたどりつくことができない。Ⅲの考えがないとⅥの考えはおそらく出てこない。また，Ⅴの考えは，Ⅵの考えの見通しがたたないとおそらく出てこない考えである。

今回の調査の場合，考え方が不足していると判断できた場合に，その考え方に振り返らせる支援が必要になるであろう。そうでなければ，事前に想定した支援がいくら優れていても，有効に機能しないであろう。

この問題を解消するには，子どもの今持っている考えを把握する必要がある。例えば，子どもが持っていると期待する考えをあらかじめ記述し，その記述した考えを持っているかどうかをチェックしながら学習を進めることが有効ではないか。

Ⅳ.研究の結果

本研究では，プロトコール分析を行うことにより，支援に関する理論的枠組みを構築し，また，それを検証した。

そこで，以下のような理論的枠組みを得た。

1）解決者に何が不足しているのかを考え，それに応じた支援を考える。
2）行った解決が，何がどのように不十分かを解決者自身に気付かせることができる支援。
3）次に何をすればよいのかということを解決者自身に気付かせることができる支援。
4）活動のつながりや関連が明確な支援。

残された課題として，本研究では，支援に必要な性質を導き出したが，その性質をどのように支援に付随させるのか，ということについての議論は成されていない。

V. 主要引用・参考文献

G.Polya [柿内賢信訳]（*1954*）．いかにして問題をとくか．丸善株式会社．

G.Polya [柴垣和三雄・金山靖夫訳]（*1962*）．数学の問題の発見的解き方1．みすず書房．

清水美憲（*1990*）．ペアによる数学的問題解決のプロトコール分析について．筑波大学教育学系論集，第14巻第2号，183-195．

溝口達也（*2003*）．問題解決と評価．西日本法規出版株式会社．

資料1

底辺BCが$6cm$，高さが$4cm$，底辺に向かい合う角が$30°$の三角形ABCを作図して下さい。

自力解決D
・全く手がつかない。
・問題把握ができていない。

支C「どんな三角形を描きたいの？」

自力解決C
・どう作図するのかわからない。

支B「なぜ難しいの？」
意 条件が２つあるから難しいことを意識させ，片方の条件のみで三角形を描かせたい。

支B-1「（角度が）難しかったら，高さの方でやってみよう。」

自力解決B-1（$h_a \to \alpha$）
・$h_a = 4cm$の三角形を描く活動を通して，点Aは$h_a = 4cm$の平行線の軌跡上にあることに気付く。
・分度器を用い，軌跡上の$\alpha = 30°$を探す。

支B-2「もっと簡単に30°の位置を決められないかな？」
「なぜ30°の位置が決めにくかったのだろう？」

自力解決B-2（$\alpha \to h_a$）
・$\alpha = 30°$の三角形を描く活動を通して，点Aは底辺BCを弦とした円周上にあることに気付く。

自力解決A
・二つの条件を同時に満たし，三角形を作図することができる。