講演記録【鳥取大学数学教育研究、第６号、2004】

学ぶことの愉しさを感じることのできる授業の工夫

講演者：大谷実　金沢大学教育学部助教授

楽しさ」と「愉しさ」

「たのしさ」という言葉にもいくつかあり，知的な意味である物事に関心を持ってするものは，賑やかで遊びの快楽のような「楽しさ」というよりも，「愉しさ」という言葉を使った方がいいと思います。つまり授業の中でニコニコ，楽しく，ワイワイということもありますが，数学という知的な意味で愉しいということがあると思いますので，この言葉を使うこともあるのではないかと考え，ここでは後者の「愉しさ」という言葉を用いました。前者で音楽の「楽」を使っていますが，やはり狭義の重点的な内容である数学的活動というものとの関わりで愉しさを考えていくことがある意味大切ではないかと考えています。数学的活動の愉しさの中身，あるいは言葉の仕組みとしていくつかあると思いますが，一番大きなことはいわゆる数学的な見方や考え方をし領る愉しさです。知識の「知」という言葉を私たちは普通用いることが多く，また観点別の「知識・理解」の評価の中では「知る」という言葉を用いています。「領る」という言葉はあまり使われない言葉で変わった使い方かもしれませんが，私はこの「領る」という言葉の方が好きです。その意味はまた後ほどお話したいと思います。

「数学のものの見方・考え方」の他に，数学というのは非常に数学独自の道具（ツール）を使う愉しさがあろうかと思います。そのようなツールを通して最終的には様々な数学の意味を知り，これはある意味で，「領る」という言葉に近い意味合いを有しますが，数学らしい拡張・一般化をすることによって逆にその根底にある仕組みを深く領る，というような愉しさを論じるには数学的活動に結びつけて考えていきたいと思います。

「数学的活動」の愉しさ

数学的活動というとき，私は３つの枠組みで考えていきたいと思っています。愉しさあるいは領るということは数学という文化を考える必要があるのではないかと思います。いわゆるひとつの学校の文化である数学を学ぶということは，先生方が生徒たちを数学の文化に誘うということです。数量関係の領域を一つの事例としてお話をさせていただきます。

まず，数学的活動の愉しさということで，活動というのは本来的に知的な喜びというか，愉しさを含んでいるということをお話していきたいと思います。数学的活動という言葉が指導要領を含めて出てきたとき，活動というのは例えば心理学ではどのように考えられているのかを調べてみると，活動理論を提唱したレオンチェフという心理学者が次のように言っていました。―――試験があって，その準備のためにある生徒が歴史の本を読んでいました。そこに友達が来て，「あなたの読んでいるところは試験に出ないよ」と言ったとします。すると「なんだ」と言って脇へ放り出す生徒もいるでしょうし，試験とは関係なしにもう少し読み続ける場合もあるでしょう。嫌々でも本を読んでいる場合は，本を読むことがその生徒の動機に基づき，その生徒の欲求に知的なマジックを与えていたわけです。一方，本を放り出す生徒にとって，本を読むことは活動ではなかったのです。この場合は試験に受かること，試験の準備をすることがその人にとっての活動であって，読書自体は活動ではなかったというのです。

数学とは少し関係はありませんが，活動といった場合には，そのことに本当に知的な欲求が満たされることが前提にされているわけです。ですから私たちが愉しい授業をするときに嫌々ながら受けている生徒がいるとすれば，いくら数学的活動と言っても，それは活動とはいえません。本当の意味で生徒が活動するというのは，授業のベルが鳴っても「残念だ，もう少し考えたかったのに」というような気持ちが残ったり，家に帰ってもう一度分からなかったことを考え

直したりする気持ちを持てるかどうかです。「人が何かをしているときの動機をまず考えることが活動を考えることである」とレオンチェフは言っています。その活動理論というものがあるらしく，数学的活動というのが色々なところで語られていますが，活動するのは先生と生徒ですから，やはり心理学などの分野の知恵が加味されている必要があります。しかし指導要領や指導書を見る限り，言葉だけが出てきて，人の匂いがない感じがします。だから活動理論を知ることも大切ではないかと思うわけです。

活動理論

レオンチェフが言う活動というのは，３つのことを考えます。１つはその人がどんな動機（モチーフ）を持っているかということです。何かをしたいときには必ずモチーフがあります。数学の場合だと，数学らしいものの見方・考え方に興味・関心を強く持っているということを考えていきます。２つめに，その活動の中で使われる固有の文化的なツールがあるということです。３つめは，授業に密接に関係してくることだと思いますが，主として能力に長けた者である大人が模範を示して，必要に応じて支援をし，時には口うるさく言い，次第に若い新参者である生徒たちが自立するよう手を引いていく社会的相互作用です。だから学校現場であれば先生と生徒が関わるような場合を活動と言い，一人黙々と調べたり考えたりすることを活動とは言わず，区別して「行為」と呼びます。活動といった場合に，(ア)「モチーフ」「見方・考え方」，(イ)「ツール」，(ウ)「社会的な関わり」の３つをみることが活動の考え方です。このような目で数学の授業というのを見ていこうと思います。

(ア)「数学的な見方・考え方」を領る

まず（ア）のモチーフですが，数学の見方・考え方を領るという，個人が自分なりに知識をこしらえていくというようなことを考えていないというわけです。逆にいうと，数学的な見方・考え方というのは生徒の内部に自然に生まれてはこず，数学の窓口になる「先生」という経験を積んだ人たちが生徒たちを誘っていく必要があるという意味で，生徒一人一人が自発的に発見したり，見つけたり考えたりするだけでは実現しにくいようなことを領ることがあります。広辞苑には「物事をすっかり自分のものにすること」とあります。私たちが学校という場で領るというのは，先生という専門の方と出会うことによって，生徒が知恵を自分のものにするということで，先生と出会わなければ得られなかったような考え方があります。だから先生がもっと積極的に生徒を導く必要が，数学的なものの見方や考え方，あるいは評価というものにはもっと強調されるべきだと思います。導くということですから，共同の作業で生徒が体感する必要がありますが，言葉だけで伝えられる物では当然なく，だからといって生徒一人で身につけていくことは難しい。だから先生から応用すると考えています。

数学固有の見方・考え方の例として，関数を挙げます。学校で関数をどうして学ぶのかと聞かれたとき，人間は体として比例の仕組みを持っていないから学ぶ必要があると答えています。私たちは五感を通して色々な刺激を受けるわけですが，その刺激が音であればデシベル，大きさであればキログラムのような刺激に比例するような感受性，感覚を持っていません。対数という仕組みは詰め込まれていますが，たとえ比例という自然なものさしを持っているならば改めて学校で勉強する必要はなく，遊びや毎日の生活の中で生まれてくるものだろうと思いますが，私たちの体はそのようなものを持っていないということだと思います。ウェーバー・フェフィナーという精神的学者が「物理的な刺激 (stimulus) を S，感覚・知覚 (perception) を P とすると，刺激の対数 P=logaS。a は音や重さによって決まってくる値」としています。客観的には刺激が強ければ強いほど，それに比例して感覚が強い。しかし刺激が２倍になっても２倍の感覚を私たちは感じ取れないわけです。例えば，目を閉じて手のひらに分銅を 100g 乗せたとします。そして他の人が被験者に 100g の分銅を 101,102,103 と変えていっても重さの違いに気づかず，105g で重くなったと感じたとすると，今度は 1kg——1000g の物に対して同様の実験をしたとき，今度は 1050g のときに初めて重くなったと感じるそうです。これがウェーバー・フェフィナーの法則です。100g と 105g の感覚の差も 1000g と 1050g の感覚の差も分数で表すと値は loga で同じになります。対数ということを重さに関していうと，対数的なメカニズムを持っている人間は重さの大

小判断を体で判断するのは結構難しいわけです。

人に埋め込まれた対数性

私たちが暮らしているときに使われているものの中には，対数を利用して作られているものがいろいろあります。ステレオによる目盛りの感覚は 1,2,3 と等間隔，すなわち等差数列になっていますが，一目盛りにあたる音量は等比級数的に変化してきています。つまり２の２乗の４倍の刺激を受けたときに私たちは２倍の感覚を受けたということになります。学力，特に表現・処理のような技能的なものについてもそうかもしれません。学力向上というように騒がれていますが，そんなに伸びるものではありません。石川県は少人数習熟の力にはなりませんという県です。少人数習熟度で学力を上げなさいと言うと，こぞって表現・処理のようなものを時間をかけて鍛えますが，なかなか伸びず，定着しないと言われます。それは私たちの体自身が理解するということを別にして，先の考え方からすると表現・処理は対照的な伸びをしており，目に見えて伸びるとは期待できないと思います。

感覚を正確にする人の知恵

秤をなぜ使うかというと，対数という感覚で大小や重い・軽いなどを判断しにくいからで，長さを使ってコントロールしています。だから私たちは秤を考え出し，それを利用してコントロールを上手にしています。それらの基本的な発想が関数の考え方ということです。関心のある数量が原子力のように危険であったり，非常に微細であったりするような御し難い事象があるとき，それらを直接測定したり操作したりする代わりに，その事象と関係していそうで且つ私たちにとって扱いやすいような数量を操ることによって，間接的に情報が得られるならば非常にありがたいです。関数はそのような発想と人間の対数性という生まれ持っている困難な仕組みを乗り越えるために考えてきた自衛の一つであると思います。このような発想は自然と出てこないわけですから，数学に長けた先生が上手に場面設定されて，生徒に考え方の良さを導いていきます。そのようにして生徒は頷るわけです。だから秤は，私たちの体に持っている対数性を線形性の「長さ」という御しやすい数量に置き換えてコントロールしているのです。物理的道具である秤というのは子どもたちの関数の考え，そして人間の対数性という体に埋め込まれた物を欲する知恵になっています。それが数学の世界，一次関数になると，ｙという御し難いけれど知りたいものがあったときに，手近で扱いやすいｘ，ａ，ｂを使って間接的にｙの情報を考えていきます。

「関数の考え」の要点

関数の考えを２つにまとめますと，１つは「投影」をする。つまりある事象ｙを別の事象によって見ることにより考察を容易にするような発想，モチーフがあるということです。そのモチーフを，数量関係を指導していくときに生徒に持ってもらい，あるいはそのような場面を提示しているかということになります。もう一つは三輪先生から教わったもので，「働き」ということです。関数がどんな性質を持って，どんな構造を保つか，つまり数変化や対応の法則性を掴むことが，関数で難しいのは伴って変わっていくものの中で変わらないものを見つけてそれを利用することが知恵として重要ですが，結構難しい。変わっているのに変わらないものを見つけるということが，あるいはどんな変わらない働きをもっているのかを見つけることが結構大変です。例えば比例だと，ｘの和は対応するｙの和になり，和を保存する働きは比例ですから，ｘとｙが伴って変わります。変わっていく中で変わらないものを見つけ，利用して，ｙを知るという発想を生徒がモチーフとして持っているかどうかが，関数を学ぶときに大変重要で，同時に難しいです。ですから文科省の学力調査をしても，数量関係は出来具合が悪いです。

「関数の考え」には抽象化と単純化の思考過程があります。関数というのは３つの事象を扱うことですが，最初から一つの独立変数に対してそれに伴って変わる従属変数があることは教師だけが頭に描いているものだと思います。現実の事象では多くの数量が複雑に関連しあっており，最初から１つの数量の変動に伴う他の数量の変動が考えられないわけです。そういう場面で問題を出して考えるということは，生徒が数学らしい思考，つまり抽象的に考えるとか，単純にものを考えるチャンスを奪ってしまうことになります。私たちは問題場面を「関数で考える」ために，様々な数量の中から２つの数量だけに目を向けており，意図する，しないにせよ，他の数量を一定のものとしてみなしておこうとするわけです。だから始めからｘがｙに関

係する場面から始まって，それでは対応関係を見つけていきましょうということになると，それは生徒にとっては数学の授業のプロセスである抽象化や単純化のチャンスを取り上げてしまうことになります。関数の指導になるとあたかも数表・グラフ・式を指導するかのように見受けられますが，今お話したように，複雑な現象にはいろいろな変量が関わっています。その中から規定の２つだけに絞って他のものを見ないようにし，その仕組みを考えることを可能にしてくれているのが数表・グラフ・式です。私たちからすると，それは当たり前の数学の一式であって，生徒からすると自然なものではないような気がします。小学校から少しずつ習ってきているかもしれませんが，生徒にとって自明な道具ではないと思います。ですから活動というのはまずモチーフを考えるということが（ア）です。

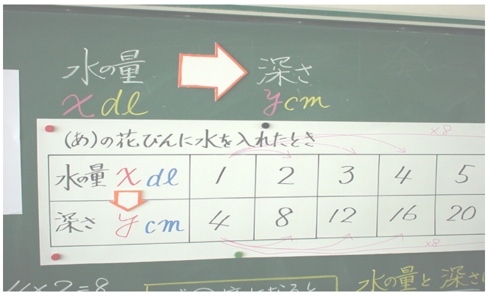
(イ) 数表・グラフ・式：思考の道具

活動というのは道具を使うことで，数学の道具は何かというと数表やグラフや式だというのが（イ）の話です。新米の大工が一人前の棟梁になる前には，かんなやのこぎりなど色々な道具を上手に自分のものとして臨機応変に使っていくようになるように，生徒は数学固有のものである表・グラフ・式を関数で考えるたびに上手に適宜使えるようになっていく必要があり，関数指導というときにはメインとして表・グラフ・式が当然出てきますが，それが定式化されすぎている気がします。なぜ表を扱うのか，なぜグラフを扱うのか，なぜ式を扱うのかということになると，あまりはっきりと生徒は区別していません。それなりの意味があって３つの道具を勉強しているのだと考えさせる必要があるのではないかと思います。実際に問題解決によって２つの変量を取り出して，その関係を組織的に分析することを上手にしてくれる道具が数表・グラフ・式ですが，伴って変わる数量，例えば刻々と変化している現象があったときに，過去に起こったことと現在起こっていることは同時に存在しません。過去は過去，現在は現在，そしてその先にあるであろう未来があります。しかし数量やグラフ，式というものは過去も現在も未来も一度に目の前に存在させてくれる道具です。これは非常にありがたく，何時間も前に起こったことが目の前にあり，今起こっていることも目の前にあり，先に起こるであろう数値も予測することができます。場面場面で刻々と変わるものを目の前に同時に存在させて，過去も現在も未来も同時に考えられるようなことを確認してくれるのが数学の三種類の道具であると思います。

もともと数学は時間に弱いわけです。例えば3＋４という式があったときに，３人の女の子と４人の男の子が一緒に遊んでいるという同時の場面も表します。また，３人女の子が遊んでいるときに４人男の子が後から加わってきたということも表します。算数の言葉というのは時世がないのです。算数の言葉にはその言葉言葉の制約や良さがあるわけですが，式に時世はなく，それを肉づけして使っていく必要があるわけです。逆にいうと，そのような図表，グラフ，式というのは時世を超越しているのです。ですからそのような二変数だけをその場に存在させて関数という上で考えることを私たちに可能にしています。グラフや式と別にこのような差があるから数表があると思うわけです。だから具体的に色々なデータを実験などで組織的に集めたときに，それをうまく左から順に適当に並べるのではなく，順にｘが小さいものから大きいものへ，あるいは逆でも縦でもいいです。縦というのは日本はあまり使いませんが，他の国ではよく使います。きれいに配列して独立変数を組織的に変えた場合の従属変数の値の集合を規則的に配列する道具です。小学校ではこのような統計的な表として使うこともあります。けれども小学６年生くらいになると統計的に使っていたものを，同じ見栄えのする数表であるけれど，先生の導きによって関数的な数表に変え，中学校に入っていかなければなりません。そのあたりを変えずに中学校に入ってくる生徒がかなりいる気がします。あるデータを整理してまとめ，その中のあるデータから傾向性を読み取っていく統計的な表と，伴って組織的に変わる関数的な数表から間を考えたり先を読んだりするものとして数表を変えていく必要があると思います。

これは小学校での一つの実践例です。数表を見るときに中学校でも多いのではないかと思いますが，ｘが２倍，３倍，４倍となるときにｙも２倍，３倍，４倍になる，つまりｘ同士の変化に対するｙ同士の変化，すなわち変われば変

わるというように比例を見ます。それが小学校の定義で，縦に見ていってしまいます。中学生も最初は縦に見ません。違う言い方をすると，縦に見にくいわけです。



（図 1）

数表というと３年生であっても横に見てしまいます。生徒にすれば自然な見方かもしれませんが，二乗に比例する y=x2 でも，表を扱うと生徒は横同士の関係で y の関係を見ようとする傾向があります。けれど先生は平気で y=x2，つまり縦を結ぶ式を言葉で言いながら，数表では横で生徒が見ても知らん顔していることが多いです。「変われば変わる」というのが小学校の定義ですが，中学校では式やグラフのほうが数表よりも大切だと思います。数表はむしろ考えるための手がかりとして扱われる場合が多いです。小学校のときに深さを水の量で考えるというように「投影」（y を x でみる）という発想で，縦を意識させる実践を行っていても，生徒から出てくるのは横の関係で，「変われば変わる」という小学校の考え方が根強く残っています。けれども関数というのは「変われば変わる」という考え方から「決まれば決まる」という見方に変えていく必要があります。それをはっきりと見させてくれるのが式で，x と y を＝で結んでいるわけです。しかし数表は結ぶような明示的なものがなく，グラフも小中の段階で x と y を「決まれば決まる」という見方ではっきりと目の前に焼き付けるように印象付けてくれるものではなかなかありません。

数表から比例の性質を見いだす

比例は小学校も中学校も (1) 増える数が決まっている，(2)x が○倍になると y も○倍になる，(3)x が 1 のとき y の値が決まった数である，(4)x1＋x2 が y1＋y2 に対応する，であり，(4) が小学校での一番高いレベルの発想ですが，あまり出てきません。だから小学校のほとんどが「変われば変わる」の世界で，「決まれば決まる」の世界は中学２年の一次関数のあたりから本格的に取り上げられていくかもしれませんが，中学１年の比例や反比例の指導でも「決まれば決まる」のほうに持っていく必要があるのではないかと思います。

統計的数表から関数的数表へ

そのためには，先生がいい場面を設けて道具を上手に使っていくということを生徒に仕組んでいく必要があるだろうと思います。先程の数表で数表を縦に見る生徒は小学校ではほとんどおらず，中学３年になっても表を横に見ている生徒がいるように，生徒の自然な見方は決して教師が期待する見方ではありません。そのような意味で，関数の考え，つまり「x が決まれば y が決まる」という決まれば決まるという関数的な見方を徐々に強調していくような発問や問題状況を作っていく必要があるのではないかと思います。小学校での比例は基本的にはひとまとまりのもののようにはなっていませんが，中学校で数表，グラフ，式がひとつのものになることが非常に重要です。これらは主語と述語のような関係で考えることができます。小学校の関数は述語の世界，中学校の関数は主語の世界です。すなわち，例えば小学校は，比例は y＝(決まった数)×x で表されるということを旧課程ではしていました。そのときの y＝(決まった数)×x は比例が持っている性質の一つで，他にも和が和に対応するとか，x と y の比が一定であるとか，x が２倍，３倍になれば y も２倍，３倍になるという性質がありますが，それらは全て「比例は」ということに対する性質です。だから比例についての述語となり，ほとんどが手順とか操作といったような具体的なやり方です。しかし中学校になり先生方の口をついて出るのは「一次関数 y＝ax は」という表現で，これは主語です。「一次関数 y＝ax は」というのは「倉吉市は」というのと同じように，つまり倉吉市に来たことがない人間に「倉吉市は」のような主語を掲げられても何も分からないのです。教科書や先生方が話される「y＝ax は」という言葉は一つのものなのです。それは全ての x，全ての y の関係をひとつのものとして扱っているようなものなのです。だから「y＝2x＋3 のグラフを書きなさい」というとき，「y＝2x＋3」は一つの式で，グラフもまたひとつのものです。「y=2x+3」の式やグラフはあたかも数学のひとつの物であるかのように私たちは

中学校で話をするわけですが，小学校からあがってきた生徒は述語のことしか知りません。つまり y＝ax というのは x に a をかけると y が求まりますよという手続きであったり，x が２倍になると y も２倍になるということを実感するときに計算で確かめるときのひとつの手がかりであったりして，対象ではありません。もののように考える素地がなく，且つ y と x を直接結びつけるような発想がなく，表をいつも横同士で見ている生徒には y と x を結びつけたものに名前を付けて話をされても難しいと思います。そういったことが中学校で頻繁に起こっているため，私たちが工夫をしていく必要があるのではないかと思います。そのため，小学校では y と x が表においても，グラフにおいても，今は小学校で式は扱いませんが式はもちろんのこと，縦に関係するように扱う素地が他の県よりもできていると思います。だから十分関数的な数表のレベルになるまで高まって中学校に入ってくることはあまり多くないのではないかと思います。

小学校の全国調査でも，数量関係が悪いとよく言われます。小学校で関数的な数表とまで詳しくしないまま中学校に入ってくるので，x 同士の比（内比）を x と y の関係（外比）で見るように小学校の高学年で奨励しておいてもらわないと，中学校に入ってもなかなか縦に見ません。だから投影（y を x で見る），つまり関数の考えを大切にした場面を先生が強調し，生徒をいざなっていく必要があると思います。

小学校と中学校の接続の問題

新しい教育過程では３割削減されて，じわじわと味わう「螺旋式」の内容が段々なくなっていってしまいました。その中で，小学校の６年で比例を勉強しているから中学校では今までどおりにやればいいという発想があるかもしれませんが，小学校でやっているからといって中学校で比例あるいは一次関数の勉強をすんなり学ぶような素地が小学校からできているとは言い難い状況にあります。教育課程に残っているからといって，中学校の比例が安心して教えられるわけではありません。なぜならば小学校では比例という考えを使わないで比例をそのまま勉強し終えている，いわゆる隠れ比例のような生徒がたくさんいます。例えば「帰一法」，つまり１あたりの値さえ求まれば比例の問題はだいたい解決できるからです。あるいは「比例をなす」，つまり a：b が c：d という４つの数があって，３つまで分かっていて，残りの一つを求めるという比の問題を解決できて，それで比例をクリアしてきている生徒であったりします。このような課題を出して，比例ができていると考えている先生もいます。しかし，最後の「比例する」ということまでせりあがって中学校に入ってきていません。例えば「小麦粉 15kg の値段が 4850 円のとき，12kg の値段はいくらか」というとき，1kg の値段を求めることによって 12Kg の値段を求めるということが帰一法のやり方です。場合によっては小学校の問題は大体このような方法で解決できます。従って「比例というのはこんな考えで解けばいいんだ」というレベルで中学校に入ってくる生徒も多いです。「比例をなす」，すなわち小麦粉の重さが 12/15 倍になれば値段も 12/15 倍になるというような発想をする生徒がいればまだ良い方かもしれません。しかし帰一法でも問題は解けるので，改めて問題を追い，考える必要性を持たなければそのまま隠れ比例の形で中学校にあがってくることもあります。「比例する」ということが違っているけれど，「比例をなす」ことで比例をクリアしたとみなされる生徒がかなり多いのです。

表を縦横無尽に見ることができるように小学校でなっていないと，言い換えると数表のどこを取り出しても自由に考えることができるというくらい柔軟な表に対する見方が小学校で育成されてこないと，中学校の比例にはおそらくついてこられないと思います。隠れ比例の生徒は中学校の比例の段階で落ちこぼれてしまうのです。このようなことを小学校であまり詳しくやっていないと思います。

グラフ

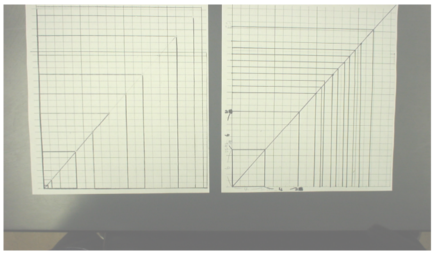
なぜグラフを使うかということに話を移ります。時間や重さは位置や形に関係ありませんが，私たちはそれらを位置として図形的に表現します。それによって何かいいことがあるからです。本来空間的で図形でない数量を位置や図形として表している不自然さがあり，数表とは違う意味での道具です。しかし生徒にとっては不自然なものとして映るのではないでしょうか。「前まで表でやったから今度はグラフで表してみましょう」と先生は自然に発問するかもしれませ

んが，生徒からしてみれば「なぜそんな変なことをわざわざ表さなければいけないのか」ということかもしれません。数表では上下にペアにされていて見やすかったものを，x 軸と y 軸にわざわざ引き離すわけです。分けたものをひとつの対とみなし，それを平面状に位置としておいているわけです。ただ数表では 2,3 行，つまりポツポツとしかデータを配列できませんが，グラフでは滑らかな一連の連続量を表現できます。そしてグラフにとられていく個別の値がプロットされているというものではなく，その値全部のものをひとつの集合と見なして，その集合において成り立つ質的な傾向，しかも連続量における傾向を視覚的に際立たせる道具であるのです。あえて図で表すとそうなります。

(ウ) 統計的グラフから関数的グラフへ

小学校高学年では，１日の日照と気温の変化を折れ線グラフか何かで取ることは統計的にしています。しかしそれは与えられたデータを見ようとしているだけで，一切関数の表になっていません。そこで小学校高学年で見方を変えて中学校に入ってくる形になります。点の間を折れ線で結ぶのではなく，直線上に全ての点が並んでいることが分かったから，というように間を線で結ぶことを理解する必要があります。しかし小学校のときにグラフといわれると「点を取って結んだら直線になりました」で終わっており，統計的なレベルのまま，帰一法のまま，中学校で比例を勉強するというケースがあるかもしれません。小学校でグラフを「外比」，つまり「x が決まれば y が決まる」としてみるよう強調していただきたいと思います。

「拡大・縮小」が小学校ではなくなりましたが，以前は比例の学習の前に図形の拡大・縮小がありました。従って，小学６年でそれを使って統計的なグラフから関数的なグラフへと見方を変えることを試みるということをやりました。長方形を拡大・縮小したら横と縦は比例するかという前時に学習したことを絡めて，長方形の隅を揃えて考えました。横が２のとき縦が 3，４のとき 6，６のとき 9，このようなデータを与えて考えさせると生徒はたくさん解き，徐々に線のようなものがでてきます。生徒は「対角線が見える」，「ここにいくらでも点が見える」というように「対角線」という言葉を持ち込みます。（図２）



（図 2）

そして「x が３のとき y が 4.5 になるのは？そういう長方形はどういう風にしたらよいか」と聞くと，x が３のところから垂直上向き矢印をひいて，対角線にぶつかったところから x 軸に平行に線をひいて，そこが 4.5 になるというような見方を後にしていきます。「このやり方だと拡大図縮小図は無数にかける」，最初はポツポツ取ってあった対角線の線を「塗りつぶすくらいの点ある」，「全て対角線の上にある」「実はその線が点のかたまりなんだ」というような統計的なグラフの見方から関数的なグラフの見方へ変わってきている姿を小学校で経験している生徒は，中学校の比例の勉強にスムーズに入っていきます。けれどそれを通過していない生徒には以外と難しい対象になっています。

中学校での比例指導

小学校での比例の指導は「x の値が２倍，３倍・・・ になると，それにともなって y の値も２倍，３倍・・・になる」というように定義します。つまり数表が非常に大切で，内比が対象になっています。そして実際に計算したりする操作が小学校での主たる活動の内容です。

中学校ではどうでしょうか。中学校では表が取り上げられても式がとても大切になってきます。そして例えば y＝2x というのがひとつのものであるかのように，つまり主語であるかのように扱います。そして外比へ，「変われば変わる」から「決まれば決まる」というようなものの考え方に変わっていきます。小学校と中学校ではこのような違いがあります。

小学校では数表が比例を考える大切な手がかりでしたが，内比を奨励してしまうという問題もありました。それに代わり中学校では式が優勢となります。小学校では数表，グラフ，そして式というのが昔では良かったのですが，中学校になると，数表がチラッと出てきて，今度は式が出てきて，その式に基づいてグラフを書いたり，そして式とグラフの対応関係をいろいろつけたりということが私たちの県で使われてい

る教科書の定義です。ですから扱う順番も考え方も小学校と中学校では随分変わります。生徒は不思議に思うでしょうね。小学校のとき「変われば変わる」と習ってきたのに，中学校になると「みなさんは中学生なのだから，『決まれば決まる』という式で定義します。こういうのを比例といいます」と言われると，「あぁ，中学校ではかっこいい言い方になるのだなぁ」と思えるのはいいほうかもしれません。実際，比例は式によって再定義されます。小学校では計算操作であった式が，中学校では比例の諸性質の中で際立ってきて，比例の集合の「代表」となります。つまり式を中心に数表の仕組みが説明され，グラフが作成され，比例関係を式に表すことや，与えられた式に対応するグラフを選ぶなど，式が中心となります。

中学校に接続するために：「系」

中学校で比例を勉強していくためには，小学校で数表や式，グラフにおいても，すべてに対応する数値の対の全体を正の数の範囲で１つの「系」として捉えます。つまりグラフであれば直線上にみっちり点が集まっているということ，表であれば飛び越えたり間を補完したり逆に見たり縦に見たり，どこを見ても同じ仕組みが成り立っているというような，全体のひとつのものとして捉えることが小学校の高学年で素朴にできていなければいけません。それができていないと，中学校において外比で y＝2xのように，式でもって比例を定義することができないわけです。変化する数量全体において成り立つ一般的な性質として「比例する」ものとして小学校で仕上がっていく必要があります。

小学校から中学校でなぜ定義を変更するのでしょうか。それは負の数が入るからです。「x の値が－2 倍，－3 倍，－1/2 倍，－1/3 倍，・‥ の後，y の値が－2 倍，－3 倍，－1/2 倍，－1/3 倍，‥・ になる」このような長い文章は書けませんので，中学校では「y＝ax」というように定義し直すわけです。中学校では数を拡張するから，小学校ような言葉による定義を式による定義に変えざるを得ないという関係があります。しかし，色々な中学校の比例の指導をみると，負の数をあまり取り上げておらず，小学校と同じようなことをして比例を定義しているところも見られます。そうすると y＝ax として定義する良さとが中学生にはなかなか分かりにくいと考えられます。

小学校と中学校の比例指導の相違点

これは繰り返しになりますが，小中における比例の意味の違いに関して，内比に基づく定式化から外比に基づく定義への見方の変更が負の数を勉強するために必要です。式を大切なものとして中学校で扱うのは，比例を関数として，つまり「一方を決めれば他方は一意に決まる」という見方に段々変更していく必要があるからです。また，数表であれば数値がたくさん並び，グラフであれば具体的な点が並びますが，式であれば無数の x と y についてのペアをたった 1 秒で，しかも y＝2x だけで全部を表し尽くすことができ，ひとつのものとして扱えるようになります。小学校の「比例は y＝ax で表される」から，中学校での「比例 y＝ax は」のように主語として扱えるようになります。つまり小学校における一般的な集合体としての比例の性質から，比例の諸性質の関係を顕在化・明示化し，式を用いてそれを定式化することで式と比例の他の性質との関わりが中学校で明らかになります。

中学校で授業をデザインする原理

そのような意味で，中学校で授業をデザインするときには，まずもって，隠れ比例が見られるかどうかということを見抜かなければいけないわけです。比例の属性がどの程度理解されているか，つまり「帰一法」のレベルでとどまっているのか，「比例をなす」のレベルでとどまっているのか，本当に「比例する」までできているのか，ということを確認する必要があります。そしてそれらを足場として，扱う数の範囲を負の有理数にまで拡張する必要があります。そして２倍，３倍だけではなく，「－2 倍，－3 倍になれば y の方も－2 倍，－3 倍になる」という小学校流の内比による扱いをしながら，「そんな面倒くさいことをやっていてもいけないから y＝ax というふうに表すと簡単でしょ」ということで比例を学習するわけです。負の数にまで拡張された数範囲で比例の属性間の関係を言語を用いて明示化することが中学校でまずしなくてはいけないことだと思います。それがなければ小学校と同じことの繰り返しになってしまいます。関数を一意対応の考え，つまり「変われば変わる」ではなくて「決まれば決まる」ということを常に強調しながら式に持っていきま

す。生徒の自然な発想かもしれませんが，先生がうまく仕掛けた場面でものの見方を自分のものにしていくためには，先生の主導性が必要であり，表を横に見る癖がある生徒に対しては縦に見ていくように注意しながら中学校の比例の授業を実際，計画してやっていきました。

結論として，中学校で数量関係が弱いという原因は，私は小学校にあると思います。ですから，中学校自体の自己充足的な学校の中で見れば確かに数量関係は弱いけれど，それは小学校でも非常にお粗末なのです。だからそういうお粗末な生徒が中学校に入ってグンと伸びるというのは考えられないわけで，そこのところに，今お話したような統計的な数表やグラフで終わっていたり，「帰一法」や「比例をなす」で終わっていたりする生徒，隠れ比例の生徒が随分多いということが原因として考えられると思います。そのためにも，中学校の最初からお決まりどおりに定義として y＝ax を性急にせず，小学校から上がってきた生徒たちの，中学生のだいぶ慣れた時期の生徒の手ごたえ，どの程度比例というものを小学校で理解しているのか，それを確認した上で中学校本来の指導をしていく必要があるのではないかと思います。

単元計画と指導上の留意点

次に授業を計画，実践したことを話したいと思います。４次からなる９時間の指導時数の中で８つの課題を提案して授業を試みました。

次	授業時数①－⑨・指導項目・課題 [1]－[8]
1	①ｙをｘで判断すること [1]
2	②小学校での比例の性質を正の数の範囲で確認すること [2] ③数範囲を負の数に拡張すること [3]
3	④正と負の数表・グラフを合体すること [4] ⑤比例定数を負の数に拡張すること [5] ⑥式から数表を作り，座標を導入すること [6]
4	⑦式からグラフをかくこと ⑧比例を前提とし，式を利用すること [7] ⑨式の有用性を感得すること [8]

課題１と課題２は投影の考えを強調し，隠れ比例をある意味で確認しながら小学校のことを復習していきます。

課題２は次のように設定しました。埋め立てられた潟に放水路があり，放水路の水面が海に面している水門と上下します。それを生徒は日々経験しているので，海面に対する放水路の上下ということで課題を設けました。雨が降って，放水路が溢れると困るので，適当なところで水門を開け放って水を海に放出しなくてはいけません。役場の職員が警戒水位を超えないように水の上昇を考えていくとき，比例という発想で考えていくという場面からスタートしました。

その時生徒は，その場面から小学校でよく利用する「ｘの値が２倍，３倍になるとｙの値も２倍，３倍になる」ということを言ってきます。あるいは「ｙの値は y＝2×1＝2，y＝2×2＝4，y＝２×３＝6 という計算の手続きで求めることができる」や「ｙは (時間)×2」と言ってきます。実際に強調したいのは表を縦に見る矢印のところです。表を横に見る矢印の部分は小学校の比例を勉強した生徒にはそれほど珍しいものではないので，ｙをｘで見る，つまり表を縦に見ることを強調していきました。それをグラフでも表していきました。

３時間，４時間にあるのが，本当の意味で中学校の課題となるわけで，負の数に数範囲を拡張し，正負の数表・グラフを合体させていくわけです。最初の課題２では正の範囲で，次の課題３では今度は水が減少していく，夏の日照りのときに渇水状態になっていって水面の高さが段々減っていくというような状況を考えていきました。両者の数表を合体したときに生徒が関心を持って身を乗り出したことがあります。縦の矢印はもちろんのこととして，「1 が－3 倍の－3 になったら２が－3 倍の－6 になる」という０をはさんで，小学校で学んだ既習事項が負の数の範囲でも自由に成り立っていることを確認できました。数表を縦横無尽に見るということをここで学んだわけです。これを「ｘの値が２倍，３倍，…，－２倍，－３倍，…になると，ｙの値も２倍，３倍，…，－２ 倍，－３倍，…になる」という小学校流の言い方でいうと，非常に回りくどい言い方になります。それよりも「y＝(時間)×2」すなわち時間の２倍という方が表現としてもシンプルでいいだろうということで，生徒のほうが小学校で負の数の数表を

確認しつつも，且つ比例を式として定義した方がわかりよいということを徐々に納得した上で式を習得ということになってきたわけです。グラフも合体すると１つの直線になるということを確認してきました。

第３次では比例定数を負の数まで拡張します。これは普通の話ですが，次第に比例定数を拡張していくことによってy＝axのａという定数をかなり遅く出します。つまり早めにy=axという形を出さないで，いろいろ比例定数を変えながら最後にａという定数を導入するのです。課題５は取水制限を発令するために時間の経過とともに水面の低下を考えようというもので，負の数の比例定数を考えていきます。常に，放水量のような私たちの身近にある具体的な場面を参照しながら考えていきます。そして次第に数字そのものが話題になっていくような形にしていきます。式でｘが－0.5倍ということが，比較的この段階では容易に出てきました。数表について今度は課題２と課題５の比較を行います。課題２では水が時間ごとに増えていき，課題５では時間経過ごとに減っていきます。これらを比較し，同じような「増えていく」，「減っていく」という場面においても小学校で確認したような内比的な関係が，増えていく場合にも減っていく場合にも全て当てはまるということを確認していきます。そして外比という言葉は出しませんが，狙いである縦の外比による値を確認したうえで，縦で見たほうが我々としては考えやすいということで，計算を通して実際に出していきます。比例定数が負の場合と正の場合をあわせてグラフを描きながら，最終的にここまで達したときに，「y＝axで比例」を定義するということにしたわけです。従って，比例の定義は随分後になってきます。

課題６はy＝2xで表される関係について表の空欄をうめ，そのグラフをかいていきます。このとき，基本的には生徒は外比でうめていくことができるようになっています。つまり主としてｘの値をｙとの縦の関係で表を見ていくことが観点になっています。中学校ではこの段階で座標を導入するわけですが，急に座標というものが入ってきて，ここでなぜ座標を教えるのだろうか，ということになってきます。私たちは数表を縦で見ることを強調してきたので，縦の一組のセットを座標もどきとして考えて，すぐに座標に移らずに，考えにくければ縦のセットで考えていけばいいわけです。横に書くことに慣れてきたらそれを使っていったほうがいいですが，考えにくければ縦のセットで点を考えていくというように無理強いはしませんでした。生徒にとっては新しい座標というものを縦の組み合わせでいろいろと点を取って考えていく方が考えやすそうでした。従って，無理に強いることなく進めながらも，やはり座標を使うことを狙って授業を展開していきました。

この段階になると現実の降水量とは離れて，今度は具体的な背景をもたない数学のひとつの対象として，式とグラフをみていきます。いつまでも分からなくなれば具体的なものに戻って意味を参照していくわけにはいかないので，式が一つの扱う対象として意識されてくるときに，式と抽象的な原点を通る直線との対応関係に進んでいくわけです。数学的な対象になるまでにかなり時間がかかります。

第４次は「比例を前提として式を利用すること」で，比例する量の差は式を使えば一目瞭然です。最後の課題７は，縦に見ることをかなりはっきり強調させるための応用的なものに問題を持ってきました。データが汚れてｘが５に対してｙが7.5ということしか分かりません。しかしこれさえ分かっていれば，全て比例だという前提を置けば残りの情報が全て分かるということまで生徒に持っていきました。課題７はこのような授業実践をしたという例です。

以上をまとめると，中学校の比例の指導あるいは関数の指導は，主語として，つまりあたかもｙとｘの無数の組の集合を既に扱えるかのように，我々は言葉として問い，語り，生徒に対応しますが，生徒にとっては必ずしも主語や一つのまとまりになっていません。小学校での経験とのギャップがかなりあるので，そのギャップを埋め合わせしていきつつ，中学校での背伸びというのがあるかと思うわけです。特に小学校では，反比例がなくなり，比例の式もなくなったので，帰一法のような隠れ比例のまますり抜けてきている生徒がたくさんいると思うのです。そのような意味で私たちは通常考えている以上に，きめ細かな配慮で指導し，生徒に対して背伸びをする機会を丁寧に仕組んでいかなくては，生徒はなかなか縦に見てくれません。つまり外比で，「決まれば決まる」というようなものと

して考えてくれるようにはなかなかならず，式を使っていても，実際に考えるときには内比で「変われば変わる」ということを手がかりにして問題を解決することが多く，本当の意味で，中学校のレベルでの思考を行っていることにはなりません。従って，中学校で色々な困難を伴う場合には，一つの視点として小学校で随分つまずいているということ，そして中学校でそこの溝を埋めずに「中学校はこうである」ということで性急に進みすぎてしまうところがある感じがします。今までの教育課程では階段を一段一段上り，さらに足踏みをする余裕があったと思いますが，今が段数が少なく，階段が急なイメージだと思います。足踏みをする余裕もなく，より高いところに下からドーンと突き上げないといけないようなカリキュラムになっており，そのカリキュラムの傾きの急さや段数の少なさは，生徒にとってはなかなか辛いところがあると思います。

その他，中学校の指導において配慮していく必要があるのは生徒が愉しむことで，先生の導きのもと，「なるほどそういう考え方があるんだ」と頷り，知的に興味を感じるという意味での愉しさだと考えることができるのではないかと思います。

(記録：沢田慶子 鳥取大学大学院)