講演記録（鳥取大学数学教育研究、第６号、2004）

問題解決と数学の学習

講演者：布川和彦　上越教育大学学習臨床講座

今ご紹介にあずかりました上越教育大学布川と申します。私も10年ぐらい前今の大学に勤めるまでは、溝口先生と一緒に高校の方で非常勤講師をして数学の授業をしていたのですけれども、今の上越教育大に移りまして小学校の教員養成を中心にやっている大学なものですから小学校の算数とか中学校の数学とかを中心に講義することが多くて、正直ちょっと高校の数学にこの10年間のブランクがあります。今回お話をいただいたときもどうしようかなとも思いましたが、せっかくの機会ですので、自分の勉強もかねて今日お話しさせていただくことにいたしました。お昼までになりますけれどもどうぞよろしくお願いします。最初に永野先生からお話をいただいたときに問題解決に関わって話をというご依頼をいただいたのですが、いろいろ考えまして問題解決と数学の学習ということで先生方と一緒に少し考えていきたいと思います。私たちのように数学に関わっていますとどうしても大学のときもそうですし、授業の中でもそうですが、他の教科に比べてずいぶん問題を解くということの機会が多いかとおもいます。ですからその意味では数学の問題解決と数学の学習はある意味渾然と一体になって行われているかと思います。

1．「問題解決」のイメージ

例えば先生方から見て数学で問題解決というのはどのようなイメージをお持ちでしょうか。お持ちでしょうかというのも変なんですが、いただいた名簿で１人２人お聞かせ願いたいと思います。岩崎先生おられますか。岩崎先生は、問題解決というとどんなイメージをお持ちですか。お話し頂いてもいいですか。「生徒たちで問題を解いていくぐらいですね」「例えばその解くというのはどんな活動とお考えですか。」「解くというのは？」「問題を解くというのはどんなことという先生のイメージがありますか。生徒でもいいですし、あるいは先生御自身が問題を解くということについてどんなイメージを持たれているか聞かせてもらえますか。」「自分で式をたてて、式を解いて答えまでたどり着く。」「そうですね、高校だとずいぶん式を解くということになりますね、図形でもベクトルを使ったり、解析的に解いたりしますから、式を解くということがポイントになりますね。まあ、その前に式をたてるということがあると思うんですけど。」

もうひとりお願いしてもいいですか。近藤先生おねがいしてよろしいですか。

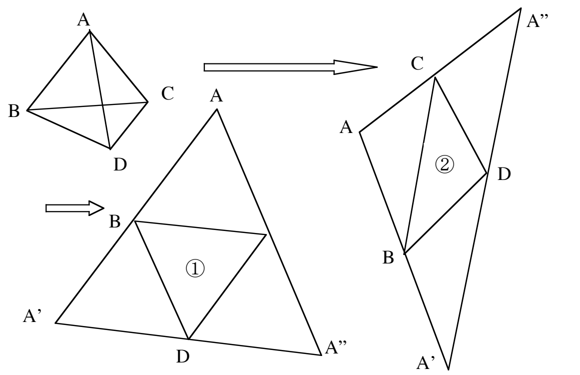
「あんまり普通の授業のように問題を与えて解くというのはあんまり問題解決にはならないのではないかと思う。広い意味では問題解決かもしれないけど。私のイメージからすると、もっと、例えば、あの木の高さは何mだろうというような、そのどうやってこれを解くかという道筋もなにも与えないで、テーマを与えたり、仕組んだり、テーマを立てさせたりして、それを実際に知るためにはどうしたらいいか、どういう数学的な知識とか技能を使ったらそれにたどり着けるかということを考えさせるところに意義があるかと思います。なかなか日常することが出来てないです。」「ありがとうございます」

(1) 解決を通して見えること

たまたま、お二人名簿の下の方からお願いしたんですが、今お二人聞いただけでもずいぶんいろんなイメージがあって、面白いなと思って聞かせ頂きました。実際問題解決とは何かということは、以前６月17日の講義の資料を溝口先生に送ってもらって拝見してみると、そこでも、いろいろあったと思います。さきほどは、二人の先生の意見を聞いたわけですが、時間があれば全員の先生の意見を聞けば良かったのですが、多分先生方の間でもいろいろとイメージがあるかと思います。ここで、その問題解決についてもう一回ちょっとわれわれが考えていく事の一

つのきっかけとして、先生方に簡単な問題を解いていただいて、それからすこし、また一緒に考えてみたいと思うんです。先生方に解いていただく問題ですけれども、すべての自然数についてこの等式が成り立つと言うことです。ちょっと考えてみていただけますか。
＜問題＞
すべての自然数 n に対して、次の式が成り立つことを証明せよ (庄, 幸田, 2002)
(n+1)(n+2)(n+3)ﾉﾉ(2n)＝2n・1・3・5・ﾉ・(2n－1)
（この間問題を解く）
＜証明①＞（手嶋先生の証明）
両辺に n!をかける。
(左辺)＝(n+1)(n+2)(n+3)ﾉﾉ(2n)×n!=(2n)!
(右辺)＝2n・1・3・5・ﾉ・(2n－1) ×n!=(2n)!
よって、与式は成立。
他のやり方された方はありませんか。皆さん同じですか。
こうみていると帰納法でやられた方も多いようですが、これは非常にエレガントですね。
これは、n!をかけるというのは、どのようにして気づかれたんですか。どのようにしてぱっと思い浮かべられましたか、もしよろしければ教えて下さい。
「たまたま、今課外授業で生徒に数Ⅲを教えていまして、微積の計算でそれを最後までするとn!になるものがあったので、そういう勉強をしていたもので、そういうまとめかたもあったなと、たまたまです。」
すごいですね。こういう形で解けるということですね。すいません予想外な展開で。だいたい皆さん数学的帰納法で、実は私もこの問題を解いたときに数学的帰納法でやってしまって、それで納得していたので、こういうエレガントなやり方があると気づかなかったんですけれども、こういうやり方も出来るということですね。
わかりました。それではですね。確かに帰納法でも出来ますし、やられた先生もあると思います。
それでは、次にもう一つ考えてもらいたいのですが、これはどうですか。次は図形の問題です。四面体 ABCD があってですね、まあ、組み立てた時のイメージを思い浮かべて頂いて、こういうねじれの位置にある向かい合う辺が何組かあると、３組ですか、あるんですが、その長さが等しいときという条件の時、各面が鋭角三角形であるということを考えて頂きたいと思います。
＜問題＞
各対辺どうしが等しい四面体 ABCD がある。すなわち、AB=CD、AC=BD、AD=BC。このとき、四面体の面はすべて鋭角三角形であることを示しなさい。

もしよろしければ、解けたなと思われた先生は教えて下さい。前に出て紹介して頂きたいので教えていただけますか。
（この間問題を解く）
今ですねちょっといいところまでいったという先生がおられてちょっと紹介して頂きます。
あんまり、個人解決の時間をかけないということは、問題可決の授業としては、良くないんで恐縮なんですが、今日は先生方の会だということでお許しいただきたいと思います。
（板書中）
展開図を２つ
① 鋭角三角形のもの
② 鈍角三角形のもの



「まだ、証明でも何でもないと思うんですが、まず、それぞれ向かい合う辺同士の長さが等しいということは、４つの面は全部合同ということになります。これを展開してみるとこういう合同な４つの三角形が出来ることになります。
こっちは全部鋭角ぽい図なんですが、
こっちは１つ鈍角にしてみた図でこれを組み立てたら立体になるのかなというとここの角のところが、ここと ここの角を足したものよりこっちの角が大きいので組み立てられない。
立体にならない。そこのところをもう少し詰めていけば証明になりそうだなというところまで

考えました。今のところここまでです。」

何か先生方御質問があればどうぞ。納得されました？今の説明で、反論はないですか、大丈夫ですね、よろしいですか。ありがとうございました。

今ですね、近藤先生に説明頂いたんですが、こういう形で１つのポイントは、全部の面が合同だということですね。ですから、すべての面が鋭角だと書いてあるんですが、結局１つの面が鋭角になればいいんですよね。それから合同の並び方をみて頂ければいいんですが、近藤先生が展開図を書かれたときにすでにもうされていましたが、結局中点連結定理を考えて頂ければ、ここの線がABとBAュが平行になりますからつまり１直線になる。つまりこの１つの面と相似な全体の三角形をかいてその各中点を結べば展開図になるということです。

もともと展開図は、４つの面が組み合わさったものを開くわけなんですが、実は、ある程度合同だとわかってかいてみると、大きい三角形をかいておいて、その三角形は各面と相似な同じ形になるんですけど、その辺の中点を結べば、展開図になるということです。その状態であれば、あと大きい鋭角三角形なり、鈍角三角形をかいて、中点を結ぶともとの四面体の展開図になる。

ちょっとばかばかしいんですが、例えば、こんなのを作ってきたんですが（鋭角三角形、鈍角三角形を実際取り出して折りたたむ）、鋭角の場合こうなりますよね、こうたたむと２つの面に重なりができますよね、逆に展開図の反対を考えるとこの重なった部分からぐーっとこう開いていくイメージを考えていただくと出来るということですよね。鈍角の場合は、こうなりますけど、結局ここでこうなってしまうんです。今お話がありましたように角が余ってしまうんですよね。だから、まあ、開こうにも、開いた瞬間はじめから２つの面が付いてないので結局四面体にならないということがわかります（この解決については布川(1995)を参照）。

今の２つの問題は、そんなに簡単なものでないんですが、皆さんが高校の先生方という大変数学が出来るので、いきなり解いていただきました。実は最初に解いてもらった問題は、某中学校の定期試験の問題です。某中学校というのは、灘中のことです。それから、今解いてもらったのは、数学オリンピックのアメリカ予選で昔に出た問題です。どちらも、簡単な問題ではないんですが、今日はあっけなく解けてしまいました。

いま、解いてもらった四面体の問題を当時大学院の時に、後輩に解いてもらったんですが、それをビデオにとって分析することをいたしました。やはり先生方とだいたい同じようなことをしていました。

先ず、四面体の様子をいきなりそのままかきました。その後こう展開図をかくのですが、最初はずさんというか、あんまり考えずにとりあえずかいておいて、それからどことどこが等しいという条件を後で入れるという感じです。４つ三角形をかいておいてどの辺とどの辺が等しい形かをかくような展開図をかいていました。

次に、全部の面が合同と気が付きますから、今度は展開図の描き方が変わって、大きい三角形をかいてそれの中点を結べばよい。それで各面と大きいもともとの三角形が相似になりますから、大きい三角形が鋭角か鈍角かということが、そのまま各面が鋭角か鈍角かということになります。そのことから展開図を組み立てて、実際にその大学院生は、答案用紙のはじっこを勝手に切って、こういうのを作って実際にこう組み立てて、重なるとか重ならないかとか、あとこういう形で、例えば、ここはだんだん開いていけばいいんだというような形でやっておりました。そういう形で問題の解決をしてきたということです。先生方されたのも結構近い形だと思います。

今２つ問題を解いてもらったんですが、そのやったことをもとに今回考えてみます。結局ですね２つの解決の違いはなんだろうかということなんですが、もちろん、２つの解決といってもですね、問題が決まれば、解決の仕方が決まるというわけではなく、あくまでこれは、問題と解決者の関係によって決まりますので一概に言えるわけではありません。たとえば、先ほどの灘中の問題についていえば、私は最初みたとき、左辺の式を展開しようかなと思いましたが、それは無理だと判断して、そこからは、すべてのｎと書いてあるし、だいたい決まりとして、帰納法かなとおもって数学的帰納法をそのままこうやる。後は帰納法のやり方にしたがって、

n=1のときじゃ何かってかいて、n=kのときをやってkのときの式を作って、それからn=k+1の式をかいて、その中に適当にn=kの式をずっと当てはめていって式の形を作っていくという形で考えました。それこそ最初に岩崎先生にご紹介頂いたように、式をどんどん変えて、帰納法という一定の枠組みのに沿ってやっていくという形で解いていくという形だったと思います。先生から、先ほど、紹介頂いたものは全然違うタイプですけども、数学的帰納法をもとにした解き方をされていた先生方も多いのではないかと思います。それに対して四面体の問題はちょっと違うかなと思います。最初「問題解決どういうふうに考えますか」といったときに近藤先生から、「どういうふうにやるかわからない状況があって」という話がありましたが、四面体の問題はむしろそれに近いかなと思うんです。もっとも、先生方の中には、余弦定理とか使って角度などを求められた方もいるんですけど、そういう形でいったとしても、われわれがいつも扱っている問題と違いますから、結果的に帰納法でやればいいとか、ベクトルでやったらさっと計算でいけそうだとかという形で、何かこう式をたててそれをこうやって変形するという形がなかなかしづらい。あるいは何とかの定理という形でそこに当てはめていって、何とかの定理の条件を満たしているからこの定理からOKという形にはちょっとしにくい感じの問題です。結果的には、先ほどご紹介した院生もそうですし、解いていただくと先生方の中でも多かったんですけど。とりあえず、まず四面体をどんなんかなという形でかいてみて、いきなり立体のままではわかりにくいのでちょっと展開してみるか。そこまで別に当てがあるというよりは、ともかく、四面体でとりあえずなんかやってみるかという感じですよね。その中で、合同だとわかると今度合同ということで、合同だったら、じゃまた次とこうなるということです。そのうちに大きな三角形をかけばいいかな、だんだん少しずつやってみると。すこしずつわかっていく。また、わかってきたことがあるので、それをもとにやってみると、また少しわかって、ということのある程度繰り返しで、ああここうなっているんだとか、役に立つかどうかわからないんですけど、とりあえずは、なんかこんなことあるんだ。ここうなってる、ここ等しいとかいうことがだんだん見えてくる。そこがだんだんもやもやとしたものが最後に形になっていく。というような形の解決ではないかとおもいます。

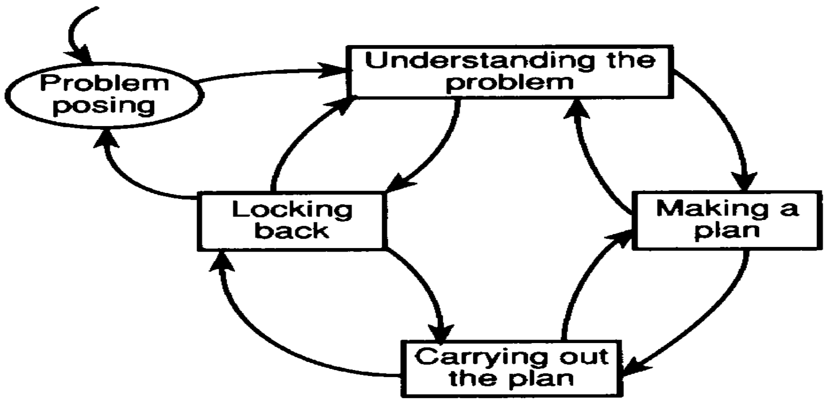
ですから、いろいろやっていく中で結局、与えられた対辺、向かい合った辺の等しい四面体のことが少しずつ、このとき対辺が等しいんだったら、こんな事がなりたっている。この四面体ではこういうことが言えているんだとか、だんだんと少しずつわかっていく。だんだんいろいろ情報が集まってきて、だんだん結びついていくとその結果としてどうしてそういう鋭角三角形になるのかということがだんだん見えてくるということがあったんではないかと思います。その意味では、最初の問題を私のように数学的帰納法でこう解いたときと、それから四面体の問題のようにいろいろやりながら解いたときとでは、同じ問題解決なんですけれどもわりと道筋が違うという感じがします。

(2) ポリアの４つの相との関わり

この２つの解決の違いということを念頭に置いて、また次を考えていきたいと思います。

６月17日の溝口先生の講義でもすでに問題解決ということで話があったんですが、その中でポリアの４つの相というのがあったと覚えておられる方もあると思います。ポリアは、人によってはポイヤほうが正しいという人もあるんですが、簡単に言うと数学者です。ヒルベルトがいた頃のゲッチンゲンにもいていろいろ数学の研究をやっていたらしいんですが、そのポリアの本で今日の資料の参考文献にもかいたんですが、「いかにして問題を解くか」という昔からよく読まれている本があります。その中で彼が書いているんですが、問題解決には４つの相があるということで、問題を理解すること、計画を立てること、計画を実行すること、振り返ることという４つの相が溝口先生の話の中であったかと思います。これは非常に単純な４つの形なんですが、溝口先生の講義にもあったように、その後これをいろいろな研究者が、これはちょっと単純だろうということで、複雑化しています。例えば、フランク・レスターのフローチャートのような図も紹介されていたかと思います。他にもいろんな人がこの図式を使うんですけれども、一番単純なのは、もちろんこのまま、理解して、次に計画して、実行して、振り返るということで、実際に使っている学校もあるようで

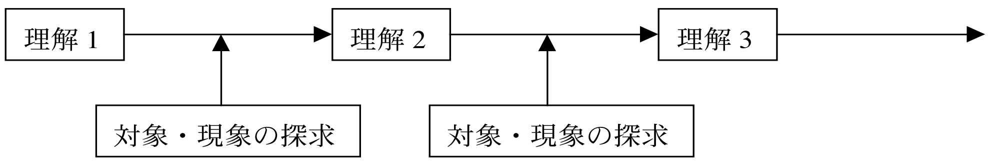
す。アメリカのビデオを見せていただくと、実際、この通りに流れるんですね。問題は何ですか、与えられたものは何ですか、求めるものは何ですかといって理解するんです。次に先生が「どうやったら解けますか」といきなり聞くんですよ。それは図を書けばいいですとか、パターンを見つけますとかいって、じゃあ、それやってみてごらんなさいといって、前に出させて、最後にこれでどうですかといって振り返るという流れでやるという、そういうやり方もあります。でも実際は、問題解決はそんなに単純じゃないなと思いますよね。やはり数学教育の方でもこれそのままだと単純なので、かといって何も秩序のないというのもいろいろと扱いにくいですから別な形を考えていきます。結局だんだん複雑化していくと、1つ最後に行き着いた形だとおもうんですけれどもこういう図を書いた人がいるんです。これは、93年頃にジェームズ・ウィルソンという人が書いた論文の中にあった図を持ってきたものです。



これを見ていただくと、ここに問題提示があって、その上に理解があって、計画をたてるがあって、実行があって、振り返るという状況になっているんですが、それがもうお互いに行き来をするという形の図になっています。ですから、あくまでポリアのものは段階でなくて相という書き方をしているということを重視して、そういう側面もあるんだということは認めるけれども、もうその通りに段階的に進むと考えるよりは、お互いに行き来をするということですよね。多分四面体の問題を解いたときの自分の経験を振り返ってみると、おそらく普通はこちらのほうに近いものだと思います。だから理解は一応しますけど、こんなんで出来るかなと思って、なんかやってみるんだけど、やってわかったことを基にして、もう1回だったらもっとこういう事があるんじゃないかとか、だったらここの辺が平行だったら、こっちは平行じゃないとか、また理解に戻るわけですね。行ったり来たりするというのが普通じゃないかと、結局こんな感じに行き着いてしまったということですね。

(3) 問題解決の一つの捉え方

だからある意味で広くみれば、今われわれがやった四面体の解決も、理解して、計画、実行という線形の形にはなかなかなっていないけれど、ある意味でこういう形で見れば、4つの相を伴って進展しているということは言えるのではないだろうか。そうしたときにこのままですと何かこう行ったり来たりでつかみ所がないので、たとえば、もう少し単純化して考えたいと思い、これはちょっと自分で勝手に作ったものなのですが、こんなふうにとりあえず捉えてみてはどうかというのが今日の最初の提案です。



つまり、先ほどのようにやってみると、少しやってその上で、理解が進んでという形で、いったり来たりするということになります。その中でどこが大事かという事を考えたときに、人によって価値観はあると思うんですけど、個人的には、だんだん四面体の様子がわかるということがある意味では、大切だと思います。極端にいえば四面体のことがある程度全部わかってしまえば、それで一応解決は出来ることになりますから、その意味で理解の流れというのをウィルソンの図式から取り出してみたような図です。そうすると理解は、だんだん1，2，3と少しずつ変わっていくという流れが一方であるといえます。ただ理解は別に何もしてなくて進むわけではないですから、当然何か四面体について、展開図をかいてみたり、どこが等しいかを印を付けてチェックしてみたりと、何か探求があってまた理解が進む。それに伴って展開図の描き方を変えてみてそれを折る、あるいは折るところをイメージするという形で、またそれに対して何か探求するとまた理解が進むという形でだんだん進んでいく。その進み方の間には、対象とか起こっている現象に対しての探求があってそれで進むというふうに考えることが出来ます。ですから行ったり来たりということで、図式がだんだんごちゃごちゃになるんですけど、そのごちゃごちゃの中から強引に一本のポイントを抜き出すとすれば、理解の流れというものを1つの大きい幹と見て、その中を流れるためのエンジンみたいな形でそうした探求を入れていったらどうか、というのが問題解決を捉えていく自分なりの方法じゃないかなといつも考えています。

前半部分をまとめてみますと問題解決の1つのとらえ方として次のようなものを提示したいと思います。問題となっている対象とか現象があると考えられます。今の場合であればある条件を満たした四面体、先ほどのものであれば、ある問題となっている等式も1つの対象と考えていいと思うんですけど、その対象や現象を十分理解することを目指すことを1つの問題解決のゴールとして考えてみたらどうかということです。そのときの理解の進み方として、当たり前なんですけど何もしないのはだめですが、対象に対する働きかけを通して、理解は一気にというよりは徐々に進んでいくという側面があるんじゃないかなということです。逆に言うと問題解決を考えるときに解けるということがもちろん最終目標なんですけれど、1つのとらえ方として対象に対して理解が深まるということを考えると、それは一気にはこないから徐々に深まるという面をある程度大切にするということがあるんではないかと思います。いろんなとらえ方があるかと思いますが、一応自分なりにですね、先ほど先生方にして頂いたような四面体のタイプと同じようなものをいくつか分析したのですけれど、それらを通して考えたときに、1つのとらえ方として上のようなことが考えられるんじゃないかということです。

２．問題解決の捉え方から学習を考える

今日のテーマとして掲げさせて頂いたのが、問題解決と数学の学習ということなんで、後半は、こういうふうに問題解決を捉えたときに、数学を学ぶということ、数学を学習するということに対してどのようなことが言えるか、こういう観点で見たときに数学の学習というものをどういうふうに見ていったらいいかということを考えてみたいと思います。

(1) 解決の進み方との関わりで

今２つ挙げてあるんですけど、最初の「解決で重視されることとの関わり」の部分はまた後でやるとして、次の「理解は徐々に進む」という部分を大切にすると、どんなことが言えるかを考えてみます。今のでいきますと問題解決は理解を進めるということでしたけれども、それが徐々に進むと言うことでしたから、同じように考えると、たとえば、授業の中で演習問題と本格的な問題解決は違うのかもしれませんが、何かを問題解決として生徒たちに経験をさせたいと言うときに、何かこう少しずつ少しずつ進むという面をまず機会として提供できないかと考えられます。徐々に進むという様子をわれわれが見せられるかという問題もあるんですよね。自分なんかは子どもの前に出るのが怖いですから、40何人とか、私が教えていたときには50人のクラスもありましたが、50人の前でやっぱり立ち往生したくないし、教師としての権威も失いたくないですから、予習をしていって、自分はあがるとすぐ問題を間違えてしまいますから場合によっては解答集作ったりして臨むわけです。ですから、最後のエレガントな状態にし

て生徒の前に出してしまうわけです。解法としてはいいわけですけど、私たちがずっとそういうものを見せていくと子どもからすると、どうしてそうなったのかはずっとわからないわけです。だから本来であれば、四面体のときに、いろいろやってみたり、あるいは、こっちのアプローチで進んだけど無理だなと思ってもう一度戻って別のアプローチをとることも、多分私たちも普段の時はあるんですけど、そういうことを余り見せなくて、最後に出来たバイパスのような道だけをみせるという形になります。例えば、先ほどご紹介頂いた数列の問題でｎ！をかけるというのは大変エレガントなんですが、私からするとさっきお聞きしたようにどうしてそんなことを思いつくのかって言う気持ちが非常にあります。この問題があったらｎ！を掛けるんだよと言われて、それはそうだ。今私もチェックしてみて、確かになるなと言うことは非常に感動しているわけです。ただ一方で、自分で似たような問題が出たときに、いつもｎ！をかけるのならいいんですけど、場合によっては別のものをかけて同じような形になるかもしれないんです。それをどうやって見つけるかというヒントは先ほどの提示には何もないですから、そういうことをわれわれが常にやったときに、子どもたちは理解が少しずつ進むという現象を見ないままに、数学というのはもう一気に出来て、その解答を書き下すのだと、ひょっとしたら思ってしまうかもしれないですね。だからそういうふうに少しずつ進むという経験を、私たちが提供できるかと言うことになるんです。

大学院でさっきみたいな四面体の問題をビデオでとってという話をしましたが、そういうことをやり始めたきっかけも、実は高校で教えていたときにあります。高校で教えていると机間巡視をすると子どもはずーっと問題を見ていて、ずーっとノートをにらんでいて、通りかかると「先生これどうやるん解き方教えて」というんですよね。その前に何か書けばいいのにと思うんだけど、やっぱり子どもたちは書かないでじーっと見ていて書き始めるときはもう解答として書くしか考えてない状態がありました。それは自分の感覚と違うということです。出来る出来ないはともかく、もう少し図を書いてみるとかいくつか簡単な数値を入れて計算してみるとかいうことをやって欲しいという気持ちもあって、その意味で少しずつ進めていくという話が出来ないかと思いやっています。理解が少しずつ進むっていうことを何か私たちの側で提供できないかということですね。

そのときには、先ほどのように理解が少しずつ進むということは、とりあえず何かやってみるということとの相互作用、何かやってわかったからまた次をやってみるといったことの繰り返しだと考えられ、そういう面も含めた機会が生徒に提供できないかということが、考えられる１つの示唆かなと思います。

もう少し長いスパンで考えることからの示唆もあります。先ほどのものがある意味では、１つの問題についての解決の経験だとすれば、例えば単元についてもそういう観点をもう少し私たちがもてるかなという気がします。たとえば微分とか積分でもいいんですけど、微分の単元があったときに自分なんかも結局、最初に微分の定義というか、微分とは何かという話をして、とりあえず微分とはなにかというものはわかってもらって、その後はもう計算練習で、出てくるパターンに応じていろいろ微分の計算に慣れてもらうという形の感覚で高校の授業をしていたように思うんです。先生方はもっと違う考えでやられているかもしれないので、私が特別なのかもしれないですけど、そういう流れがありました。だけど自分が数学を学んでいたときを考えると、最初先生が定義をやって、それに関わるいくつかの初歩的な定理をやっても、まだ、ピンとこないというのが本当だなあという感じがします。内容は忘れましたが、一番自分の中で感覚的に残っているのが、（可微分）多様体の定義です。多様体にはいくつかの条件があって、忘れてしまいましたけど、条件の一つとして、確か近傍の重なりのところで関数が連続とか可微分になるとかいうような条件がくっついているはずです。大学の講義ですから当然、多様体とはという定義の条件を最初にやるわけですけど、どうしてその条件が要るのかがわからないんです。それは後になっていろんなことをやっていくときに、結局多様体全体の中で関数を考えようと思うと、重なる分がどうなっているかを保障しないといけないとなり、後になって初めて多様体が何なのかが少しわかってくる。

同じように考えていくと、高校の１単元を考えていくときに、やはり最初のところで微分と

はと話をして、そこでわかって後は演習問題をするとしても、そこでわかったこととそれを使って例えば問題を解いていく中でわかっていくことがあると思うんです。だから逆に言うと、後ろに演習問題として並んでいるものも、単に計算が出来ている、わかっているかどうかというよりも、問題を解くことによって、彼らが微分ってこんなことなのかなということに迫れるような演習問題が後ろに並んでいるのかという観点で、私たちがもう1回問題をチェックする必要があるんじゃないかと思っています。中学校の先生方と話をさせていただく機会があるんですけど、自分の高校ときもそうだと思うんですけど、演習問題をチェックする視点は、入試で出てくるパターンが十分尽くされているかが結構多くて、これは入試に出ないからやらなくていい、これは入試に出るかもしれないから入れておいた方がいいというような議論があります。一方で、微分の理解が深まるような問題がある程度後ろの方に何問か配置されているかという観点で見直したらどうかということが示唆の2番目です。先ほどの理解が少しずつ進むということ、理解とやってみることは相互作用的に進むということを単元全体に当てはめるとすると、そういう形で単元の理解も進むということを考えてみてはどうかということです。

ちょっと、抽象的な話だったんで、1つだけ事例を紹介したいと思います。これは竹内先生という愛知県の高校の先生が岩波のジュニア新書に書かれた「なぜ数学を学ぶのか」という本です (竹内, 2001)。この本は架空の先生と2人の生徒の対話形式で書れているんですが、いろんな場合分けが難しいねという話からの流れで、比較的数学の得意な生徒に「いろいろと手を動かしているうちに、いろいろな場合があることに気づくんだと思います。」と言わせています。A先生は「そうだよね。ある問題を解決していく過程で、『あれっ、この問題の解答にはこのパターンもあるし、別にこんなパターンもあるぞ！』というように、どうしてもいくつかの場合に分けて考えなくてはいけない場面が出てくる。」と応えています。このことはある意味で理解が少しずつ進むということと関連した話ではないでしょうか。自分なんかでも解答で書くと最初から n が何とかの場合とか、三角形が何とかの場合と書いて、それでその場合の証明を書いて、その次の場合と書いていきます。しかし、どういう場合分けをしたらよいかということは、本来であれば最初からあるというわけではなく、与えられた条件のなかで、同じに議論できないものがいくつか出てきて、ある特殊な場合についてこんな議論したいんだけど、でもこの条件の時はこれが使えないとか出てきて、だんだん見えてきて、その中でじゃあ場合分け、こういう場合とこういう場合とこういう場合に分けなければならないと気づいていくのが本来の流れだと思うんです。なかなか解答として提示するときはそこまで出来なくて、つい最初から場合分けされたものを提示してしまうことが多いので、自然に場合分けをきちんと見つけさせるという機会を毎回というわけにはいきませんが、出来ればそういう機会を提供していけたらと思います。こういう例を見ていくと、先ほどの少しずつ理解が進むという話も、高校の授業の中で私たちが生徒にどういう機会を提供するかを考えるのにそれなりの示唆になるのではないかと思います。

(休憩)

(2) 解決で重視されることとの関わりで

前半で、徐々に理解が進むという話をしてきたんですが、残りの時間で、現象とか対象そのものの理解を深めるという話から何が言えるかを、いくつか例をとりあげて考えていきたいと思います。対象や現象の理解を深めるために何もしなければわからない。例えば、コンピュータを見ているだけではわからない、コンピュータの理解は深まらない、適当でもいいからさわってみると、このボタンを押すとこういう事が起きるんだな、ここいじるとこうなるんだなというのがわかりますから、やはり対象に対して働きかけるということは、それについてわかるということとかなり密接な関係を持っているんじゃないかと思います。そういう観点で数学の学習を見直してみたらどうかということで話を進めたいと思います。例えば1つの一番単純なというか、根本的な話として証明の2つの見方という話をしている人がいます。今の対象の理解を深めるという観点から見たときに何が違うかということの1つの事例になっている気がします。これは、カナダのジラ・ハンナという人の論文 (Hanna, 1996) にあります。彼女は2つの見方を示しています。

１つは、証明する証明で、ある結論が真であることを示す、というものです。ふつう証明といえばこれですから、これ以外に何を区別する必要があるのかという感じもします。実はもう１つ区別されたものというのは、説明する証明というものです。もちろん真であることを否定するわけではないですが、問題となっている現象とか問題場面の特徴とどう関連して結論が成り立っているかということを説明するというのが説明する証明です。一番典型的な例として、数学的帰納法がこの違いを説明してくれます。先ほどの数列の問題があったときに、私もそうだったんですが、数学的帰納法を試みられた先生方が多かったと思うんですが、数学的帰納法は、確かにこの問題の等式が等しいことを保障してくれますね。だけどn＋１から2nまで掛けたものとこれがどうして等しくなるということはあまりわからない。数学的帰納法でやってしまうと正しいことはわかるけどどうしてかということ、数列の特徴とその成り立っている現象との間が今ひとつ結びつかない。それに対して、先ほどご紹介頂いたものというのは、確かに正しいということも説明してくれるんですけど、同時に数列の性質を成り立つ現象にうまく結びつけてくれていると思うんです。つまり、こちらは、n+1から１つずつ増やして掛けていった数列ですよね。こちらの方は、2nの階乗の式から間を抜いたもの、上の方は2nの階乗から前半をごっそり抜いたもの、前半をごっそりぬいたものとこっちは、１つ飛びにとったもので１つ飛びにとったものに２のn乗を掛けていけば同じになるということです。数列の性格と成り立っている現象との間で多分関連がつくことがこちらの証明でわかってくる。私のように帰納法でやってしまうとどの場面についても帰納法で出来ますので、真であることはわかるけれども、どの場面も同じということは、起こっている現象と問題となっている場面の関係があまりわからない。それに対して、今日ご紹介頂いた証明だとそれが見えてくる。その観点で見直してみるとこの２つの証明の違いが何となくわかると思うんです。今問題となっている対象や現象をよりよく理解できるようなかたちで、何でそんなことが起こっているかを説明してくれるものが説明する証明だということですね。真であることが言えればいいやという観点で見れば区別する必要もなくてどちらも証明なんです。対象を理解しようとすることを大切にしようとすると、やはり説明する証明が可能な場合は、説明する証明を提供することが、ある意味では対象の理解、今の場合で行けば、問題となっている式がどんな性質を持っているかということに私たちも生徒も目を向けていくことにつながるのではないかと思います。その意味で対象の理解を中心にするという観点で見ていくときに、同じ真であるということを証明するにしても、２通りのことを区別することが意味を持ってくると言えるのではないかと思います。

先生方の方が詳しい方もいらっしゃると思うんですが、今年の４月にポアンカレ予想が解けたとかいうニュースがあったかと思います。あの場合で行くと説明する証明かどうかはわかりませんが、証明してそれが解けたことは当然大事なんだと思いますが、それによって３次元の多様体についての理解が深まった、つまり、数学者のコミュニティーの中で３次元の多様体についての１つのパターン、ある場合についてはこれはもうこれというようなことがわかったということが重要なんだと思います。その意味では、数学者は問題を解くのですが、その解くということの先には、その人たちが考えている数学的な対象の理解がそのコミュニティーの中で深まっていくということが大切なんだろうなと考えます。その意味では対象の理解が深まるということは、元々の数学の営みを考えても大切なことなんだと思います。その対象とか現象についての理解を深めていくといった時に、中学や高校の数学で考えるときには扱える数学の限界がありますから、対象や現象それ自体の理解にも限界があるかと思います。そうなったときに２通りの理解を考えていってはどうかと思います。

１つめは、直接的なアプローチ、対象や現象、それ自体を本当に理解しようというのが直接的なアプローチです。けどそれが難しい場合があるんですよね。午後から確率の授業案を検討されるということしですけど、確率とは何かということを突き詰めてしまうと測度論や公理的なことになってしまい、高校の範囲を超えてしまい、どうしてもある程度確率については、経験的なことでごまかすしかないということになるように思われます。そこで今度はそれ自身とい

うより他のものとの、確率と周りのものとの関係で迫っていくということ、たとえば、1つのパターンとして、それがどんな場面で使えるとかという利用価値を考える、こんな時に使えるんだとかこんな働きがあるんだということを知ることでその対象の理解を深めるという間接的なアプローチももう一つ考えて見てもいいのではという気がしています。それで今日はその2つに沿って少し考えてみたいと思います。

先ず、直接的に対象自体に迫るということで考えてみますと、先ほどの繰り返しなんですけど、たとえば、誰かとですね今はすごく親しい友達になっている人でもその出会いのときを考えてみると、なんか余りよく覚えてなかったり、最初はすごく素っ気なかったりなんですけど、いつの間にか何となく友達になっていて、いつから友達なのかよくわからないということもよくあるんですが。まあ、友達についての新しい面というのがだんだんわかっていって、そうするとその友達についての感覚が身近なものになっていくわけですね。同じような感じで数学的な対象や起こっている現象について、それがどのようなものかという感覚が高まったり、新しい面も見えたりしてくる。例えば友達で今まで全然知らなくて、こいつは体育系だとばかりおもっていたやつが、「おれ中学の時までピアノを習っていたんだ」と聞いてびっくりしたことがあるんですけど、そういう感じで新たな面がまた後になってまた見えてきたりしてというようなことがあると思うんです。そのような感じで数学の対象と子どもたちとの関わり方が変わっていくことも大切ではないかと思います。よく言われるようにメールだけの友達というのは何となく実感がないと思います。私もメールだけでのやりとりで会ったこともないという人が何人かいましたけど、やっぱり何となく立ち消えになったり、本当に一緒に酒を飲んだり、一緒に遊んだりした人とは感覚が違います。同じように数学についてもそういう対象とか現象について、子どもたちがそれについての手ざわりを何か得ることが出来ないか、あるいはそれを手助けできないかということが1つ考えられるんです。先ほどと同じことなんですが、やはり何かを理解しようと思ったとき、じっと見て観察するだけではなかなかわかりませんからそこに働きかける機会というものが提供できないかということですね。ただコンピュータであればキィをたたくということがあるわけですけど、数学の場合ですと、数学の概念そのものは見えませんから、それに対して直接働きかけるということは難しいと思います。そこの部分をもう少し、直接本当の意味では数学的な概念に働きかけてはないんだけど、それに近いような感覚を何とか持たせられないかということです。単純に考えたときにですね、先生方の脳裏に浮かんだ方もいらっしゃると思うんですけれども、コンピュータを使うということも1つの方法としてあるだろうと思います。もちろん先ほどのように（前半で使った四面体の展開図の模型を示す）、同じ四面体の問題でも紙の上だけで図を書いているのと実際に組み立ててみるのというのではちょっと違うと思います。コンピュータだけがいいわけではないんですけども、コンピュータも一つの手段としてあります。逆にコンピュータが新しいから使ったらいいとか、コンピュータがあるからとか今時だから使うというわけではないんです。私たちが数学の概念とか現象について子どもたちに手ざわり感を持たせるために使えるかということで考えていけばいいかなと思うんです。

ちょっといくつか事例を見て頂きたいと思います。コンピュータだけでなく手ざわり感の話なんですが、数列とか微積もそうですけど、微積も数列みたいなもんですが、数値的なアプローチをするということは手ざわり感を増やす部分があると思いますし、その際にコンピュータは役立ちますね。先ほど高校生で問題をじっと見て手を動かさないという人がいたと思うんですけど、実際にはうちの学生の中にもいて、私は数学教育だから大学の数学のことほとんど忘れたんですが、それでも一応教官だからといって学生の中には数学のゼミでわからないものを指導教官に聞けないから私のところに聞きに来る人がいるんです。そのとき見るとそういうことをしてないんですね。式がわからないとその状態でもう止まってしまっていて、「これ1のときとか2のときとか当てはめてやってみた？」というと、「やってない」と言って、「やってごらん」といってやると少しわかるんですけど、やはりそういうことをやらないである式を証明しなさいと言われると式をずーと見ているわけですよ、でわからないと決めているんです。数

値的なアプローチは、ある意味では一般的な式変形よりは手ざわり感があるのではないかと個人的には思っています。今日ご紹介するのは、高校の事例なら良かったんですが、先ほど言ったように高校から離れて久しいので、いま大学でやっていることです。大学といっても私がやる数学ですからそんなに高度ではないんですけど。例えば、授業で1つやるのは、円周率ですね。円周率は、小学校、中学校、高校とよく出てきますので、それがどうやって計算するのかという話をするわけです。先生方ご存じのように今(2003年8月の時点)の記録というのは東大の金田先生が昨年の12月に出された1兆2011億何千万桁ですけれども、それでもコンピュータでどうやってやるのかといったときに案外小中学校の先生でも知らない方が多いと思うんです。それをちょっと経験してもらおうとそういう話をするんですけど、当然これこれに収束だという話をすると、学生もわかりにくいし、わたしも正直これの収束をちゃんと証明しろと言われるとつらいです。そこで、グレゴリー=ライプニッツの公式 (1671年)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

を紹介して、一応公式がどうして出てくるかをアークタンジェントの式を使い多少ごまかしながらやった後で、エクセルで数値的に経験させます。これはエクセルでやったときの一部なんですけど一番右のE列のところに円周率の値が出てきます。実はエクセルのこともあまりわからないので、エクセルを普通の状態で使っていますと65,536行目で終わりでここから先はないんです。もうちょっと増やせるのかもしれませんが、普通はここまでしかないんです。ここまでやった状態で、グレゴリー=ライプニッツの公式でいくと奇数で一つ飛びにとりますから、だいたい13万分の1の項まで計算することになり、結果的に3.1415までしかこないんですね。そこからさきは、5まで決まらないんです。3.141までしか求まらなくてその下の桁は5,6,5,6とふれるんです。これを学生にやらせると面白いのは、私自身としては面倒くさいから100桁目かそこいらでどうせそこまでしか収束しないのでそこらでいいとなるんですけど、学生の中には面白がって、65,000ぐらいまで自分で勝手にやる人が出てきます。だからある意味では、自分でどんどん桁数を増やして計算するということで、まあコンピュータの上で動かしてはいるんですけど、先ほどの数列そのものに自分で働きかけるということが出来ます。それから、一方でこういう形で確かに3.141という自分が知っている値らしきものが求まる。同時に13万分の1ぐらいまで計算しても小数点以下3桁目でだめになるということで、大変収束が遅いということがわかります。収束が遅いとか早いという話は、円周率の展開公式の時に話題になるわけですけど、それを式の上だけでやってもなかなか感覚的にわからないんですけど、これでやると13万ぐらいまで計算してもこのくらいしか行かないんだということですね。すごく収束が遅いということを身をもって体験することが出来るということです。先ほどのグレゴリー=ライプニッツの公式そのものに対する手ざわり感が若干出来るんではないかなと思います。この後だいたいいつもマチンの公式をやります。アークタンジェントを2つ組み合わせたような式なんですけど、それでやるとこれよりはかなり早い収束で、50か60ぐらいのところで小数点以下10桁ぐらいまで決まってしまう。だからマチンをあわせてやると収束が遅いとか早いとかということがどういうことかを身をもって体験できるということになります。ちなみに金田先生の使われている式もアークタンジェントを4つ組み合わせたものですから、そんなに変わらないと言えば変わらないんですね。もちろんレベルは全然違いますけど、基本的な部分を経験してもらえるといいと思っています。詳しい先生は教えてください。あとエクセルを使うとすぐグラフに出来ます。これ（グラフ）は最初の分ですけど最初の200項でやってみるとこういう形で、収束するということを目で見ることが出来ます。数値をみてもいいですけどグラフで出してみると、振れながら、こうやって幅もだんだん小さくなっていることを見ることが出来ます。収束するということが単にある一定の値に近づくということだけでなくて、視覚的なイメージとして感じることが出来るということです。また、先ほどの後の方で収束しないということについても、これは、先ほどの最後の13万いくつのところなんですけども、グラフにしてみるとこういう形で振動しています。だから振動してなかなかこう一定の値にならな

いというのを視覚的に見ることが出来るかと思います。

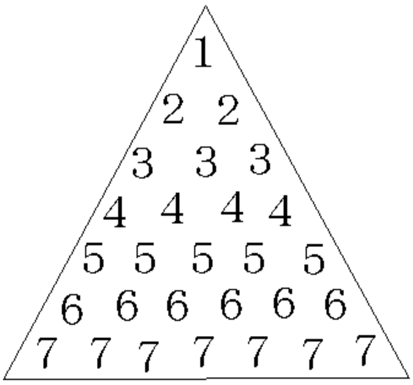
こういう感じで数値的なアプローチをすると、普通は２のｎ乗とか 1/n というふうに扱っているものにある程度手ざわり感が出てくるんじゃないかと期待しているんです。実際に同じようなことを高校でされた先生がいらっしゃいます。これは仲本正夫先生の原稿（仲本, 1995) にあったものです。これは（図）、見ればわかりますけど２のｎ乗を子どもに書かせたものなんです。この子の場合は、木から下がった毛虫をモチーフにして２のｎ乗を書いていて、左上が０乗で１乗、２乗、３乗といって最後が 11 乗なんですが、そこまで行くとこうなってしまうということで、急速に黒くなっていくという状況がわかります。これによって指数関数というのが急速に増えていくという状況を経験させるというのが、１つ仲本先生のねらいではないかと思います。これによって２のｎ乗を式で書いてしまうとなかなか感覚がわからないんですけど、自分の手で２のｎ乗を書いてみることでこんなにすごいんだということがわかる。実は仲本先生の授業には、次があります。ドラえもんでバイバインという薬を出す回があるんです。栗まんじゅうがあってそれが１つしかないのでのび太とドラえもんがけんかになって、バイバインで増やすんです。バイバインという薬はその名前の通り何分かたつと２倍になっていく薬なんです。最初は食べてるんだけど、いつものごとくおなかがいっぱいになってのび太がいい加減で逃げてしまって、しょうがないからと言って、その余った分をドラえもんが風呂敷に包んでロケットでとばして宇宙に戻してとりあえず一件落着という話です。仲本先生はそれを逆手にとって、２のｎ乗で本当に計算すると１日か２日で宇宙全体が栗まんじゅうみたいになってしまうらしいんです。私もちょっと自分で計算してないんですけど、引用文献の「現実の世界を読みとる数学」によると、そういう形になるのだそうです。そういう形でドラえもんの話と結びつけながら、バイバインつまり２のｎ乗がどういう意味か、どう急速になるか、さらに数学的に見るとドラえもんの結末は、実はおかしいということがわかってくる。そういう意味では、子どもたちに手ざわり感を持たせる工夫として仲本先生の実践も見ていけるのではないかと思います。

もう一つ数学的アイデアや概念を直観的に捉える試みとして、三角比をあつかった実践を紹介したいと思います。近藤さんというのは、うちの大学院を 2003 年３月に修了した方です。近藤先生が修論で扱われて、実際に工業高校でも授業をされた課題の一つは、学校の中で一番急な階段、緩やかな階段はどこかを探してみよう、ということでした。私たちからすると、角度なり、せっかく高校で三角比を知っていますから三角比でやればいいじゃないかと思うんですけど、生徒がどうやって比べるかというと、三角比じゃないものが出てきて、例えば段差が大きいか小さいかで決めると考える。実際自分が階段を上ることを考えると段差が大きい方が急な感じがするわけですよね。それから体の感覚で急かどうか、横と高さの引き算をして比べるなどといろいろ出てきます。三角比を学習している高校生なんですが、余り三角比を使うというのが出ません。タンジェントを使う人もいるんですけど結局タンジェントの値から角度を求めてしまいますので、タンジェントそのものが角度を比べる道具に余りなっていないんです。結局近藤先生は紙の階段の模型を作らせて、それについてもう一度自分たちの比べ方で本当に比べられるかということをいろいろ測定してまとめています。その中で小グループで話し合わせています。横ひく縦だと同じ角度なのに違うことがあるなど、いつでも使えそうな考えとか成り立たない考えとかをだんだん分けていきます。その中で角度と辺の比という形の三角比というものをもう一度捉えなおしていくということが見られるように思います。ですから、階段というものを素材にしながら、階段が急か緩やかかという話と三角比の話を結びつけていくことで、結果的に三角比あるいは傾きというものを体の感じと結びつけながら捉えなおしていく。言い換えれば三角比の手ざわり感というものを増やす実践になっているのではないかなと思います。

今ご紹介したのは、三角比とか、級数という形の数学的なアイデアそのものをやっているのですが、問題場面で起こっていることを、手ざわり感をもって捉えるという実践がありましたのでそれを見ていきたいと思います。これは高校でよく出てくる平方の和の公式ですね。公式を見つける際に、教科書によって違うのかもし

れませんけど、階差をとって式変形をうまくやって真であるその公式が正しいという証明があるかと思います。場合によっては、結構２乗の和という数列そのものの性質とその級数の和の公式というのがなかなかこう結びつかないという部分があるかと思うんです。実際自分もいざ何も見ないで証明してみようといわれると案外ちょっとつらいのですけど。

これに対して増島先生という高校の先生が書かれた扱いがあります（増島, 2001)。私自身が知らなかっただけなのかもしれませんが、大変面白いと思うんですけど、この平方の和をこういうふうに読み替えるんです。



12+22+32+・・・+n2
＝1+(2+2)+(3+3+3)+…+(n+n+…+n)

これをこういう三角形に並べ替えたんです。これを 120 度と 240 度回転させたものを用意して重ね合わせると和の公式が出るということなんですが、この証明の仕方もある意味では、数列の性質からどうしてそういう和が出てくるかということが、垣間見えるように思います。つまり先ほどの説明する証明ではないですが、数列の性質と、こういう形で和が求められるという起こっている現象とを、ある程度結びつけている形の証明になっていますから、教科書等にやられている一般性のある証明と比べると、確かに素朴で一般的にしにくい部分がありますけど、何が起こっているかという観点で見ていくぶんには、かえってこちらの方がわかりやすい面もあるんじゃないかということですね。問題場面についての手ざわり感というものをもちながら証明していく実践というふうに見ていくことが出来ると思います。

問題場面で何が起こっているのかを理解するといったときに、先ほど理解するためには働きかけるということがありましたから、同じように考えると問題場面に対して働きかけるということで理解が深まるということも考えられます。

ここに持ってきましたのは、今日は午後から確率ということで、コンピュータを使ったイカサマさいころについての確率の実験を考えてみました (Pratt, 1988)。普段と形と違い、確率そのものの起こっている元の場面の条件を生徒が変え、生じる確率を変えることができるようになっており、ある意味で問題場面への働きかけになっているんではないでしょうか。同じような形でいくとですね、グラフについての働きかけが考えられます。これはソフトがよくあるので先生方で使われる方もおられると思うんですけど、これはグラフを書くソフトで EasyGraph（浜田昌宏氏制作）というものです。このソフトで個人的に好きなのは、下の部分にバーがあるんですけど、これでパラメータを自分で動かすことが出来るんです。このバーを自分で動かすとそれに伴ってグラフがこう動くということですね。他のソフトでも似た様なものがあるかもしれませんが、これは一番直接的に自分でグラフを動かしているという感覚を持てるソフトだと思います。例えばちょっとバーを動かしてみるとグラフがこういうふうに動く、それに伴った動きをする。だから子どもが、自分でグラフを動かすことが出来るということになります。グラフを１つの問題場面というふうに思うと、問題場面に対する手ざわり感を持たせるためにパソコンが使えたという形になるのではないかと思うんです。ちなみに EasyGraph は後ろに書いておいたんですけどフリーですのでもし良かったら使ってみてください。

ちょっと時間がなくなってきたので、最後に間接的なアプローチについて簡単に話をして終わりにしたいと思います。今までのものというのは、数学の対象とか数学的な現象とかそういうものに直接働きかけたり、それの理解とか手ざわり感が増すようにしようという話だったんですけれども、なかなかそれが出来ない場合もあるかと思います。たとえば、自動車でもコンピュータでもそうですけど、中の仕組みはわからなくてもそれを使ってこんな事が出来るとか、メールを使ってこんな事が出来るとか、車があればこういうところに行けるということで毎日使っているとなんとなくそれに対する手ざわり

感が増すと思うんですね、仕組みがわからなくても。それと同じようなことで、数学というものも数学とは別な文脈から迫ってみることで手ざわり感が増すことがあるのではないかということです。それで何が出来るのかなということも対象に対する理解の一部というふうに考えて、それを感じる機会も提供できないかということなんです。これについてもいろいろ実践をすでにされている先生方もいらっしゃるかもしれませんが、教科書などを見ると案外高校の教科書には、そうした機会が少ないかなとも思います。ただ、数学基礎の教科書というのは、逆にそういうものが満載です。ありすぎても問題かとは思うんですが、そのバランスがうまくとれていることは大切だと思うんです。たとえば、これは有名かもしれませんが、等差数列に関わる課題で、勝野先生という高校の数学の先生がされたもので、トイレットペーパーの巻いてある分をほどくという課題です（勝野ほか, 1991）。1巻き目と2巻き目と3巻き目というのをそれぞれの長さが等差数列になると考えて、全体の紙の長さは1巻き目たす2巻き目たす3巻き目ですから等差数列の和になるという形で見ていくんです。そうすると全体の長さは、こういう形で初項（1巻き目の長さ）と末項（一番外側の1巻きの長さ）とを足して項数を掛けて2で割るという形で表されます。だいたいトイレットペーパーを見ますと、外側に長さが書いてありますから、全体の長さを代入してあと内側と外側の半径がわかると巻き数が計算できるということになるんです。こういうことで等差数列というものを現実の場面で使っていくことが出来るという実践なんです。この実践で私自身すごいなと思うのは、ここまではやると思うんです、ここまではわれわれも授業で時々やったりしますよね。この先生の偉いのは、実際にほどくんですよ、子どもたちの前で1回2回とトイレットペーパーをほどいて見せるんですよ。実際は表示には約何mと書いてあるのでぴったりになることはなかなかないかもしれないですけど、たまたまこの先生がされたときはぴったりだったらしくて、そうすると生徒からも歓声が上がったということですね。先ず数学でやって見せて、予想値をたてて、それを今度は実際に巻き取って確かめるということは、出来そうでなかなか普通しないなと思って、本当に偉いなと思うんです。しかしこれを実際やらないと数学苦手な子ほどやっぱりそうなのという感じで終わってしまう。数学苦手な子でもトイレットペーパーを巻き取るのは数えられますから、数学なんてそんなもの役に立たないと思っていたものが、実はトイレットペーパーの巻き数が本当に求められたという感覚がそこで先ず出来るんではないかということなんですね。だから数列の和というもの自体が巻き数と結びついて、数列の和というものが自分のよく知っているトイレットペーパーとかなり関係あるということになると間接的に数列の和というものが身近なものになるという部分があるんではないかということです。また同時に数列の和というものが教科書の定義だけでは、確かに書いてあるとおりなのですが、なかなかそれだけではイメージが広がりにくいと思うんです。しかし今のような事例で等差数列の和が使われたということになると、あんなことなのかということで、トイレットペーパーを巻いてだんだん太くなっていくというイメージで等差数列を見ていくという子が出てくるかもしれないですね。その意味で等差数列の和のイメージとして広がってって、それによって等差数列に関わって間接的にですけれど手ざわり感が出てくるということがあるのではないかということです（*cf.* 布川, 1999）。

もう一つ確率からの事例を持ってきたんですけど、確率と言語は近いか遠いかという話なのです。数理系工学の本を読まれた方は、ご存じだと思うんですが、実はこういうことがあるんです。私自身が見たのは、安本美典という人の本（安本, 1995) の中に書いてあったものですけど、実は安本先生にいわせるとこういうやり方を最初に提唱したのは先ほどのポリアだろうという話です。ポリアは先ほどいいましたように数学者なんですけど言語学に数学を使ったらどうかと提案した最初の研究者のひとりだと安本先生は書いています。安本先生は元々統計を使って言語が近い遠いを調べたり、卑弥呼が何年生きたかを調べたりといった研究をされている方なので、そういう方面の専門家だと思われますが、そういうふうに書いておられます。その安本先生の本にしたがってご紹介すると、ヨーロッパの10の言語を持ってきてそれの1から10までの数詞を書きます。リーグ表みたいにして書いて頂いて、たとえば英語とスウェーデン語と

では、10 個の数詞のうち頭の文字がいくつ一致するかを数えます。例えば、英語とフランス語をやったとすると 9 は、英語で nine フランス語で neuf で n で一緒だから 1 つというふうに数え、それぞれの言語でいくつ一致するかを数えていきます。それだけ比べて確率を使って考察していくと結局ハンガリー語だけが違うという結果が出てきて、それが言語学の見解と一致するのです。そういうところから偶然性の検証ということで確率のイメージが広がるということです。検証というと検定みたいな話になるので高校ではなかなか使いにくいところもあるんですが、ただ、逆に確率をせっかくやるのだから、そういう方向にイメージが広がるということも大切なことではないかということなんです。使っていく中でそういうことでも確率のイメージが広がればということです。

3. まとめ

もう時間になりましたので、最後にこれで終わりにいたします。いろいろお話してきたんですが、問題解決の話の延長として数学学習を考えたときに数学的な対象や現象についての何らかの形での「手ざわり感」、それは直接的であるかもしれないし、間接的であるかもしれないんですけれども「手ざわり感」ということを、生徒が高めることが出来るような機会なり工夫が私たちの側で提供できるといいなと考えます。また、対象や現象への理解を深める際に、それらへの働きかけと理解とが相互作用的に徐々に進むという経験もできればと思います。こうした経験を通して、数学に対する生徒の感じ方も少し変わってくるのではないかと期待しています。これからも先生方と情報交換をさせて頂ければと思います。以上で終わりたいと思います。

引用文献

Hanna, G. (1996). 学校教育における証明の役割 (磯野正人訳). 上越数学教育研究, *11*, 155-168.

勝野元薫, 川西徳弘ほか. (1991, 2 月). 高校授業研究：トイレットペーパーと数楽. 数学教室, *471*, 9-44.

近藤浩一. (2003). 高等学校における数学授業の改善に関する研究. 上越数学教育研究, *18*, 89-100.
（http://www.juen.ac.jp/math/journal/content18.htm）

増島高敬. (2001). 数学バンザイ！：高校生が学びたくなる質の高い数学を. ふきのとう書房.

仲本正夫. (1995). 現実の世界を読みとる数学. 竹内常一ほか (編著), 講座高校教育改革：学びの復権－授業改革 (pp. 93-111). 労働旬報社.

布川和彦. (1995). 数学的問題解決における物理的モデルの役割：四面体の問題についての解決過程の分析から. 上越数学教育研究, *10*, 11-20.

布川和彦. (1999). 算数・数学の授業における意外性：解決過程の図式を視点として. 上越数学教育研究, *14*, 11-20. (http://www.juen.ac.jp/math/journal/files/igaisei.PDF)

ポリア, G. (1954). いかにして問題をとくか (柿内賢信訳). 丸善.

Pratt, D. (1998). The co-ordination of meanings for randomness. *For the Learning of Mathematics*,,.

庄義和, 幸田芳則. (2002). 灘中の数学学習法. 生活人新書.

竹内英人. (2001). なぜ数学を学ぶのか. 岩波ジュニア新書.

安本美典. (1995). 言語の科学：日本語の起源をたずねる. 朝倉書店.

（記録：鳥取大学　齋尾昌之）