講演記録【鳥取大学数学教育研究，第６号，2004】

「構想力」の養成と数学科授業

講演者：山本信也　熊本大学教育学部

はじめに

今日は，大きくまとめると２つの話をさせていただこうと思います。キーワードは、①「構想力」の養成、②「本質的学習場」のデザイン、ということです。①はＰ．トロイトライン(P. Treutlein, 1845-1912)、②はＥ． ヴィットマン（E. Ch. Wittman,1939-）が提唱したものです。これは授業に児童生徒の学習活動場を提供し，それを通して授業を展開しようという発想です。ここで「本質的」というのは，簡単に言うと「数学的な内容を含んでいる」ということです。数学の学習が達成される場を作り，それを子どもたちに提供していこうという考え方です。それをどういうふうにして計画を立てていくかがここでの問題となります。言い換えると「本質的学習場」をデザインすることが数学教育研究であり，ヴィットマンは，数学教育学を一種の「デザイン科学」と考えています。どちらもドイツの人なのですが、トロイトラインが活躍したのが約 100 年前です。ヴィットマンのほうは，現在ドイツを中心に活躍している数学教育学研究者の一人です。①はどちらかというと目標に関わる部分、②は方法に関わる部分と捉えてもらえれば把握しやすいかと思います。

Ｉ．トロイトラインの図形指導と現在

１．現在の図形指導とトロイトライン

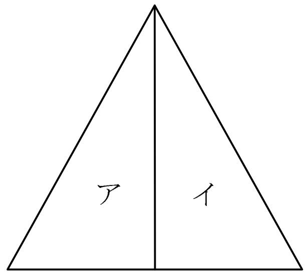
トロイトラインは 100 年前に活躍したドイツのギムナジウム（現在の日本で言えば，小学校５年生から大学１年程度のまでの９年制中等学校）の数学教師です。なぜ、この人に注目して研究するようになったかというと、だいぶん前にさかのぼるのですが、小学校・中学校の９年間の図形指導に対して疑問に思うことがありました。小学校で算数と言えばすぐに計算、基礎学力＝計算、だから一般の方々の小学校に対する見方というのは，計算力が算数を通して習得されれば十分だという見方だと思います。確かに計算力が重要であることは疑いません。ですが、図形の学習も小学校にあります。また中学校では証明を主とする図形の学習があります。数と計算の指導だけではないのです。そこで，最初に抱いた素朴な疑問というのは，なぜ小学校において図形指導があるのだろうか，ということでした．この疑問を解決するために，現在のような図形指導の始まりはいつなのかを歴史的に調べていくことを考えました。具体的に言えば，小学校では平面図形だけではありません。立体図形も一緒に組み合わせながら小学校１年生、低学年でもちゃんと学習しますし、小学校を通して，三角形、四角形、正方形、長方形、正三角形、平行四辺形、等々いろいろな図形を学習していきます。そのような学習をするようになったのは何がきかっけなのかという問題が，私がトロイトラインに行き着くきっかけでした。これを探していくと戦前まで行き着くのです。戦前の、今から 70,80 年前に国元東九郎という人が大正 14 年（1925）に『直観幾何教授の理論と実際』を書いています。これは今までの図形指導とはまったく違うのです。どこが違うかというと、立体から入るのです。立体をベースにしながら平面図形を引き出して勉強する。そして、また立体に返す。それを３年間で授業をしている資料が見つかりました。これが最初だと思っていたら、よく調べてみるとこの指導はドイツのトロイトラインが行った指導を日本に移植しているということが分かりました。要するに，大正時代にこのトロイトラインの図形指導が日本に影響を与え，国元東九郎を介して現在の小学校・中学校の図形指導に間接的に影響を与えていることが分かったわけです．それからトロイトラインを調べ始めました。トロイトラインの図形指導を調べてみると，現在の小学校・中学校の図形指導は，トロイトラインの図形指導と基本的に違うところもあるように思えてきました．トロイトラインは，「構想力を養成すること」が数学の学習で極めて重要だという前提に立って図形指導を行っていたということが分かりました。そこには,「構想力」と数学の学習との関連

を述べたＦ．ヘルバルト（J. F. Herbart , 1776-1841）の考え方が見られます。実際，ヘルバルトの 1803 年の論文の中で,「数学の学習では，構想力と推理能力の２つが欠かせない」という考え方が書かれています。結局は，トロイトラインの図形指導の底流には，200 年前のフランス革命後の教育に対する期待や課題が流れていることが徐々に分かってきました。そこでまず，トロイトラインの図形指導から話を始めたいと思います。

２．20 世紀初頭ドイツの学校制度と「幾何学的直観教授」

トロイトライン図形指導の中に「新図形の構成」と呼ばれる問題があります。

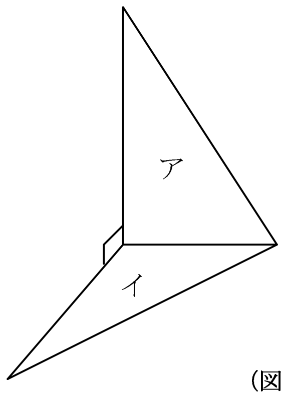
【問題１】
正三角形から、２つの直角三角形を作ります。同じ長さの辺同士をくっつけて形を作ります。どんな形がいくつできますか。全部作りましょう。最初の形を正方形にするとどうなりますか。



これは，合同な２つの直角三角形を使ってできる図形は全部で何種類かという問題です．実際作ってみると，最初の正三角形を含めて全部で６種類になります。これがすぐに６種類と答えられることは「構想力」の力があるということなのですが，この言葉についてはあとで説明します。中にはすぐに６種類とすぐに作れない生徒もいると思います。これを私のところの大学生でも全員が「６種類」とすぐには答えられません。ある時，ある学生から，実は，６種類ではなく９種類あるのではないかという指摘を受けました。実は，私も学生から言われてびっくりしたのですが、６種類というのは重なり合う場合を数えていないと言うのです。でも、重なる場合を含めるとたしかに９種類になります。ところがもう１種類あるのではないか、つまり、ぴったり重なる場合がある。全部で 10 種類あるという答えもありえます。この問題をもとに小学校２年生に対して授業を附属小学校の先生と開発し実践しました。また，小学校２年生はすごいですね。ぼくらが考えないことを考えるのです。クラスが９種類とまとまった時、さらに「まだできる」と言い出した子どもがいました。その子は、直角に交わる立体図形を作るとまだあると言い出したのです (図１)．彼らの発想はすごいですね。私たちは平面図形だけしか考えてなかったのですが，子どもたちは立体図形も考えたのです。

僕たちが平面だけに限定して考えてしまっていたことをその子から教えてもらいました。トロイトラインの図形指導にはこのような問題があったのですが，大正期の日本の数学の先生方はこの問題を，自分たちの図形指導に取り入れませんでした。

トロイトラインは，この問題をなぜ，図形指導に取り入れたのか？まずはこれが重要です。トロイトラインは，この問題を小学校５年程度の子どもたちの問題として位置づけました。当時ドイツの学校制度では，小学校５年というのは９年制のギムナジウム（大学進学を目指す生徒が通う学校）の最初の学年に当たります。これから本格的に数学を学ぶことになる生徒にとって，この問題はどのような意義をもつとトロイトラインは考えたのでしょうか？



（図１）

Ⅱ．トロイトラインの図形指導の実践

１．「新図形の構成」（学齢５年生の課題）

そこで，この【問題１】の意図は何だったのでしょうか？

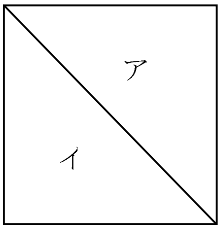
①自ら図形を作る機会の提供

この問題で重要なのは「すべて上げる」という言葉です。「できるだけすべて、これだけしかない」という部分を必ず子どもに意識させるということです。この問題を実際に授業でするときに、図で書くだけで考える場合と、たくさんの紙を切って与えて考えていく場合とでは学習者の側からすると負担が全然違うのです。トロイトラインの場合は、生徒たちにせいぜい１組の合同な直角三角形を持たせてこの問題に取り組ませていました。現在は，どちらかというと小学校・中学校の授業では「子どもたちに道具は自由に何でも使いなさい」という雰囲気を感じますが，それとは違っていると思います。トロイトラインの場合いくぶん生徒に負荷をかけて問題に取り組ませているように思います。その際トロイトラインが大切にしたのは，子ども自身で考えるということです。「生徒が自分で作った図形はかけがえのない自分の財産になる」という考え方でした。算数でも数学でも何か一つ自分達が導き出した解答や解き方に対するよい体験、そのときにしかできないよい体験が必ずあると思いますが，作る体験を重要視したのがトロイトラインでした。

②「平行移動」・「回転移動」・「対称移動」の体験

この課題の第２番目の意義は，「平行移動」「回転移動」「対称移動」を実際に体験させるということです。正三角形から作った２つの合同な直角三角形を使って図形を作る場合と，正方形を半分にして作った２つの合同な直角三角形で図形を作る場合とでは，できる図形の種類が違ってきます。（図２）。問題の正三角形を正方形に変えると、図形の種類は違ってきます。正方形からできる直角三角形は直角二等辺三角形になります。それらは線対称ですから裏返す、裏返さないが明確に現れない。正三角形の場合は裏返すと、はっきりと違いが現れる。だから正三角形の場合は６種類になるのです。子どもたちに対称移動を意識させることがこの問題で意図されています。そして、非対称・非線形の２つの合同な三角形を２つ作ってできる問題を与えて、できる図形の種類に違いがある。それはどうしてなのかという発問がトロイトラインの本には載っています。

図２）



③「構想力」の養成

最後に,「構想力」の養成を早くから行おうという意図がもう一つのねらいでした。教具は最小限にとどめたり，また何かを作る喜びを与えたり，いろいろな動きを体験させることはいろいろな場合でできるでしょうが，この問題を通してトロイトラインが意図したのは「構想力」の養成という点でした。これは，また後ほど説明したいと思いますが，簡単にいうと想像する力を育てるということです。彼は，念頭で図形を動かしたり、変形したりする力は、これから数学を学習する上でも、社会生活をおくる上でも必要な力だと考えました。このような想像する力というのは，教育を通して養成できる力であり，それを図形の勉強を通して育成していこうというのが，彼にとっての大きなポイントです。ですから、教具を最小限にして問題に取り組ませる。もちろん子どもたちにもよりますが、子どもたちの状況に応じて，教具の与え方は決めていくわけです。

トロイトラインにある「新図形の構成」という問題を，大正期の日本の数学の先生方は取り入れませんでした。この問題は立体図形の学習というより，むしろ平面図形の学習に関わる問題です。トロイトラインはどちらかというと立体図形の指導のあり方が日本では参考にされた向きがあります。実は，今回の新しい学習指導要領の改訂で中学校では立体の「切断」が削除されましたが、それは，トロイトラインを大いに参考にした国元東九郎という人が，トロイトラインの指導をもとに「切断」を立体図形の指導に学習活動として取り入れたのです。そして国元はトロイトラインよりもそれに非常にこだわったのです。おそらく、この影響で、立体の図形の指導には切断面を考えさせるという学習が日本で定着したのではないでしょうか？学習指導要領では一昨年削除されましたが、立体図形の切断の指導を学校の中に背景的に取り入れたのはこの国元だったのです。

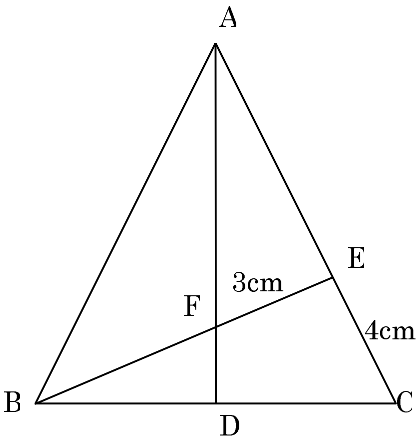
２．「暗幾何」＝図形の念頭操作の重視

次にトロイトラインの図形指導で注目したいのは,「暗幾何」です。「暗幾何」というのは,「暗算」に対応します。つまり、「暗算」は、紙と鉛筆を使わないで頭の中で計算をします。「暗幾何」とは紙と鉛筆を使わないで頭の中で図形の問題を解くということです。これも「構成力」の養成と密接な関係があります。図形の指導の目的をどう考えるかと言ったときに、ひとつは「論理的に考える力を育てる」があります。それはトロイトラインに

とっても重要な目的であります。もう一つの目的はこの「暗幾何」なのです。先程の「新図形の構成」も暗幾何と言えば、暗幾何なのです。問題１の場合，三角形には辺が３つあって，それぞれに組み合わせ方が２種類ある、だから３×２の計算によって全部で６種類と答えることができますが，頭の中で三角形を動かしながら，一つ一つ想像しながら，新しい図形を作っていくことも，「暗幾何」になります。

数学の授業でも、単に図形の問題を解くだけではなくて、紙と鉛筆を使わないで図形の問題を解くという場面設定ができるのではないかと思っています。

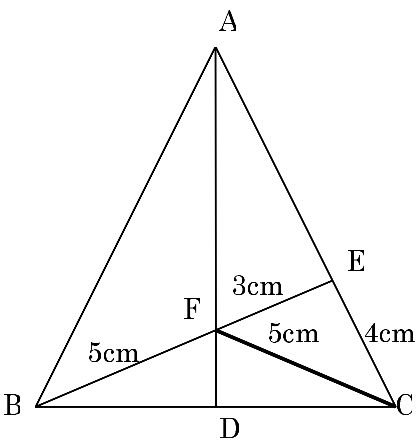
例えば次のような中学校３年生の問題です。



【問題２】
右の図のように AB＝AC となる△ABC がある。A,B からそれぞれ垂線を引き、BC,AC との交点をそれぞれ、D,E とする。また、AD と BE の交点を F とする。
EF＝3cm,EC＝4cm のとき、AE の長さを求めなさい。

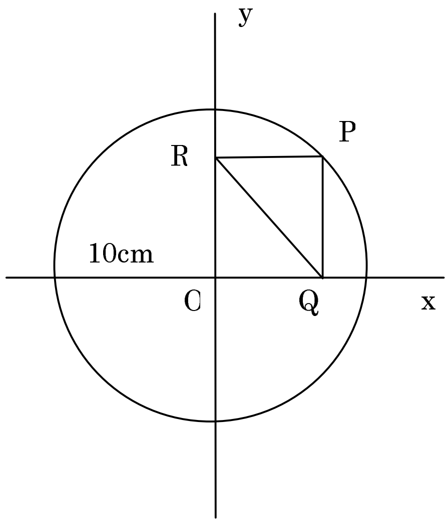
これは，中学校３年生の教科書、最後の問題に出てきます。この図を見て，どれとどれが相似三角形であるかということを思い浮かべられるかがポイントです。これが構想力です。AE を求める計算は大変簡単です。小学校２年生の足し算と２の段の九九が分かればできます。答は整数値になります。以前私の大学の講義でこの問題を黒板にかいて約 200 人の学生にさせたことがあります。黒板に穴があくのではないかと思うぐらいの黒板に集中します。その間，おしゃべりをする学生は全くいません。しばらくすると，答えを見つけた学生はうれしそうにそわそわしだします。ただ問題を与えるよりも暗幾何でやらせると集中力が全く違います。

この問題は少し難しい問題なのですが，学生の中で誰か正解すると，他の学生が「すごい」と言って自然と拍手が起こったりします。



三平方の定理から FC＝5cm
また、△BCF が二等辺三角形になるから BC=FC＝5cm
また、△BDF≡△DCF
△　BCE∽△BDF∽△AEF より
BE : EC=BD : DF
　　　=AE : FE=2 : 1
よって AE=3×2＝6cm

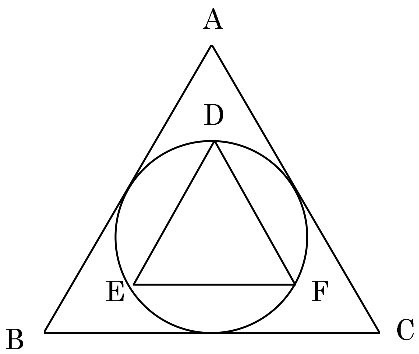
もう１問。これは中学校３年生の三平方の定理が終わったあたりで出題すると大変盛り上がる問題です。実際は三平方の定理は使わないでも解けます。



【問題３】
右の図のように、点 P が半径 10cm の円周上を動いている。ある点で止まったとき、点 P から x 軸、y 軸へそれぞれ垂線 PQ、PR を引く。PR の長さを求めなさい。

この問題で x, y と使ったら大変なことになります。これは暗幾何でやらないと大変なことになります。小学生でも大丈夫です。OP を結べば長方形の対角線で OP=QR ですから 10cm です。時々生徒の中に計算はできないけれど感覚の鋭い子、そういう生徒が活性化する問題ですね。

小学校生向けの問題を紹介します。



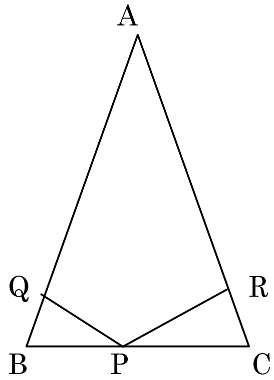
【問題４】
左の図のように、正三角形 ABC に内接円をかく。さらに BC//EF となるように正三角形 DEF をかく。
正三角形 ABC は正三角形 DEF の何倍か？

図形の学習指導で重要なことは,「図」と「図形」は明らかに別物であるというとらえ方です。つまり「図」は動かないです。いっさい動きません。しかし,「図形」は動くことができます。図形のこのようなとらえ方を「図形の可動性」と呼んでおきましょう。この問題の場合、三角形 DEF を円周上で回転させればよいのですね。これをイメージできるかどうかです。そのまま頂点 A の方向でも頂点 B の方向でも移動していいのです。もちろん回転させてもいいのです。それでもかまいません。「図形」は動きます。動きが変えられます。しかし、「図」は動きません。図が動いたら大変なことです。あくまでも「図」は表す物で、「図形」は表される物です。同じ事が「数字」と「数」についても言えます。「数」と「数字」は全く違います。学生に「33 の中に 3 はいくつありますか？」と質問します。学生は 11 と答えます。でも２つということもある、と言います。数のレベルからすると 11 ですが、数字として数えると２つです。

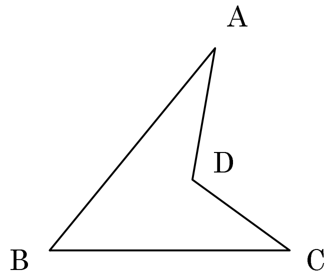
図形の学習でもう一つ重要なのは「非現実性」ということです。どういうことかというと,**【問題３】**の円の半径を求めなさいという問題で，それが１０ｃｍと我々が把握したのは，現実にはない線をその図にかき加えたからです。補助線を入れるというのはまさに与えられた現実とは異なる現実をつくるということになります。現実はかかれていない図を思い浮かべられということ、図をイメージできること、動かない物を動かすことが図形の学習には必要になります。トロイトラインは図形に対するこのような性質を大切にしようとしました。ですから，生徒が暗幾何で図形の問題が解けるレベルまで生徒を高めるべきだと主張しま

した。
　しかし、生徒は放っておくと図形は動かないから固定的に見てしまいがちになります。だって、教科書の図は動かないですからね。動かない物ばかり見ているわけです。そうすると教師は図形が動く物だと思っているけれど、生徒は図形を動かない固定的なものと見てしまいがちになる。そのためにはどうするか、トロイトラインは次のような工夫が図形指導では大切だと言っています。
①図形の各要素を動かすこと（図形の可変性）
　これは，できるだけ図形の各要素を動かすような問題設定をせよということです。考えてみるとよく教科書にも載っているのですが、**【問題５】**は点Ｐが動く。点Ｐが動いたときにPQとPRについてどんなことがいえるか。動かして考えて和が一定になることを示す問題です。点Ｐと言うのは本来動いているのだけれども止まっている図ですね。止まっている物が動くのではなくて、本来動いている。その時、写真を撮ったときにピタッと止まっている。そういう考え方がまず図形の図の各要素を動かしていくという考え方です。そういう機会を設けなさいということです。

【問題５】
二等辺三角形ABCにおいて、PO、PRをそれぞれ点Ｐから直線AC､ABへの垂線とすると､PQ、PRについてどんなことがいえますか｡点Ｐの位置をいろいろと変えて考えてみましょう｡(中２）

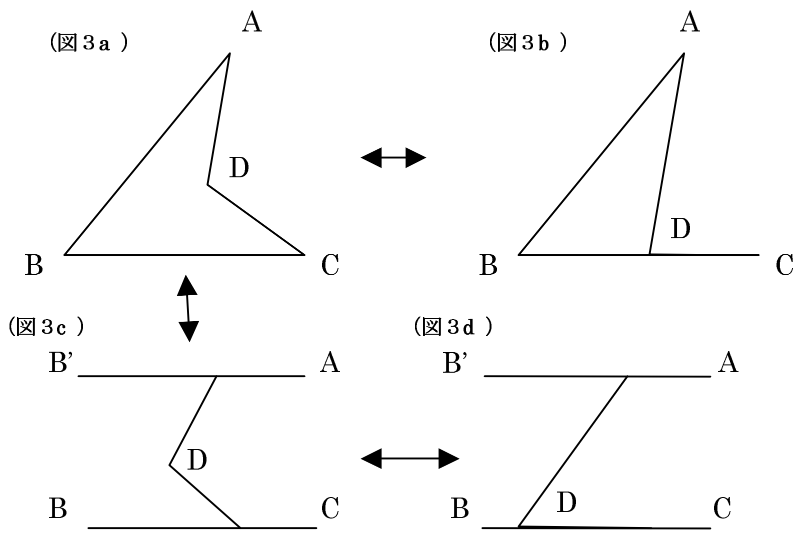


②極端な場合を考えること（図形の非現実性）
これは,図形を非現実的に考えよということです。
次の問題は，凹四角形の内角の和の問題です。



【問題６】
四角形ABCDにおいて、
$$\angle ADC = \angle A + \angle B + \angle C$$
が成り立つ。このことをいろいろな方法で証明せよ。(中２）

この問題では、いろいろな証明ができます。いろいろな証明を考えること自体大変すばらしいことです。ただ、点Ｐを三角形の内部にあると言うだけで問題が設定されていますけれども、点Ｐが動いたとしたらどうなるか。数学の角度の問題のいろいろな関係を見つけさせるのに大変おもしろい問題になります。極端な場合を考えると点DがBC上にきたら∠ADCは△ABDの外角になります（図3b)。ひとつの外角はその隣にない内角の和に等しいという定理になります。(図 3a）ではABとBCが交わっていますが、これが平行だったとすると、（図３ｃ）になります。逆に（図３ｃ）から平行線が交わって(図３a)のようになったらどうなるか、を考えてもよいですね。さらに、点DがBC上に動けば（図３d)、錯角の関係になります。



非常に極端な場合を考えていくと，最後には特殊・一般の考え方で，もとの問題がとらえられるようになります。特殊な場合や極端な場合を考えるというのはまさに危機管理だと思います。最近の話題にニューヨークで 24 時間停電になるということがありましたがびっくりしました。誰も想像しなかったのではないでしょうか。電気はいつも来るものだと考えている人は，もし停電になったらとかは考えないでしょう。それと同じように，この問題で辺 AB と辺 BC が交わっていると現実的にしか考えない人は，辺 AB と辺 BC がもし平行になったらというような極端な場合を考えるということはないでしょう。数学の学習の場合，非現実的に考えると別なつながりが見えてくる。数学は世間と全く関係がないわけではなくて、私は一つ一つが関連している気がするのです。極端な場合を考えることで，そのような極端な場合を考える機会を提供することができそうです。

③平面及び空間内で図形全体の運動を考えること（図形の可動性）

図形は動くという発想を常にすべきだというのがトロイトラインでした。まさに【問題１】がそうなのですね。図形は動かせるという発想が図形の可動性ということです。｢運動を考える｣ときに、図形の学習の場合にどうしても欠かせないのが、中学校・高校でも同じですけれども、いわゆる平行移動、回転移動、対称移動、つまり合同変換で重ねれば同じというとらえ方です。２つの図形は「合同」であれば２つの図形は同じというとらえ方が図形の学習の基本になります。この場合，平行移動、回転移動までは平面上で可能ですが,【問題２】になると、図形を裏返しにすること（対称移動）が必要となります。そして相似な２つの図形の対応関係をうまく付けて問題を解くことが必要になります。これができないとこの問題は解けません。問題が解けない生徒には，図形を動かす練習をさせることが必要だと思います。その方法として暗幾何をできるだけ授業の中に取り入れていくことが必要かも知れません。

図形を動かない固定的なものと見てしまいがちになる生徒に対する工夫としてトロイトラインが挙げたのは，以上３つの事柄でした。それぞれキーワードは図形の「可変性」、「可動性」、「非現実性」になるかと思います。算数や数学の図形の指導で議論されているように、論理的な思考能力を高める、証明をどうするかという問題も大切だと思いますが，これと同様，図形に対する見方を豊かにすることも大切だと思います。

Ⅲ. トロイトラインの「幾何学的直観教授」と「構想力」

１. ヘルバルト(J. f. Herbart, 1776-1841)の「構想力」(die Einbildungskraft)

最初に言った「構想力」という言葉はもともと、３つの言葉からできています。Ein「内」、bildung「形つくる」、kraft「力」です。日本では構想というのは何か計画を立てる、企画を練るとかそういう意味として使われていますが、この原語の意味は「頭の中に何かを作り出す力」という意味です。【問題２】において、図形の中に補助線が描けるかどうか。FC が引ける人は構想力が強いということになります。瞬時にできるかどうかで構想力があるか，ないか，またその程度はどうかが分か

るようになると思います。そこの言葉に私が出会ったのは，トロイトラインでした。そして，それは誰が使った言葉なのかを探していったら，ある文献に出会いました。それがヘルバルトでした。皆さんの中にはヘルバルトを教育学者として聞いたことのある方は多いと思いますが，この人はけっこう数学を勉強していて、数学の学習には２つの力が必要であるということを言っています。その一つが「推論能力」いわゆる、これが論理的思考能力に対応します。もうひとつが「構想力」であると考えるわけです。実際に書いてある文章を引用してみましょう。

> 「数学の学習では、論理的思考と同じように構想力が働いている。まだ証明に達し得ない段階では、見えない線を想像し、物を多様な線で刺し通し、平面で切断し、あるいは無限に線を延ばし、別な線と線を編み合わせたりしている。さまざまな組み合わせ的表現を十分にかなえてくれるものは構想力である。」
>
> J.F.ヘルバルト、是常正美監訳『ペスタロッチの直観の ABC の理念』玉川大学出版部、1982

ヘルバルトの考え方を 100 年後にピックアップして、暗幾何であるとか，図形を想像させるような力を数学の学習、図形教育の中で培っていこうという考え方をとったのがトロイトラインだったわけです。トロイトライン以後その考え方がドイツの数学教育の中で定着していったのかについては，まだよく分からないのですが，数学の学習にこの２つの力が必要だというのは，かなり納得できる考え方だと私は考えています。

２．「構想力」養成の意義

具体的に「構想力」とはどんな力かという定義的なものをヘルバルトの文献で探していくとつぎのような文章があります。

「ある一般的な概念が意味する全体を完全にかつ素早く概観する能力」

これをもとに，その例を考えてみると，次のような例をあげることができそうです。たとえば，「２つの円があります。接線は何本引けますか」という問題で，「２つの円がある」という状態を５種類思い浮かべられるかどうかですね。接線が全く引けなくて０本の場合もありますね。３本の場合もありますね。４本の場合もありますね。そういう状況を思い浮かべられるかどうかに関連しているのが「構想力」といえます。

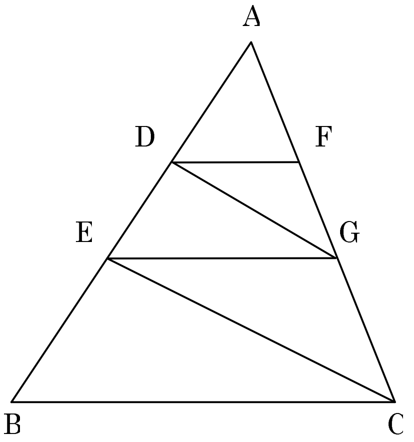
また【問題１】の「新図形の構成」でいえば，「全部作りましょう」という言葉が効いてくるわけです。全部で６つあるわけですから。子どもがすばやくそれを６つ、しかも６つしかないことを把握することが必要となります。ですから小学校の低学年であるいは小学校の算数で私はこれをつかって「７つ創りたい」、「８つ創りたい」と言う子どもの願いは残念ながら，かなえられない訳です。「５つでいい」という子もダメなのです。6つしかできないのです。そういう自分たちの勝手にならない世界に触れさせるというのも構想力の養成の意義として考えられていたように思います。実際、ヘルバルトが書いておりますが、注意深く観察していった結果、ものごとの本質がよく分かる、かつ必然性を尊重する態度が生まれる。熟慮された行為や目的にふさわしい手段を慎重に選ぶ態度を数学の学習を通して培っていこうとする考え方なのです。

> 「注意深い観察からは事物の本質についての知識が得られるのである。更に注意深い観察からは、よく認識された必然性を尊重する態度が生まれるのである。その上、さらに注意深い観察からは、熟慮された行為や、目的にふさわしい手段を慎重に選ぶ態度が生まれるのである。」
> （Herbart, 1802）

19 世紀初頭のこんな考え方を背景にして，数学の学習は重要であり，学校の教科として数学が入ってきたのではないかと思います。それは決して応用ができるからだとか日常計算がうまくできるという考え方はもちろんありましたけれども、それだけで中学校中等学校に数学が入ってきたのではありません。数学のもつ教育的価値が次第に認められて数学教育が始まったのではないか考えておりますが、細かい実証はこれからです。

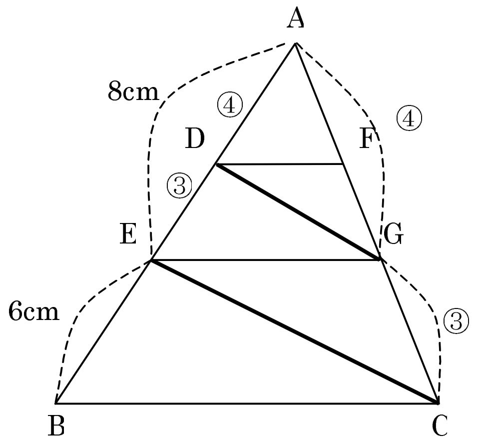
３．数学の問題と「構想力」

さて，数学の学習は構想力とどう関係があるかを考えてもらうために、一つ問題を取り上げてみたいと思います。



【問題６】
三角形 ABC において、DF//EG//BC、DG//EC である。AE＝8cm、EB＝6cm、BC＝13cm のとき、AD の長さを求めよ。
（中３）

これは，中学校３年生の相似の問題です。BC＝13cm となっていますが,BC の長さが分からなくても解けます。ひとつひとつ丁寧に計算していけば解けますが，ある見方をすると簡単に解ける方法があります。斜めに見ます。このような見方がこの問題の決め手になる。



AE：EB＝8cm：6cm
＝AG：GC＝４：３
＝AD：DE
よって

$$AD = 8 \times \frac{4}{7} = \frac{32}{7}$$

このような図の見方をすると，この問題は簡単に解けます。計算自体は簡単です。この場合，図をどう見ることができるかどうかが問題が解けるかどうかと基本的に関わっています。計算ができてもこの問題が解けるということには必ずしもなりません。ですから,「構想力」が問題の解決に基本的に関わっていると思います。一般に算数・数学の基礎学力を考える場合，計算力はもちろんですが，この「構想力」という側面も含めておく必要があるかと思います。トロイトラインはこの「構想力」の養成ということを重要な数学教育の目標として考え，図形指導を組み立てた人物ということになりますが，以前の日本では残念ながら,「構想力」の育成という点から十分に参考にされてこなかったといえるでしょう。

Ⅳ．最近のドイツの数学教育：『数の本』（Das Zahlenbuch）

１．「石垣計算」のデザイン

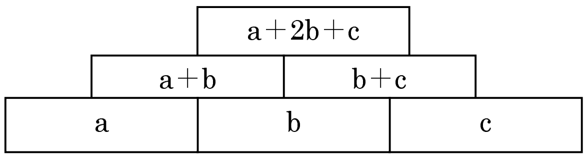
最近のドイツの小学校１年生の教科書のあるページです。資料１

これはどういう法則でどうなるのかというのが分かるでしょうか。この四角の枠の中に数を入れなさいという問題です。ここに出ているのは「数の石垣」(Zahlenmauern) と呼ばれている計算練習の形式です。これを使って足し算と引き算が同時にできます。上にあがっていくと足し算、加法と減法と自己チェックと探求ができます。これは最初の導入ですが、ここから小学校２，３，４年と続き、中学校までこれが発展していくのです。今日持ってきたのは最近出版されて実際に小学校で使われている算数の教科書です。実は昨年 11 月に高等学校数学の授業視察でスイスに行きました。

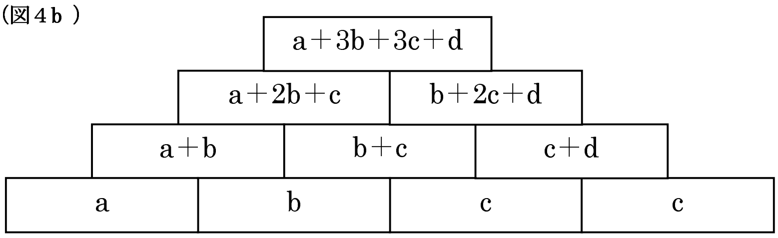
その時にスイスのドイツ語圏でもこの新しい教科書が使われているということを知りました。この新しい教科書は小学校で始まって、それがスイスに波及しているのです。かつ、それだけではなくて今は中学校、さらに幼稚園用のものまでつくられています。それはなぜかというと、ドイツはTIMSS 学力調査国際比較で他の主要国と比べると大変結果が悪かったのです。それと PISA という OECD の行った調査でも、また悪かったのです。主要国の中でこんなに中学校３年生のレベルで成績が悪いということは大変だということになりました。それがひとつのきっかけになっていて、教育議論が非常に盛んに行われています。それが後押しになって、この新しい教科書が入ってきているのですが、まったく考え方が違うのは数学の学習の場（「本質的学習場」）をつくって数学の授業を行うという考えなのです。子どもたちが学ぶ場所を創ろうというわけです。けっして先生が教えていくというわけではなくて、子どもの活動の場を創るという発想でこういうものがたくさん出て参りました。結局スイスも昨年の５月から出てきて、これは中学校１年生なのですが実際、教科書というタイトルではなくて、「学習環境」というタイトルがついているのです。その中にいろんな問題集のような形でできているのですが、その中に石垣計算が文字式で使われています。文字式の計算練習の形のひとつで使われています。こんな形で、ここを x、x、x とおいて、１０段で 1,010,104 となる数 x を求めるのです。なぜ、こんなに大きな数にする必要があるのか大変理解に苦しむのですが、結局最初の数を文字として、同じ数字で計算していき、x を求めるという形での練習形式が小学校の練習問題からずっともちあがってきているわけです。

そこで、中学校では正負の数は石垣を作れないだろうかということで、私が作ってみました。(→資料２) ただの練習というのではなくて、探求という部分も入っています。結局、３段の場合は、文字式を使うと（図 4a）のようになります。４段の場合はまた違ってきます。(図 4b）のようになります。要するに二項定理の展開式の数字が現れるわけです。５段の場合には最上段は a＋4b＋6c＋4d＋e となります。

(図４ａ)



(図４ｂ)



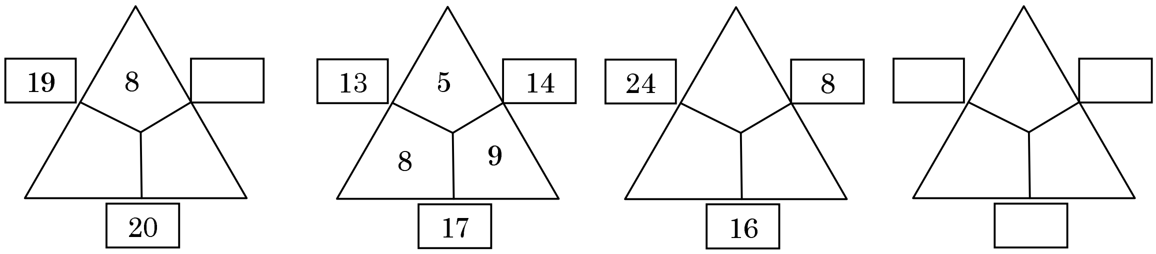
計算練習だけで行くと「はい、これを計算しなさい」だけですが、ちょっと問題を解きながら、思わず計算をせざるを得ない状況なわけです。そういう意味で、ただの学習場面だけではなくて、数学的な関係や性質までも含めて学習させようという発想なのです。どちらかというと計算力と基本的な考え方、問題解決能力をドッキングさせて問題・環境を創っていくのです。

普通は、ここに何か文字を入れたいですね。「２つの数を足して、上の四角にいれます」とか、それをあえて言わないで生徒たちに何とか投げかけて、そこで生徒と先生の間で何かのやりとりがあるはずです。さらにもっと詳しく言うと「○と●を合わせて０になります。」とか、全く言わない。言わないでいきなり出しても、わりとうまくいくのではないでしょうか。たぶん○や●の形で計算させてイメージを与えて正負の数の計算につなげる。正負の数の終わった頃に、あるいは文字式の終わった頃に再度学習の中に位置づけるというのはどうだろうかな、というふうに私は考えました。

ちょっと個々の問題も工夫してみました。1、2，３段目の石垣計算は少しずつ数字を変えました。ある程度均質的に増えたり、減ったりしています。とくに2，３段目はすべて引き算になります。５段目の大きい石垣計算は頂上の数字が間違っています。これはあえて間違えています。ただ、自分でチェックする。絶対生徒は言ってきますから「先生、そこはおかしい」。「そうかなあ」と言って先生の演技が入るのです。そうすると、生徒が先生の周りに集まって議論が始まり、先生と生徒との交流が始まりますから。と、思うのですがどうでしょうか。だからといって、逆に生徒が先生を信用しなくなるのはどうかと思いますけれども、ちょっとウィットでかわしてもいいのではないかなあと思います。ただ練習だけをやらせるというのではなくて少し味を付けて、自分で何か探求したいなという問題です。

次に三角形を使った問題です。これも生徒に何も言わずに出してもいいかもしれません。

【問題７】
外側の正方形の中に、三角形の内側の２つの数の和を入れます。空いている場所に当てはまる数をいれなさい。
問１） 計算三角形の問題を自分で作りなさい。
問２） 外側の３つの数が与えられたとき、内側の３つの数を簡単に求める方法はありますか？
問３） 内側の３つの数が正の整数となるためには、外側の３つの数はどんな条件を満たす必要がありますか？



生徒は何か言ってくるでしょう。足し算になっているとか，かけ算になっているとか、これはたしざんになっていますが、四角のなかに数値を入れていくのです。これは立派な連立方程式の問題になります。三元一次連立方程式です。ずっと入れていきますが、三番目の問題はどうですか。それあとに、次に生徒に問題を作ってごらんというと、正負の数を出さないと大変になることがあるのです。計算すると、小数、分数が出てくることもあるのです。どういうときに、正負の数を使わなければならないのか、どういうときに分数の答が出てくるのかという問題もできるわけです。そこは中学生の問題になっていくと思います。２年生ぐらいで十分やっていける、できない子たちも連立方程式のありがたみが少しわかるのではないかなということです。その問題は次の問２，問３につながるのです。

もうひとつ紹介したいと思います。

【問題８】
30＝10＋10＋10 と分解し、それらの数の積を計算すると 1000 になる。また、30＝20＋10 に分解すると、積は 200 になる。このように積を求めるとき、積が最大となるのは、どんな分解か？

30 でもいいのですが,20 で考えてみてください。20 を加法に分解します。いくらでも分ける数は多くできます。数に対する見方を増やす。小学校 5, ６年でもできます。証明が「これだけしかない。だから・・・」という形で非常にシンプルになります。これを前提にしているからこれが一番大き

い、もうこれ以上はないという形が出てきます。しかも、この数によって答が違うのです。20,21,23など数の性質で、答が違ってきます。３分類できることになります。

おわりに

おわりに、３つでまとめたいと思います。まず「構想力」という力が、算数・数学の基本的な学力の一つの重要な要素ではないかということです。2 番目には，技能の計算・練習と数学の探究を授業でドッキングできないだろうかということです。今日は計算、明日は問題解決学習ではなく、ドッキングする形でそれぞれを両方ともそれぞれ一緒に学習できるような指導過程や場面を作れないだろうかということを思いながら今日はお話しさせていただきました。そして，最後に数学の学習をデザインするという発想です。家の設計のように，どこが玄関で、どこが台所，どこに居間を持ってくるかと同じように，数学の学習をデザインしていくという発想です。数学の学習をデザインし，それを実施していく際には，数学的な分析，子ども状態をとらえる心理学などの諸科学，また先生方の実践力が必要になります。もちろん、私どものような研究者だけでできる話ではありません。研究者と実践者の共同作業が大切になります。

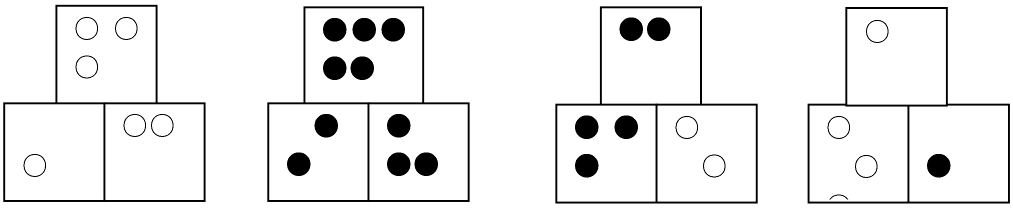
日本でもいろいろな教育改革が進行していますが,『数の本』の著者の一人であるヴィットマン(E. Ch. Wittmann）という先生は「教育改革の最後の成果は授業改革である。教育改革は授業改革だ。」と言っています。授業改革こそ教育改革というヴィットマン先生の言葉は教科教育に携わるものの基本的な視点だと改めて思います。

本日は十分にまとまっていない内容で，また勝手なことを申したような部分があったかと思います。お許しいただいて、これからの先生方の実践の参考になる話であったならば、うれしく思います。本日は長時間ありがとうございました。

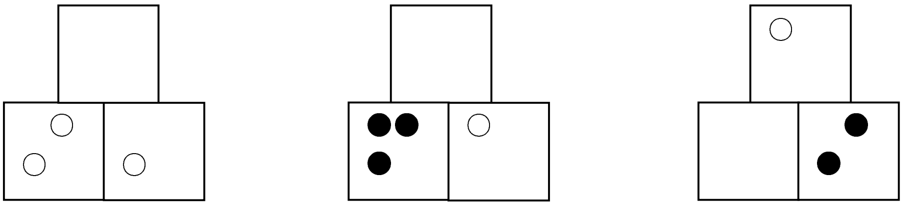
（記録：濱野正樹　鳥取大学大学院）

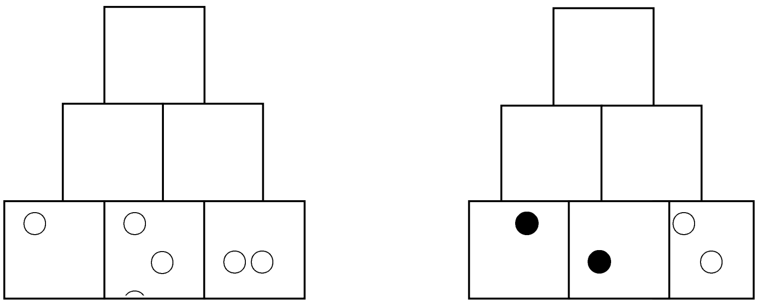
資料２

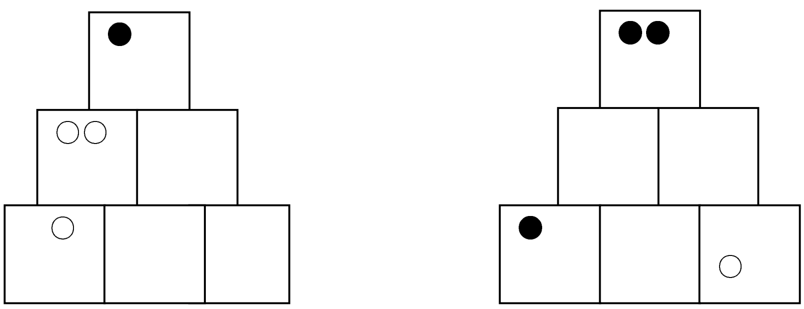
石垣計算のデザイン



１．あいている四角のなかに白丸と黒丸を入れましょう。







２．〇と●を正の数と負の数をつかって表します。四角に数をいれましょう。

＋２	＋２

－３	＋１

－３	－４

＋２	－４

－５	
	－４

－５	
	－５

－５	
	－６

－５	
	－７

＋６	
	－５

＋７	
	－４

＋８	
	－３

＋９	
	－２

0			
4	＋４	－７	＋５

－４			
5			
3			
2			－12

2					
3	－２	7	－４	－３	－５

4		
2		－３

４０			
x	x	x	x