卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究，第６号，2004】

学校数学における拡張の意義

真野　祐輔
指導教官：溝口達也

Ⅰ．研究の目的と方法

毎時間の算数・数学の授業で提示される問題は，時として，児童・生徒（以下，子どもとする）の既存の考えにおいて不都合や限界を生じるものとして把握されることがある。それは，ある意味では，教師によって仕組まれたことではあるが，そのような状況における子どもに対して，どのような活動が期待されるだろうか。本研究は，この問題に対し，従来（数学教育の現代化時代）より話題の中心であった「拡張」に焦点を当て，そのあり方を議論する。

数学教育において，拡張は，いわゆる現代化時代から「数学的な考え方」の育成や「統合的発展的な考察」に関した多くの先行研究によって議論されてきている。近年では，小数の乗法を初めとする概念の拡張場面に焦点をあてた実践的な研究 (中村，1996 など) もある。しかしながら，そのように拡張の重要性が指摘され，研究の結果が認められる一方で，それらの成果が実際の学習指導の場面において，必ずしも望ましい形で反映されていない。それどころか，拡張ということに主眼を置いた授業実践そのものが近年減少の傾向にある。（「新しい算数研究」誌 (東洋館出版社)1990 年４月号～2001 年 12 月号の実践報告「今月の指導」欄（［コメント］欄も含む）にて，語「拡張」で検索したところ，４件であった。) このような現状の中で本研究は，問題の所在が，そもそも子どもが主体となって拡張をしているのかという所にあること指摘する。加えて，今日の教育用語として浸透しつつある「発展」のあり方をめぐる議論に対し，本研究の課題を解決することを通して，本来の拡張の姿が明らかになることは，一つの示唆になると考える。また学習指導についても，これまでの授業実践と拡張の考えを指導する場としては同様であっても，目指すところがそれまでのものと異なる価値を含んでいることを示すことで，本研究の意義が認められると考える。

本研究の目的は，学校数学を学習する子どもが，学習を通して獲得することが期待される，事象の捉え方やものの見方・考え方の一つとして拡張を取り上げ，その数学的，教育的な意義を明らかにすることである。この目的は，本研究において，以下の課題を解決することで達成する。

課題１：学校数学において拡張は，どのように扱われているか。
　1a：拡張は科学としての数学においてどのように機能するか。
　1b：拡張は数学教育の立場からどのように捉えられるか。
課題２：拡張場面の学習指導はどうあるべきか。

課題１については，まず，拡張が，科学としての数学においてどのように機能しているかということの顕在化を，数概念の拡張と，数学とそれ以外の自然科学の理論体系の発展という２点から試みる。拡張について科学的に捉えた上で，学校数学において意義の認められる面を数学教育に導入する際の議論を中島健三氏のものから示唆を得る。そこから得られる知見をもとに，数学学習において子どもがどのように拡張の契機を獲得し得るかということについて検討する。

課題２については，拡張場面の学習指導のあり方を２つの事例考察からア・プリオリ分析（溝口他，2003）を活用して検討，提案する。その際，各事例における拡張の契機を指摘し，子どもが自覚的に拡張の契機を獲得することは，拡張を達成するため必要な基本条件になり得ること示す。

Ⅱ．本論文の構成

1．研究の目的・方法・意義
　1.1 研究の目的
　1.2 研究の方法
　1.3 研究の意義
2．拡張の論理

（1 ページ 35 字×30 行，80 ページ）

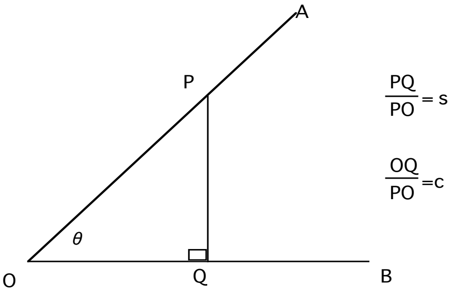
Ⅲ．研究の概要

3.1　拡張とは何か

本研究では，語「拡張」を次のように定義する。

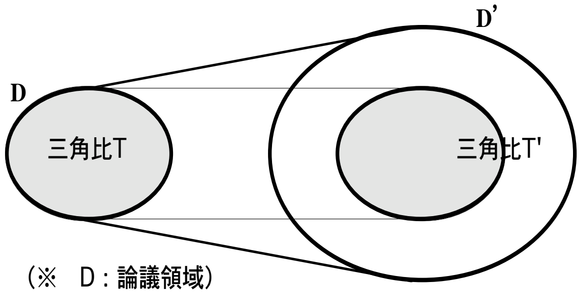
「論議領域Ｄにおいて，概念Ｃが条件R1によって定義されているとき，Ｄを含む論議領域Ｄ’における条件R2があって，R2をＤに制限する限り，R1とR2が同値であるならば，R2は論議領域Ｄ’における，概念Ｃの拡張概念である。」(岩崎，2003)

例えば，高等学校数学Ⅰにおいて，三角比は初め直角三角形において定義される（図１）。



［図1：三角比の定義］

s，c，の値はそれぞれsin　，cos　に対応する。定義された三角比は，0°　≦ θ ≦ 90°の場合において成り立っている。一般角（0°　≦　θ ≦ 360°）の場合になると，直角三角形において与えられた定義は適用できなくなる。そこで，一般角の場合も三角比を定義するために，新しく座標による定義を与えることになる。

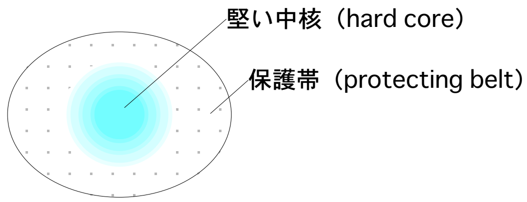


［図２：三角比の定義の拡張］

このとき上図は，領域Ｄ’（0°　≦　θ　≦360°）の場合において，新しい座標における定義は，領域Ｄ（0°　≦　θ ≦ 90°）の場合に限定すれば，三角比Ｔ（直角三角形における定義）を単に包含しているということではなく，数学的に同値であることを示している。

本研究では，上述の拡張が科学としての数学において呈する様相を，数概念の拡張の吟味をもって議論した。その吟味は，初等整数論における新しい数を数としての資格を与えるための手法を概観することによって行った。

また，本研究では，拡張が数学の本性に関わるとして，そのことをLakatos理論の中核として知られる科学的研究プログラム（A.K.サボー，1974）に着目し，数学とそれ以外の自然科学の理論体系の発展の志向について述べた。A.K.サボーによると自然科学の研究プログラムの特徴は以下の点である。



［図3：科学的研究プログラム］

①「堅い中核」は多くの「補助的な仮説から成る保護帯」によって反駁から守られている。（上図を参照）

② 自然科学の科学的研究プログラムには「前進的移動」，「退化的移動」という二つの競合する面がある。

これに対して数学の場合は，

①「堅い中核」は「補助的な仮説から成る保護帯」よって守られていない。

②研究プログラムの二つの側面は互いに競合しない。

とすることができるが，A.K.サボーは，科学的研究プログラムという枠組みは，数学の理論体系の発展を自然科学の場合と同様に捉えることをしないと言及する。それは，「保護帯」の概念がそのまま適用できないことが背景にあるが，本研究は，拡張の機能（拡張的修正）が理論体系の発展そのものに対して作用すると捉えた。

3.2 数学学習における問題の所在

上述したように，科学としての数学の理論体系の発展の志向を示すことは，それ自体，拡張の機能として説明できる。この議論を数学教育に導入するにあたり，本研究では，いわゆる現代化時代における「数学的な考え方」の重視という我が国の動向を中島健三氏の主張から吟味した。拡張を数学教育の立場から捉えることについて，中島氏は，「算数・数学の場合にも，たとえ，「数学的な考え方」の育成といっても，それは，広く科学的な考え方の一環と考えてよいはずである。」（中島，1981，p.131）と述べる。本研究においても，氏の立場から「数学的な考え方」の目指すところを「科学的な精神や態度」（これは中島氏の表現を拝借している）の一環と考え，その際，拡張を「統合」という価値観の一つの形式として捉える。中島氏は，「統合による拡張」について次のように述べている。

「はじめに考えた概念や形式が，もっと広い範囲（はじめの考えでは含められない範囲のものまで）に適用できるようにするために，はじめの概念の意味や形式を一般化して，もとのものも含んでまとめる場合である。」（中島，1981，p.127）

上記の内容は，本研究で定義した拡張を，数学教育の立場から，その仕方について述べていると考えられるが，学習指導においては，さらにそれが子どもの活動に反映されなければならない。そのため拡張場面では，拡張の「前」と「後」における子どもの状態についての議論が要請されると考える。

この議論の必要から，本研究では，拡張の「前」に焦点を当て，学校数学において拡張場面として認められる事例（中学校第３学年「平方根」）を取り上げて検討した。数とその計算とは，演算の可能性や方程式の解の存在という立場で整理することを通して，それらを関係づけることができる。しかし，学校数学においては，例えば，指導内容としての「平方根」は，「面積２の正方形の一辺」といった長さは実在するが，それを表現できない(有理数の範囲で)という視点で子どもが課題を発見し，解決へと至るという仕方で行われ，そして表わすことのできない新しい数の表記の必要性から，記号√を採用して平方根の表記とすることを知るという指導法が一般的であるように，それは，科学としての数学とは異なる様相を呈する。当該事例において，本研究では，そこでの拡張の契機として以下の２つの場合を導出した。

1）測定の対象を前提とするけれども，表現（表記）がないということに着目すること。

2）測定の対象を前提としないけれども，数学的構造に着目すること。

２つの契機は，しかし，「平方根」の考察によるものである。ここでの拡張の契機が，そのまま一般の拡張場面に適用できることは保証されていない。しかしながら，数学学習においていかなる拡張場面であっても，子どもにおける拡張の契機の獲得に主眼をおいた学習指導を設計，展開することが望まれると考える。

3.3 拡張場面において子どもに何が期待されるか

拡張場面の学習指導のあり方を以下に２つの事例を取り上げて提案する。かけ算の意味の拡張（3.3.1）は，平成15年７月８日に本学部付属小学校において行われた研究授業（姫田恭江教諭）の成果をもとに言及している。

3.3.1 かけ算の意味の拡張

小数の乗法，除法の意味の理解を特に問題にするのは，小数のかけ算やわり算が単にできることだけでなく，それらの立式判断が正しくできるようにすることにねらいを置いている。かけ算は第２学年において，同数累加によって意味づけられる。例えば，

$$80\times2=\underline{80+80}\qquad 80\times3=\underline{80+80+80}$$

とできる。しかしかけ算は，同数累加の意味である限りにおいて，文字通りそれはたし算の簡便としての表記であり，小学校第２学年においてそのように意味づけることが，当然ながら，乗法という演算を数学的に定義するというねらいではない。そのようにして意味づけられたかけ算は，第５学年において乗数が小数の場合には適用できなくなる。次の【問題】は，上記の授業で提示されたものである。

【問題】　1m80円のリボンを買います。リボン2.5mの値段はいくらでしょう。

このときに，「･･･リボン2.5 mの値段はいくらで

しょう。」という教師の問いは，拡張の場面設定のための問題提示の必要から成される発問であって，そのような問いからは拡張場面として本質的な「問い」を意図しているのではない。 本研究における拡張の定義によって，この場面を説明するなら，

論議領域D：乗数が整数の場合

概念C：乗法の意味

条件R1：同数累加による意味づけ

論議領域D’：乗数が小数の場合

条件R2：割合による意味づけ

となり，子どもには次のような活動（溝口他，2003）が期待される。

1) 整数の場合に成り立ったかけ算の意味が，小数の場合(×小数)で　は不都合であることの認識；
2) 「×小数」の場合に成り立つ意味の構成；
3) 新しくつくった意味と既存の意味との比較；
4) 既存の意味を新しい意味に統合。

まず活動１において【問題】の文脈から，「80×2.5」と表すことに抵抗を感じ，それはかけ算のようなものとして理論上は，例えば，「80＊2.5」と表すことが期待され得る。ここで感じる抵抗とは，既存のかけ算の意味（同数累加による意味づけ）が，×小数の場合において不都合であることの認識に由来するものである。上記の授業においては，「80×2.5」とする子どもと教師の間に次のようなやりとりが観察された。（T:教師　S:子ども）但し，Sは，特定の子どもとは限らない。

T：80の2.5個分？

S：そう。

T：ん？なんか首ひねってるのと，そのとおりという人がいます。

T：2.5個分ってどういうこと？

S：80のかたまりが2.5個ある。

S：80が2つと80の0.5の40が1つ。

T：じゃあ80+80+･･･

S：80+80+40.

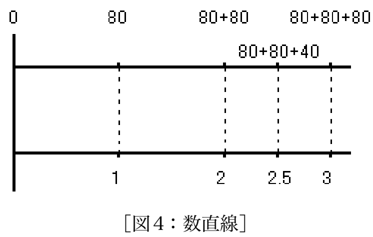
T：でもね。かけ算って同じものだから×２としてもよかったんだよね。80+80+40とかしていいの？

S：うん，だって80の0.5･･･

このような子どもに対して，教師は，「『80+80+40』をかけ算として表していきたい」という意識，あるいは，その意識を喚起するための問いによって，拡張の契機を獲得へ方向付けることが求められる。

次に活動２では，新しいかけ算の意味をどのように構成するのかという点に関心があると考えられる。端的に言えば，ここでは，いわば仮想的にA×pで，pが小数の場合を考えて，pが整数のときに持っていた性質のうち，小数のときにも使えそうな性質を取り出して調べてみるとする。結果，A×pで，pが２倍，３倍になれば，A×pも２倍，３倍になるという性質（比例の考え）が「かける」という意味を決め直す際のアイデアとなるのである。このことをねらいとして割合による意味づけ（80を１とみたときの2.5にあたる大きさ）と表現する場合もある。しかしこの段階では，新しくつくった意味は，×小数の場合に成り立っている。ここで，×小数の場合におけるR1「同数累加による意味づけ」について，子どもが以下の活動３，４を自覚的でない限りは，意味の拡張は達成されたとはいえない。本研究では拡張を統合の形式と捉えている。つまり，子どもの意識においては，整数の場合と小数の場合でそれぞれ独立な状態にあるはずであり，独立したかけ算の意味を統合していくという活動にこそ，拡張するというときに顕在化されるべき本質があると考える。

子どもにおいて，かけ算の意味が，整数の場合と小数の場合が独立な状態であるとは，それぞれの意味を統合された状態への移行につながる状態として捉えられる。この比較の段階においても，数直線上の操作が，そのような状態を支えるために有効に機能すると考えられる。例えば，「80を１とみたときに2.5にあたる大きさ」という割合による意味づけは，「80+80+40」を１つの式で表し，かけ算という演算を定義できるが，それは×小数の場合である。このとき，数直線上で子どもは，×整数の場合を同数累加によって思考することも考えられる（図4）。ここで子どもにおいて，既存の意味と新しい意味との比較が意識化するならば，それぞれの意味は，統合された状態へと移行することが期待される。



［図4：数直線］

ここまでの活動（活動１～活動３）を経て，統合する環境が整ったといえる。活動４が目指すところは，独立した状態にあるかけ算の意味を，統合され

た状態へと移行させることにある。そのために，妥当であるとされた新しい意味で，既有のA×p(pは整数) の場合の「かける」の意味との整合を図り，新しい意味は既存の意味を包含することになる。「整合」とは，「理論の内容に矛盾が無いこと」(岩波 広辞苑第五版) といわれるが，ここでは，割合によるかけ算の意味を用いて同数累加による意味を説明することであり，乗数が整数である場合に制限するとき，既存の意味と新しい意味が数学的に同値であることを確認するということである。以上述べた活動を経て，意味の拡張は達成されると考える。

3.3.2　２次方程式の解法の拡張

高等学校数学Ⅱの指導内容である「複素数」は，新しい数の導入によって，既存の２次方程式が例外なく解を持つようにする，いわゆる「解の公式」が常に解を与えられるようにするという観点で取り扱われている。「複素数」においては，“２次方程式を解くこと”がここでの拡張場面になるのであるが，後述するように，２次方程式を解く過程において，拡張の契機を得ることができるような問題設定が望ましいといえる。このことは，しかし，本時において提示される問題は，場面設定を目的としており，その問題自体が，拡張の契機を喚起するものではない。それを踏まえて，本時の【問題】は，

【問題】２次方程式 x^2-6x+10=0 をどのように解決すればよいか。

という設定も可能である。上記の方程式を「解の公式」によって解くとすれば，

$$x^2-6x+10=0$$
$$x=3\pm\sqrt{9-10}$$
$$x=3\pm\sqrt{-1}$$

となり，判別式D<0より「解なし」と判別できる。子どもは，この解の判別において，解が「実数解」を指すことは暗黙裡であり，この段階では無意識であることから，「$x=3\pm\sqrt{-1}$」と方程式を解き，「解なし」とする。なぜなら，２次方程式の解法（以下，「解法」とする）が，「D≧0」によって定義されていることに根拠を求めているからである。実数領域Rを含むより広い領域において，いま仮にi2=－1となるようなiを想定すれば，これは形式的にｉ=$\sqrt{-1}$と表記できる（数学的には±の吟味も必要になる）。複素数ａ+ｂｉは，虚数単位ｉの導入によって，その資格を得るのである。虚数単位iを導入するためには，$\sqrt{-1}$ を数として認めていくということが前提として必要になる。拡張の定義によって，この場面を説明するなら，

論議領域D：R　(Rは実数全体の集合)
　概念C：　２次方程式の解法
　条件R1：D>0，D=0
論議領域D1：C　(Cは複素数全体の集合)
　条件R2：D $\in$R

となり，子どもが経るべき４つの活動が以下のように期待される。なお，４つの活動は，上述の“意味の拡張”場面におけるア・プリオリ分析（溝口他，2003）から導出した。

1) Rにおいて成り立った「解法」が，Cにおいて不都合であることの認識；
2) Cにおいて成り立つ「解法」の検討；
3) 新しくつくった「解法」と既存の「解法」との比較；
4) 既存の「解法」を新しい「解法」に統合。

上述したように，Rを含むより広い領域において，仮にi2=－1となるようなiを想定することによって，Rにおいて成り立った「解法」で，「D<0⇔解なし」とすることには抵抗が生ずるはずであり，活動１が要請される。すなわち，ここで生ずる抵抗とは，既存の「解法」が，Cにおいて不都合であることの認識に由来するものであり，それによって，子どもが，「２乗して負なる数を認めたとしても，『解法』を適用したい」とする意識，あるいは，その意識の喚起のための自己への問いを導き，拡張の契機を獲得することが示唆される。

獲得した拡張の契機によれば，Cにおいて成り立つ新しい「解法」を構成するための活動2)が要請される。Cにおいて，i2=－1となるようなiを想定したならば，上記の２次方程式の解 $x=3\pm\sqrt{-1}$ を形式的に $x=3\pm i$ と表記できるが，そうするのであれば，「D<0⇔解なし」のままであってはならない。ここで，新しくD $\in$Rと定義し，「解法」を検討すれば，

D>0⇔二つの異なる解
D=0⇔重解
D<0⇔*二つの異なる解*

とすることができ，「D=0⇔重解」を含めれば，Cにおいて，２次方程式から，常に２つの解x=α，βを求められることが保証された。解集合は，複素数の集合へ拡大されたといえる。このことは，複素数が数学的に数としての資格を与えられることを意味しているのではなく，複素数の集合を用意することが認められることを意味している。しかし，子どもの意識において，異なる論議領域における「解法」は，それぞれ独立した状態におかれているはずであ

る。拡張を達成するためには，これらの独立した「解法」の統合が必要であり，活動３が要請される。さらに，活動４において「統合」とは，新しい「解法」で既存の「解法」を説明することによって，解をそれぞれ実数解，虚数解として決め直すことを意味する。

D＞0⇔二つの異なる*実数解*

D＝0⇔重解

D＜0⇔二つの異なる*虚数解*

以上の活動を経て，拡張が達成されると考える。

本研究で問題とした数概念の拡張との関係から言えば，かけ算の意味の拡張では，算数の指導内容として，生活基盤から教育的意義を捉え，小数を学習した後に演算の意味の拡張を位置付けるという方向を示している。一方で，当該事例は，２次方程式の解法の拡張を通して，複素数導入の数学的手続き（演算の可能性や大小関係など）を位置付けるものであり，意味の拡張の場合とは異なる方向を示している。

Ⅳ．研究の結果

本研究は，拡張固有の意義を数学的，教育的に捉え，その意義を生かした学習指導指針を提案した。拡張の意義を数学的，教育的に捉えるために，科学としての数学における拡張の機能を理論体系の発展を中心に拡張的修正という視点から議論し，それを数学教育に導入するにあたり，中島氏の立場から拡張を統合の形式として捉えることについて述べた。このようにして明らかになった拡張は，数学学習においてその契機の獲得によって子どもの活動に本質的に反映され，この立場から拡張場面の学習指導のあり方を２つの事例を取り上げて提案した。

残された主な課題として，事例考察から明らかになった拡張の方向性の相異がどこに由来して生じているかということ，そして，既有の概念を新しい概念に統合した後の子どもの実態を究明することがあげられる。

Ⅴ．主要引用・参考文献

岩崎浩 (2003)．メタ知識の構造化、意味の明確化の試み―概念の相補性の視座から―．全国数学教育学会第17回研究発表会配布資料.

加藤明史 (2003)．代数学の話―形式不易の原理．理系への数学 2003.8 月号．(pp.56-59)，現代数学社.

小松真（1989）．数学教育における統合的、発展的な考察の意義．学芸大数学教育研究第１号，123-130.

A.K.サボー[伊東俊太郎・中村幸四郎・村田全 訳]．(1976)．数学のあけぼの．(pp.240-259)，東京図書.

中島健三（1981）．算数・数学と数学的な考え方―その進展のための考察―，金子書房.

中村享史（1996）．小数の乗法の割合による意味づけ，日本数学教育学会誌 算数教育，78(10)，51-56.

溝口達也 他 (2003)．小数の乗法の意味の拡張：教授学的契約の顕在化と認識論的障害の発現を視点として．第36回日本数学教育学会論文集，163-168.