卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究，第６号，2004】

問題解決過程における
算数的活動の役割に関する研究

山本　寛恵
指導教官：矢部敏明

Ⅰ．研究の目的と方法

日本の子どもは、数学の成績が世界で上位に位置しているにもかかわらず、情意的な側面は低いことが指摘されている。つまり、問題が解けないから数学が嫌いであるわけではなく、問題が解ける・解けないにかかわらず数学が嫌いであるといえる。このような結果の表れは、算数・数学に出会う場である授業が関わっているのではないだろうかと考え、子どもたちが授業の中で行っている活動や考え方が変わることによって、得られる数学に対する意識が変わるのではないかと考えるに至った。よって、本研究の目的は、算数・数学的活動を通して「数学的な見方・考え方のよさを感じることができる活動とはどんな活動なのか」を考え、算数・数学的活動を開発することである。

そこで、次のような研究の方法をとる。まず、算数・数学の授業自体が帰納的であるとも言われることから、算数・数学の授業にみられる特徴をとらえるために、G.Polya 氏の「帰納と類比」の文献から帰納について考察する。そして、算数・数学の授業が帰納的に行われることを考慮したうえで、算数・数学的活動をとらえ、その中で、帰納的展開との関係、数学的な見方・考え方とのかかわりを授業観察を通して考察する。さらに、それをもとに算数・数学的活動の開発を行うものである。

Ⅱ．本論文の構成

（１ページ 40 字×40 行、67 ページ）

Ⅲ. 研究の概要

2.1　算数・数学的活動とは

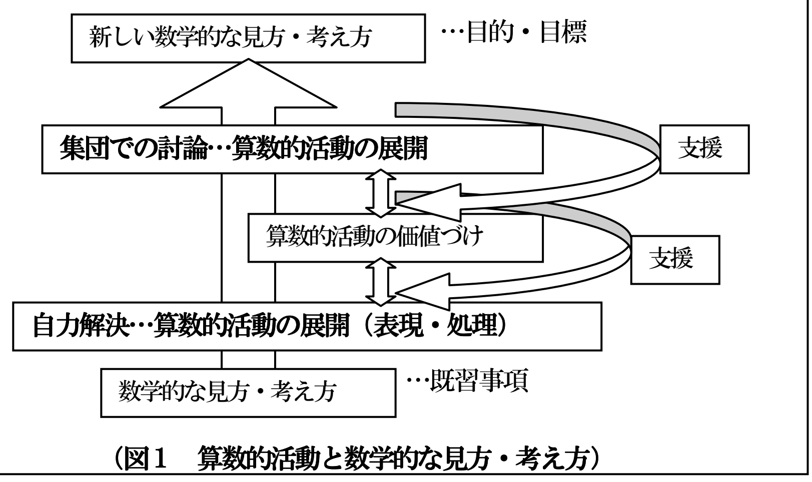
算数・数学的活動を考察するにあたって、鳥取大学教育地域科学部附属小・中学校で行われている研究開発の文献をもとにとらえることにした。その中では、観測不可能なものである数学的な見方・考え方の達成を評価するにあたり、観察可能なものである算数・数学的活動をとらえることが必要であるととらえている。そして、算数・数学的活動とは、「目標の実現に向けて、数学的な考え方を生み出し、新たな表現・処理の仕方を引き出す児童生徒の主体的な活動」（矢部，1999）であるととらえている。つまり、学習において目標の実現に向けて児童が取り組むさまざまな活動の中で、数学的な考え方が生み出される活動や、新しい表現の仕方や処理の仕方を引き出す活動が算数・数学的な活動であるといえる。

そのため、既習事項や今までに身につけた数学的な見方・考え方をもとに、自力解決や集団討論の場を通して、新しい数学的な見方・考え方が生み出された場合、その自力解決や集団討論で行われた活動は算数・数学的活動であるといえる（図１）。そして、このように算数・数学的活動が行われるためには、支援の際に、どのような活動を通してどのような力を読みとるのかという算数・数学的活動の価値づけが必要である。

4.1　算数・数学的活動の役割

このように算数・数学的活動をとらえた上で、授業観察を通してみられた算数・数学的活動の役割を考察すると、次の三点があげられる。

第１の役割は、子どもが多様な数学的な見方・考え方を引き出すことである。これは、授業観察③、⑤や面積を半分にする直線を求める授業からいえることである。例えば、授業観察③では、具体的数値を用いた考え方や文字を用いた考え方、長方形に変形させて求める考え方や平行四辺形に変形させて求める考え方がみられた。このように多様な考え方を引き出すことができたのは、既習事項に帰着させ三角形の面積の求め方を考えることを期待して、自力解決の場を位置付けたことが大きいのではないかと考える。また、同じことは、面積を半分にする直線を求める授業でもいえることである。この授業では、長方形の対角線で二等分する考え方、同面積を除いていき残りを二等分する考え方、重なる部分を二等分する考え方など様々な考え方がみられた。この授業では、問題提示の際に、教師が「面積の学習、同じものに目をつけての学習をしたから、それをふまえてできないかな。」と話していることから、同じ面積に目をつけて引いたり分けたりすることを用いて二等分する直線を求めることを期待して自力解決の場を設けたのではないかと考えられる。これらの授業から、第１の算数的活動の役割が行われるためには、多様な考え方が生み出されることを期待して、授業の中に自力解決の場を位置付けることが必要であると考える。しかし、授業の中に自力解決の場を置きさえすれば、どんな授業でも子どもが多様な考え方を生み出すわけではない。また、たとえ多様な考え方を生み出すことができたとしても、授業には目標があり、その目標の実現につながる考え方が生み出されなければ意味がない。そのため、教師は、問題解決の糸口となるような支援だけでなく、予想される考え方に対して、より目標の達成につながる考え方を生み出せるような具体的な手立てを行うことが必要である。したがって、子どもが問題解決に向かってじっくりと考えることのできる自力解決の場を位置付け、その場で多様な考え方を生み出すことができるように具体的支援を施すことによって、子どもが多様な考え方を生み出すことができたのなら、その活動は第１の算数的活動の役割が有効に働いたといえる。



（図１　算数的活動と数学的な見方・考え方）

第２の役割は、子どもが多様に生み出した考えを１つのことに収束させることである。これは、特に、自力解決によって生み出したさまざまな考え方を集団討議の場で練りあげる際にみられることである。これは、授業観察③、⑥からいえることである。例えば、授業観察③では、集団討議において「文字を用いて考えたらどんな式で求められるのか」ということを考えることによって、すべて『ａ×ｂ÷２』で表されることを導いた。つまり、話し合いの中で文字を用いて考え方を統合することによって、一般的に用いることのできる『公式』を導いたといえる。同じことは授業観察⑤でもみられた。これらのことから、集団討議で１つのことにまとめるためには、文字を用いたり考え方を統合したりすることが必要であると考えられる。しかし、必ずしも１つのことにまとまる場合ばかりではない。例えば、授業観察⑥「三角形の底辺は変えずに高さを２倍、３倍にすると面積はどのように変わるだろうか。」という課題では、三角形の求積公式のように１つのことにまとめることはできない。この授業では、○ｃ㎡ずつふえるという差でとらえる考え方と高さが２倍、３倍になると面積も２倍、３倍になるという倍でとらえる考え方がみられた。これらの考え方をまとめることはできないので、集団討議ではどちらの方がより一般的であるのか、あるいはよりよいのかということを話し合うことになる。この場合、差でとらえる考え方は底辺がかわると数値も変化してしまうため定まらないが、倍でとらえる考え方は底辺がどんな三角形の場合でもいえ、かつ四角形の場合も同じことがいえることから、倍で表すほうがより一般的だとまとめることができる。

この２つの事例から、練りあげにおいて１つのことに収束させるためには、子どもと教師が『なにをもってよりよいとするのか』という価値観を持って、考え方を検討することが必要であるといえる。具体的には、『表現・処理をひとつにまとめること』あるいは、『対比によってよりよいということ』が挙げられる。『表現・処理をひとつにまとめること』とは、三角形の求積公式の授業のように文字で表すことによって、より一般的な公式を導くことを指し、これもより一般的に表しているという点で『よりよい』といえる。このことから、第２の算数的活動の役割が行われるためには、練りあげの中に見られる３つの価値観を子どもと教師が持っていることが必要であると考える。練りあげの中に見られる３つの価値観とは、①より簡潔なものをよしとする価値観（簡潔性）　②より明確なものをよしとする価値観（明確性）　③より広い範囲に活用できるものをよしとする価値観（統合・一般性）である。したがって、練りあげの過程では、子どもと教師が共有している『よりよい』といえる根拠となる価値観にしたがって、考え方を収束させることができたのなら、その活動は第２の算数的活動の役割が有効に働いたといえる。また、第２の算数的活動の役割が達成されるためには、対比することが必要になるため多様な考え方が生み出されることも必要である。

第３の役割は、子どもの活動そのものに興味の対象が向くことである。これは、算数・数学的活動を授業の中で位置付けることによって、生徒が課題を自らのものとしてとらえ、主体的な活動を展開することを意味している。

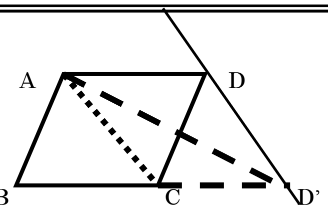
4.2.1　算数・数学的活動の開発（事例 1）

等積変形を利用し、四角形を同面積の１つの三角形に変形させて面積を求める活動を考える（図２）。この考え方を元に、五角形、六角形を位置づけて展開すると、次のように考えることができる（図３）。

このように展開していくと、四角形の考え方から、五角形の場合は四角形に変形することができれば三角形にすることができ、六角形の場合は五角形に変形することができれば四角形、三角形にすることができると分かる。また、等積変形の移動は（ｎ－３）回必要であることもいえる。つまり、ｎ角形に展開していくことによって、四角形の考え方がｎ角形の場合にもできることが分かる。授業において、ｎ角形に展開することによって、四角形の考え方が１つの方法として統一されることができれば、考え方が収束したといえる。その場合、その活動は、算数・数学的活動の第２の役割を満たすと考えられる。

＜四角形の場合＞

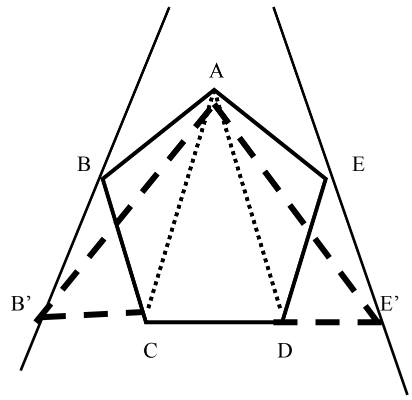
四角形 ABCD に対角線 AC を引く。
点 D を通り対角線 AC に対して平行な直線を引く。
平行な直線と線分 BC の延長線が交わる所を D’とおく。
△ACD と△ACD’は、両方とも、底辺がＡＣで、
高さは AC と DD’の平行線の間の長さになるので、△ACD と△ACD’は同じ面積となる。
したがって、四角形 ABCD と△ABD’は同じ面積である。



（図２）

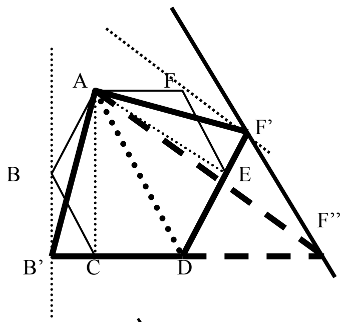
＜五角形の場合＞

五角形 ABCDE に対角線 AC、AD を引く。
点 B を通り対角線 AC に対して平行な直線を引く。
平行な直線と線分 CD の延長線が交わる所を B’とおく。
△ABC と△AB’C は同じ面積となる。
同様に、点 E を通り対角線 AD に対して平行な直線を引く。
平行な直線と線分 CD の延長線が交わる所を E’とおく。
△ADE と△ADE’は同じ面積となる。
したがって、五角形 ABCDE と△AB’E’は同じ面積である。

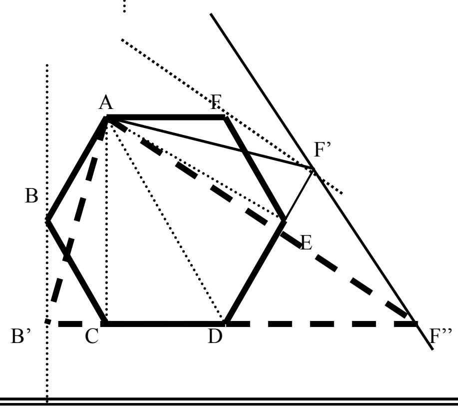


＜六角形の場合＞

六角形 ABCDEF に対角線 AC、AE を引く。
点 B を通り対角線 AC に対して平行な直線を引く。
平行な直線と線分 CD の延長線が交わる所を B’とおく。
△ABC と△AB’C は同じ面積となる。
同様に、点 F を通り対角線 AE に対して平行な直線を引く。
平行な直線と線分 DE の延長線が交わる所を F’とおく。
AEF と△AEF’は同じ面積となる。



次に、対角線 AD を引く。
点 F’を通り対角線 AD に対して平行な直線を引く。
平行な直線と線分 CD の延長線が交わる所を F’’とおく。
△AEF’と△ADF’’は同じ面積となる。
したがって、六角形 ABCDEＦと△AB’Ｆ’’は同じ面積である。



（図３）

主要引用・参考文献

・「研究報告　　小学校　第 46 集　中学校　第 33 集」
　鳥取大学教育地域科学部附属小学校・中学校　　平成 13 年発行
・「数学における発見はいかになされるか　1、帰納と類比」
　G.Polya：著者　　紫垣和三雄：訳者　　丸善株式会社　　昭和 34 年発行
・「中学校学習指導要領解説　数学編」　　　文部省　　　2001 年