内地留学研修報告要約【鳥取大学数学教育研究，第６号，2004】

高校数学の幾何分野に焦点をあてた教材開発

～ 数学的思考と創造的思考に着目して（*Real World* から *Math World* へ）～

前田　陽一

鳥取県立倉吉工業高等学校

Ⅰ．研究の目的と方法

近年、高校生の理数系離れということが大きな問題となっている。

本来、学びは人間形成において必要不可欠な営みであり、社会で生きていく力をつけるために学ぶべきであって、その学びの１つに数学があると考える。しかし、現実は教師主導型の授業が多く、受験に必要な生徒には学習する必然性があっても、その他の生徒にとっては高校で数学を学ぶ必然性が感じられないため学習意欲が高まらず、嫌いな教科と感じる傾向があるのではないかと考える。すなわち、我々教師が数学を学ぶ有用性を感じ取れる授業をしていないことに大きな問題があると考える。

そして、日頃の生徒の学習活動を見る中で、論理的思考力を養うのに最適とされる幾何分野を苦手とする傾向があるように感じる。これは、小学校では身近なものを抽象化した正方形や三角形などの基本的性質を、紙を折るなどの作業を通して直感的に認識することが中心であり、中学校では空間図形が入り、さらに論証へと進み、高校では代数幾何や解析幾何などの計算が中心となることから、学年が上がるにつれて現実感に乏しい内容と受け取られやすくなることで、学ぶ意義が十分感じ取れていないからではないかと考える。

そこで、幾何分野に焦点をあてて「これから目指すべき数学教育」について考えるとともにコンピュータを活用し数学を学ぶ意義や楽しさを実感できる教材開発を行うことを目的とする。

そのためには、新・旧学習指導要領を比較検討する中から「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」という文言に着目し、具体的事例を考えながら数学的活動の位置づけを行うとともに、その活動のもとになるであろう「数学的な見方や考え方」、「数学的思考力」、「創造性」について文献研究を通して、具体的事例を挙げながら理解を図り、その方向性を指摘したいと考える。

さらに、コンピュータを活用した先行事例の研究を通して、数学の授業におけるコンピュータ活用の意義およびその位置づけを行うとともに、「J.Dewey の理論」をもとに問題解決学習による授業構成の枠組みを示していきたいと考える。

そして、それらをもとに、幾何分野において コンピュータを活用した教材開発を行い、教授的示唆を得るものとする。

Ⅱ．本論文の構成

（１ページ４０字×４０行，１１８ページ）

Ⅲ. 研究の概要

まず、新旧学習指導要領の総則および教科の目標の対比から、新学習指導要領のねらいを明らかにするとともに、教科の目標に新たに追加された「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」という文言に着目し、今後目指すべき授業における数学的活動の流れを図式化し指摘した。

（以上 第２章）

次に、幾何分野に焦点をあてた教材開発の視点をまとめるにあたって、数学の学習における基礎･基本となる「数学的な見方や考え方」、「数学的思考力」について、具体例を挙げながら理解を深めた。そして、授業における数学的活動を明確にするとともに、その位置づけを行い、実際の数学的活動についての展開例を考えた。さらに、数学的な創造性の捉え方について、本稿での定義を行い、創造性の基礎を培うために必要な「多面的にものを見る力」や「論理的に考える力」の２つの力について、具体例を挙げながら考え、「創造性の基礎を培う学習活動」の一例を流れ図にまとめた。これらの考え方をもとに、「数学的思考力」と「創造的思考力」に着し、教材開発の視点として、

①*Real World* から *Math World* へ
身近な事象から数学の授業を展開することよって、数学を学ぶ有用性を理解させる。

②実験・観察を通して探究する授業へ
コンピュータを活用し、実験・観察的活動を通して、知識を探究し、自らの力で定理や公式を見いだしていくことで､創造的に考えることのよさを感得させる。

以上の２点をもって教材開発を行う。

（以上 第３章）

続いて、授業構成の枠組みを行うために、コンピュータを活用した実践例をまとめる中でその位置づけを行うとともに、「J.Dewey の分析的思考段階」にもとづき、問題解決学習の過程を具体例で考え、整理することによって、J. Dewey の分析的思考段階による問題解決の５段階を授業構成の枠組みとする。

（以上 第４章）

◇教材「円の回転と中心および円周上の点の軌跡」

(1) 実際の授業構成

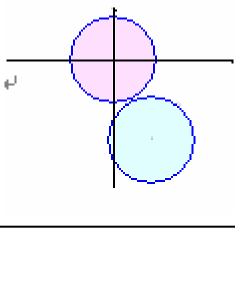
＜学習目標＞

これまでに学んだ円に関する既習事項をもとに「固定した円とその円周に沿って回転させる円の回転数との間には、固定した円の中心から回転する円の中心との距離に依存する関係」を多面的な視点から考え、その仕組みや構造を数学的に理解し、説明できるようにすること。

＜本時の展開＞

問題の提示

２枚の１０円硬貨のうち、１枚を机に固定したのち、もう１枚を固定した硬貨の縁に沿って滑ることなく回転させる。同じ大きさの硬貨であれば、円周の長さも同じだから１回転するはずなのに
２回転するのはなぜだろうか考えてみよう。



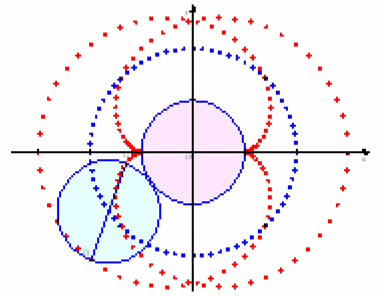
活 予想される生徒の数学的活動　支 教師の支援　意 支援の意図　評 評価

自力解決 C

活 回転する円の中心や直径とその両端の点に着目し、それらの動きを観察したり、コンピュータ上で軌跡を描かせたりして２回転することの説明を考える。

自力解決 C-1

活 回転する円の中心や直径の両端の点の軌跡を描き考える。



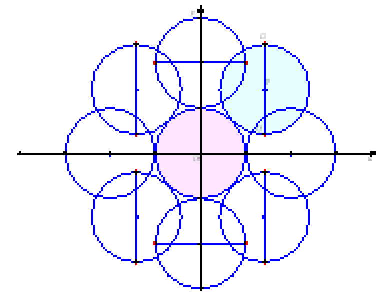
支 どの軌跡に着目したら、説明できるだろうか考えてみよう。

意 回転する円の中心の軌跡に着目させたい。

評 回転する円の点の軌跡から回転数との関係を見出そうとすること。

自力解決 C-2

活 回転する円の直径の回転する動きに着目し考える。



支 回転する円の直径の動きを 30° ずつに区切ってその動きから言える事を考えてみよう。

意 回転する円の直径の回転角に着目させたい。

評 回転する円の直径の回転角から回転数との関係を見出そうとすること。

自力解決 D

活 具体物を使って円の中心や直径と両端の点を書き入れ、回転を観察する中で２回転することを確かめながら、コンピュータ上で考える。

支 円の中心や直径とその両端の点のどんな動きに着目すれば２回転することを説明できるだろうか考えてみよう。

意 具体物で操作・観察することで解決の見通しを立てさせ、それをもとにコンピュータ上で考えられるようにさせたい。

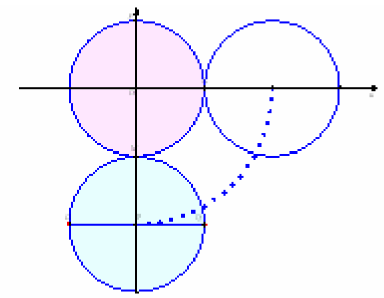
評 円に関する既習の知識を活用し、解決の見通しを立てようとする意欲・態度を見取ること。

自力解決 B

活 回転する円の中心の軌跡や直径の回転角に着目し、２回転することの説明を考える。

自力解決 B-1

活 回転する円の中心の軌跡に着目し、２回転することを説明しようとする。



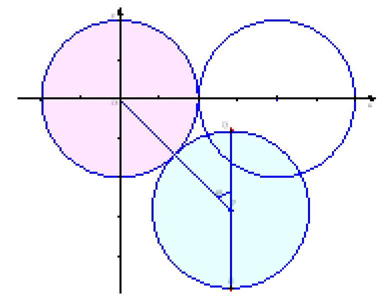
支 回転した時に進む弧の長さと回転する円の中心の軌跡の長さに着目して何か言えないか考えてみよう。

意 回転する円の中心の軌跡の半径が固定した円の半径の２倍であることに気づかせたい。

評 回転する円の中心の軌跡が固定した円の２倍であることから説明すること。

自力解決 B-2

活 回転する円の直径の回転角に着目し、２回転することを説明しようとする。



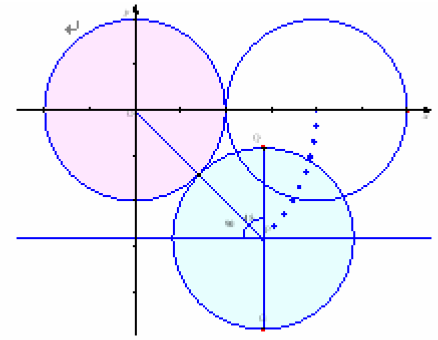
支 回転する円の直径の回転角が固定した円に沿って動いた距離を弧の長さとする中心角に着目して何か言えないか考えてみよう。

意 回転する円の直径の回転角と固定した円に沿って動いた距離を弧の長さとする中心角の２倍であることに気づかせたい。

評 回転する円の直径の回転角と固定した円に沿って動いた距離を弧の長さとする中心角の２倍であることから説明すること。

自力解決 A

活 回転する円の直径の回転角が固定した円に沿って動いた移動距離を弧の長さとする中心角の２倍になることから固定した円の大きさと回転する円の中心の軌跡の大きさに着目し、２回転することを説明しようとする。



支 見出した関係から円の数を２，３，‥‥‥個と増やすと、１番外側の円は何回転するか考えてみよう。

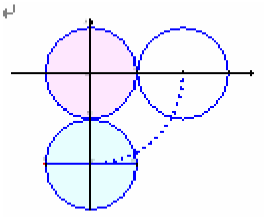
意 見出した関係をより確かなもの（検証）とするために、円の数を増やして帰納的に考えるよさに気づかせたい。

評 特殊（回転する円が１個）から一般化（円の個数を増やして考えること）して考えること。

－集団による課題の検討－

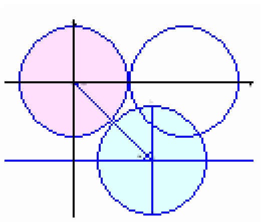
活　同一の大きさの円の周に沿って回転する円がなぜ２回転したか、その仕組みと構造をどのような点に着目したら説明できるかについて話し合う。

S_{B1}：２つの円の弧の長さから２回転することを説明する。

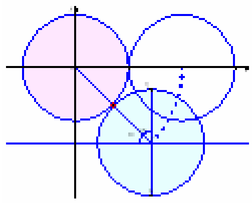


支　回転する直径の描く軌跡の長さが固定した円に沿って移動する弧の長さの２倍であるということは､中心が同じ円と見れば何の２倍であるといえるか。

S_{B2}：回転する円の直径の回転角をもとに２回転することを説明する。



支　回転する円の直径の回転角が固定した円に沿って移動する弧の長さに対する中心角の２倍であるということを円の円周の長さに置き換えて考えたらどうなるか。

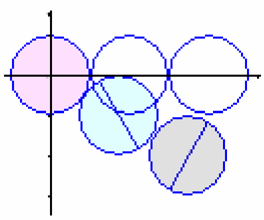


S_A：回転する円の直径が固定した円の移動距離を弧の長さとする中心角の２倍になることから回転する円の中心の軌跡が固定した円の中心から２倍の距離を半径とする円であることを説明する。

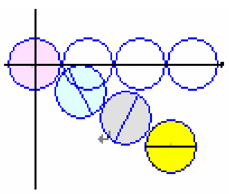
課題の発展

回転する硬貨を２,３,‥‥個と増やしていったとき、一番外側を回転する硬貨は何回転するだろうか。

(1)　回転する硬貨を２個にしたとき



(2)　回転する硬貨を３個にしたとき



(2) 授業の分析と考察

授業は、倉吉工業高等学校の環境建設科第３学年の生徒３２名（男子２９名､女子３名）を対象に２００３年１２月１７日（水）に実施した。その際、本授業では自力解決の過程で思考の道具としてのコンピュータ活用（１人１台）の有用性も検証するためコンピュータ室で行った。

授業では、ほとんどの生徒が主体的に取り組んでいた。これは、授業構成の視点である「身近な事象から数学の授業を展開する」こと、この場合であれば「硬貨の回転という単純な事象」で直感的に考えた結果と実際の結果が違うことから「なぜ」という疑問を呼び越こすことで授業に対する興味･関心を高め、その事象を説明するためには数学的な見方や考え方が必要であるという学習の必然性を持たせることができたためであると考える。

また、多くの生徒が自力解決 B-1 ないし B-2 の活動から「２回転する理由」を説明しようとし、数人ではあったが、A の様相を示したことは、紙と鉛筆だけでは容易に行えることではなく、授業構成のもう１つの視点である「コンピュータを活用する」ことで問題が理解しやすくなり、操作・観察する中で、解決の糸口を見いだす活動が観察されたことから、思考の道具として機能したと考える。

◇教材「ベクトル～位置ベクトル～」

(1)　実際の授業構成

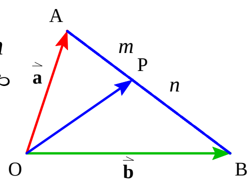
＜学習目標＞

ベクトルの演算に関する既習事項をもとにコンピュータを活用して具体的に線分の内分比を定めて表すことから、任意の比における内分点の位置ベクトルを自らの力で公式化すること。

＜本時の展開＞

課題の設定

下図のように$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とし、点 P は線分 AB 上の点とする。いま、点 P が線分 AB を $m:n$ に内分するとき、$\overrightarrow{OP}$ を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表したい。



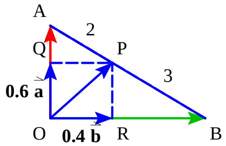
そのためには、$m:n$ に内分する比を１：１や２：３，‥‥などの具体的な数値の場合を考えることを通して公式を導こう。

自力解決 C

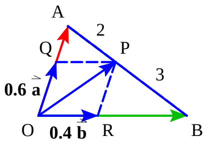
活 点 P が線分 AB を 2：3 などの具体的な比に内分する点として、$\overrightarrow{OP}$ を表すことを考える。

自力解決 C-1

活 直交座標や斜交座標の見方から $\overrightarrow{OP}$ を対角線とする平行四辺形をつくり考える。



$\vec{a},\vec{b}$ を 90 ° にした様相



$\vec{a}$ を傾けて見た様相

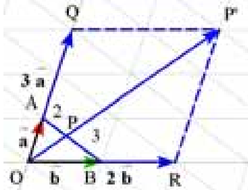
支 $\vec{a},\vec{b}$ を内分する比の倍数にして考えられないだろうか。

意 $\vec{a},\vec{b}$ を内分する比の倍数の和でできる平行四辺形の対角線に着目し考えさせたい。

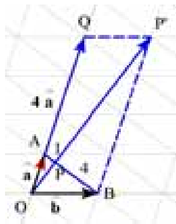
評 $\vec{a},\vec{b}$ を内分する比の倍数の和でできる平行四辺形に着目し考えようとすること。

自力解決 C-2

活 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ の斜交座標を考え、内分する比をもとに $\vec{a},\vec{b}$ の実数倍した和のベクトルを対角線とする平行四辺形をつくり考える。



AB を 2：3 とした様相



AB を 1：4 とした様相

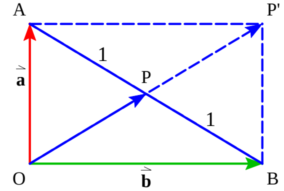
支 線分 AB の内分する比の値をいろいろ変えて $\overrightarrow{OP}$ を表してみよう。

意 表した $\overrightarrow{OP}$ の式と内分する比との間に公式化できる関係があることに気づかせたい。

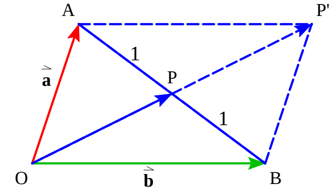
評 内分する比をいろいろ変えて $\overrightarrow{OP}$ の式を表そうとすること。

自力解決 D

活 $\vec{a},\vec{b}$ の和の発想から平行四辺形をつくり考えるが、それと同時に $\vec{a},\vec{b}$ のなす角を 90 ° にし、長方形 AOBP'と見なせば点 P は対角線の中点であることに気がつき、この場合は、$\vec{a}$ を傾けた平行四辺形 AOBP'と見ることから、AB を 1：1 に内分する点 P としてコンピュータ上で考える。



$\vec{a},\vec{b}$ を 90 ° にし長方形と見た様相



$\vec{a}$ を傾け平行四辺形と見た様相

支 1 図から $\overrightarrow{OP}$ は $\vec{a},\vec{b}$ を用いてどう表せるだろうか。

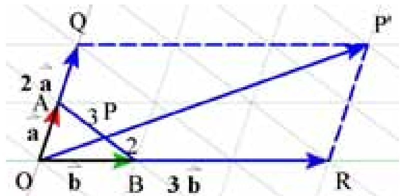
支 2 式で表せたら、それをもとに点 P が線分 AB を 2：3 に内分したらどう表せるだろか。

意 線分 AB を 1：1 に内分する点 P は $\vec{a},\vec{b}$ の和でできる平行四辺形の対角線の 1/2 であることをもとに、$\vec{a},\vec{b}$ を実数倍し、その和でできる平行四辺形の対角線の何倍かで考えることに気づかせたい。

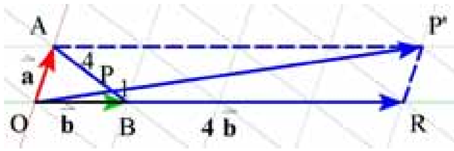
評 平行四辺形の対角線の発想から、その対角線を 2：3 に拡張して考えようとする意欲・態度を見取ること。

自力解決 B

活 線分 AB の内分する比の値をいろいろ変えて、$\overrightarrow{OP}$ を表そうと考える。



AB を 3：2 に内分した様相



AB を 4：1 に内分した様相

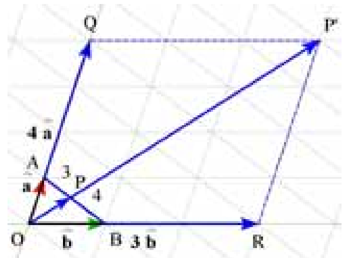
支 線分 AB の内分する比の値をいろいろ変えて $\overrightarrow{OP}$ を表すことから、$\overrightarrow{OP}$ の式と内分する比の値との間には何か関係がないだろうか。

意 $\overrightarrow{OP}$ の式と内分する比の値との関係に着目し、任意の内分比（m：n）での公式を導き出させたい。

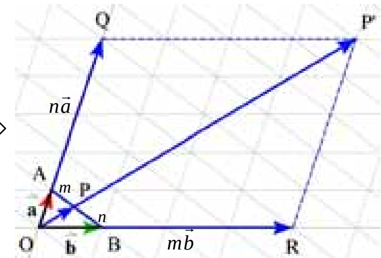
評 $\overrightarrow{OP}$ の式と内分する比の値との間の関係を見つけだそうとすること。

自力解決 A

活 点 P が線分 AB を m：n に内分する比として、$\overrightarrow{OP}$ を表す公式を導き出そうと考える。



AB を 3：4 に内分した様相



AB を m：n に内分した様相

支 導き出した公式がどんな比の値の場合でも成り立つか確認してみよう。

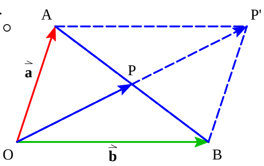
意 導き出した公式をいろいろな比の値の場合に適用させることで正しいかどうか確認させたい。

評 点 P が線分 AB を m：n に内分する比として、$\overrightarrow{OP}$ を一般化（公式化）しようとすること。

―集団による課題の検討―

$\boxed{活}$ 点 P が線分 AB を m：n に内分するとき $\overrightarrow{OP}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いてどう表されるかについて話し合う。

S_{C1}：線分 AB を１：１の比に内分する点 P をとり、$\overrightarrow{OP}$ を表す。



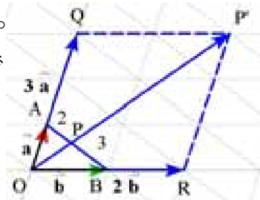
$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OP'}$ で

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OP'}$

だから、

$$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OP'}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

S_{B1}：線分 AB を２：３の比に内分する点 P をとり、$\overrightarrow{OP}$ を表す。



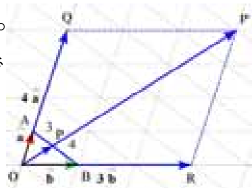
$3\vec{a}+2\vec{b}=\overrightarrow{OP'}$ で

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OP'}$

だから、

$$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OP'}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$$

S_{A1}：線分 AB を３：４の比に内分する点 P をとり、$\overrightarrow{OP}$ を表す。



$4\vec{a}+3\vec{b}=\overrightarrow{OP'}$ で

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{7}\overrightarrow{OP'}$

だから、

$$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\frac{1}{7}\overrightarrow{OP'}=\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}$$

$\boxed{支}$ 線分 AB を 1∶1 に内分した場合の $\overrightarrow{OP}$ の分母の<u>2</u>

〃　　２：３　　〃　　$\overrightarrow{OP}$ の分母の<u>5</u>

〃　　３：４　　〃　　$\overrightarrow{OP}$ の分母の<u>7</u>

はどこから導かれているのだろうか？

S_1：$\overrightarrow{OP}$ の分母は、内分する比の値の和になっているのではないか。そうだとすれば、

$$S_{C2}：\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{1\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}}{1+1}$$

$$S_{B2}：\overrightarrow{OP}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}=\frac{3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{2+3}$$

$$S_{A2}：\overrightarrow{OP}=\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}=\frac{4\cdot\vec{a}+3\cdot\vec{b}}{3+4}$$

S_2：$\overrightarrow{OP}$ の分母は、内分する比の値の和であり、$\vec{a}$, $\vec{b}$ の係数は内分する比の値の位置と逆になっている。

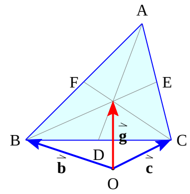
$\boxed{支}$ m：n の場合はどうなるだろうか？

$$S_3：\overrightarrow{OP}=\frac{n\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}}{m+n}$$

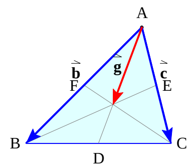
課題の発展

右図のような三角形 ABC の重心を G とするとき、

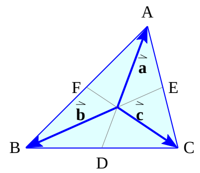
1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ を用いて、$\overrightarrow{OG}=\vec{g}$ を表してみよう。



2) 基点を A とし場合、$\overrightarrow{OG}=\vec{g}$ はどう表されるだろうか。



3) 基点を G とし場合、$\overrightarrow{OG}=\vec{g}$ はどう表されるだろうか。



（以上 第５章）

Ⅳ．研究のまとめ

教材開発を行う過程で、自分自身が学び得たことを述べまとめとする。

(1) 人間形成を目指した数学教育へ

今後目指すべき数学教育の方向性として、

① *Real World* から *Math World* へ

② 知識の伝達・継承から創り出す数学へ

③ *Math World* から *Real World* へ

の３つの視点に立った授業を行うことで数学を学ぶ有用性を理解させ、自らの問題とし解決しようとする「生きる力」の育成から人間形成を目指した授業とすることができる。

(2) 数学が分かり、できることへの新たなアプローチ

コンピュータを思考の道具として活用することで、操作・実験観察的な活動を通して探究活動へと導き、“数学が分かり、できる”新たな授業展開が可能となる。

(3) 生徒の心理を読みとる数学教師として

「生きる力」は、問題解決学習によって育成されると考えるが、その学習過程において教師が適切な支援を行うためには、“生徒の学習心理を読みとる数学教師”となるべく日々努力することが必要である。