講演資料【鳥取大学数学教育研究，第５号，2003】

小学校算数科における新しい図形教育のあり方

松尾　七重
千葉大学教育学部

１．はじめに

平成10年12月に新学習指導要領が告示され，それに基づいた新しい学校教育が本年度から実施されている。今回の改訂では，授業時間数の縮減とともに，教育内容が大幅に削減されている。そのような状況下においては，これまで以上に，限られた内容を基に，幅広い知識や応用の利く考え方を十分に身に付けられるようにしなければならない。言い換えれば，学校教育は子どもが自分で学び，考え続けていけるように，その基礎を育成するという立場で行われなければならない。

特に，思考過程を重視している算数教育においては，「自ら学び，自ら考える力を育成すること」が強く求められることになる。また，今回大きく内容の削減が行われた図形領域については，少ない内容でも，これまで以上に子どもたちが十分な力を身に付けられるように，学習内容の取扱い方を工夫することが必要とされる。特に，図形に関する多くの内容は上の学年や中学校へ移行されてしまったが，そのような内容については，これまでと同様に扱うのではなく，新しいそれぞれの学年に相応しい扱い方を工夫しなければならない。

２．図形教育の問題点

子どもは図形の学習が好きなのだろうか，それとも嫌いなのだろうか。もちろん個人の好みによって異なることは確かであるが，ある調査結果によれば，他の領域に比べて比較的好きな方であると言うことができる。図形の学習は色板並べなど，遊び感覚で始められるからであろうか。そうした素朴な活動こそ，低学年では必要不可欠である。また，小学生だからこそ楽しんでできる活動もあるだろう。例えば，第６学年に位置づけられていた対称な図形で，それぞれの好むデザイン（図形）をかいてみようという課題は中学生にはやや幼稚な気もするからである。このように考えると，小学校における図形の内容が削減されたということは子どもが楽しめる算数の内容が減らされたと言っても過言ではないだろう。

上述のような問題状況に加えて，これまでの図形教育には，いくつかの問題点があった。第一に，教科書分析によれば，我が国の図形教育は全体としては子どもの幾何学的思考の発達水準の上昇に適合するように意図されてはいるが，三角形・四角形に関する内容についてのみ調べると，小学校高学年及び中学校第１学年において，思考の発達を促進させる流れになっていないということが分かる。小学校高学年及び中学校第１学年は小学校段階と中学校段階をつなぐ時期ではあるが，具体的な図形の表現を基にして，抽象的で論理的な思考を行う内容やインフォーマルな証明（説明）に関する内容が少なく，それらが適切な位置に配列されていないという問題点がある。新学習指導要領では，内容が削減されたり上の学年に移行されたりしたことを考えれば，このような問題点を解決しないばかりか，さらに問題状況が悪化することにもなると考えられる。

第二に，図形の場合，数と異なり，学習して身に付けた知識や技能を活用する場が少ないということである。数の計算について考えれば，２桁の整数の繰り上がりのあるたし算を学習した後では，必ずその計算を用いる文章題を解決する場面に出会う。また，２桁の整数のかけ算の筆算を行うとき，計算過程で，繰り上がりのあるたし算を使うことになる。それに対して，長方形を使う場面がどの程度あるだろうか。

このように，図形においては，活用場面が少ないことから，学習してよかったと感動する機会もないし，なぜ学習しなければならないのかという疑問が生じることにもなる。また，繰り返し学習することにより，身に付けた知識や技能を高めていくことになるが，その機会が十分に設定されていないとも言える。

第三に，図形の学習において，直観によりと

らえた事柄を論理的に裏付けしていくという考え方が必要であるにもかかわらず，その片方が抜けていたり，両方のバランスがとれていなかったりするということである。つまり，図形の学習において，具体的な活動を強調するあまり，操作活動だけを行って終わってしまうことがある。あるいは，言葉だけを用いて筋道立てて説明することに終始することで，子どもの思考の困難を助長させてしまうことにもなる。

そこで，本稿では，子どもが自ら考え続けていけるように，生きる力をはぐくむことを究極の目的として，上述の問題点を改善することを目指して，新しい図形教育のあり方を示す。そのために，まず，図形教育の基本的な理論であるファンヒーレの幾何学的思考の水準理論について述べ，幾何学的思考の発達過程に相応しい教育とは何かを明らかにする。次に，身に付けた知識や技能の活用がその理解を促進することから，それらを活用する場面の必要性について述べる。続いて，直観的にとらえるための具体的活動と論理的な思考活動のバランスのとれた学習を目指した算数的活動について述べ，その具体例を明らかにする。これらを踏まえ，新しい図形教育を実現するための方策を示す。

３．ファンヒーレの幾何学的思考の水準理論とその具体化

3.1 ファンヒーレの幾何学的思考の水準理論

オランダの数学教育学者であるディナ・ファンヒーレ－ゲルドフとピエール・マリー・ファンヒーレは幾何学的思考に関する次のような水準理論を確立した。彼らは適切な指導を行い，援助することにより，学習者が基本的な水準から徐々に進んでいくことを実証した。この幾何学的思考の発達水準は次の５つの水準からなるものである。各水準の内容は以下の通りである。

第０水準：図形は外観（appearance）によって判断される。子どもは図形をその形状（form）によって認識する。

第１水準：図形は性質の運搬者（bearers）である。図形は性質によって認識される。しかし，性質は順序づけられていない。

第２水準：性質は順序づけられる。性質は他の性質から演繹される。つまり，１つの性質は先に出るか，他の性質に続くかである。しかし，演繹の本質的な意味は理解されない。

第３水準：演繹の本質が理解される。演繹の意味，定理の逆，公理や必要十分条件が思考の対象となる。つまり，図形を命題としてとらえ，それに対する推論が行われる。

第４水準：多様な公理系が理解される。

ファンヒーレの理論は子どもの認識の変化に着目して提案された思考水準とこの思考水準を高めるための学習段階から構成されている。実際に，この段階に基づいて学習指導を行うことにより，理論の妥当性が検証されている。その学習段階は以下の通りである。

第１段階（探究）：子どもは自分に示された教材によって，これから調べようとする範囲を知るために学習する。

第２段階（定められた方向づけ）：子どもは教材によって，調べようとする範囲を明らかにする。教材は，子どもに徐々に特徴的な構造がみえるような方法で選択される。

第３段階（明示）：経験が正しい言語シンボルに結びつけられる。子どもは教室での議論において，観察された構造についての考えを言語シンボルを用いて表現することを学習する。

第４段階（自由な方向づけ）：調べようとした範囲のほとんどが分かり，子どもはすばやく自分のやり方を見つけることができる。

第５段階（統合）：子どもは自分自身を方向づけるが，自由にあらゆる方法を概観しなければならない。そのため，自分が探究した領域全体を一つにまとめることを試みる。

この学習段階において，５段階目まで進むと，一つ上の水準に移行することができると考えられている。

しかしながら，この理論では，小学校段階から大学段階に至る思考の発達過程に，５つの水準が設定されているため，これらの水準は２つの隣接する水準の幅が広く，カリキュラムの編成には役立つが，学習指導により水準間の移行を実現させるために用いるには適さないという問題点がある。例えば，第１水準では，長方形と正方形を弁別することができるが，第２水準では，両者が一般と特殊の関係になっているととらえられることから，この水準間は，我が国では，小学校３年生頃から中学校２年生頃までに相当することになる。また，学習段階は水準

の移行を促すためのものであるが，一般的すぎて，それぞれの水準間の移行に適用しにくいという問題点もある。

3.2 モザイクパズルを用いた学習

以上の理論を具体化するために，ファンヒーレは，図形の学習が子どもにとって遊びから始まるという彼の基本思想を基に，７ピース・モザイク（図１）を使った楽しい活動を提案している。

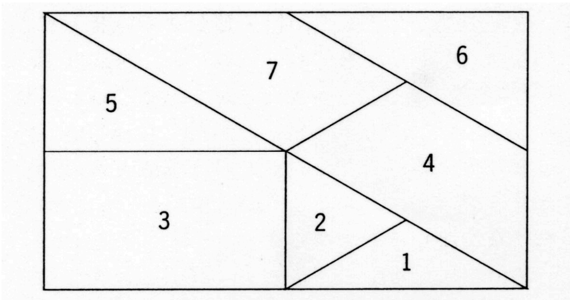

図１　７ピース・モザイクパズル

このパズルは７つのピースを使ってつくられる長方形として示されている。各ピースには番号が付けられ，次のような図形になっている。ピース１は二等辺三角形，ピース２は正三角形，ピース３は長方形，ピース４は等脚台形，ピース５と６は合同な直角三角形，ピース７は台形である。各ピースは正三角形のグリッド（格子）に表される。

この７ピース・モザイクは手軽につくることができる。しかも一つひとつのパズルは基本図形になっており，また，これらのピースで基本図形をつくることもできる。そのため，このパズルを使って，小学校における図形の内容の多くを学習することが可能になる。その中には，図形の対称性，相似なども含まれる。例えば，ピース２，ピース２と４，ピース２と４と５と７で，正三角形をつくり（図２），正三角形はすべて相似になっているということを，活動を通して見出すことができるだろう。また，ピース３，ピース１と５と６と７及び７つのピースすべてで長方形をつくることができるが，正三角形とは異なり，長方形は必ずしも互いに相似になっていないことを発見することもできる。それに，これらの角や辺の大きさを比べれば，角は変化せず，辺の長さのみが異なっていることも分かる。

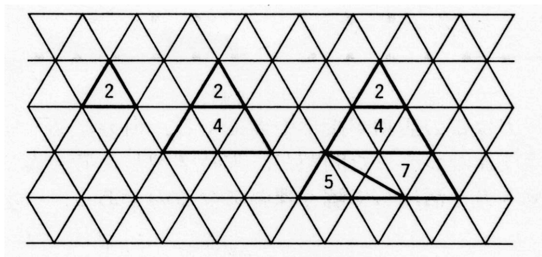

図２　正三角形

このように，ピースを使って，様々な図形をつくる問題を考えることによって，直角三角形，正三角形，二等辺三角形，長方形，ひし形，平行四辺形，台形などの図形をそれぞれ数種類ずつつくることができる。ここで，そのつくり方を問うこと，つくった図形やそれらの関係についてきまりを見つけることなどの問題を自ら設定し，解決する学習が可能になる。

以上のような活動において，新しい教育課程で目指されている多面的な見方，論理的な考え方などの創造性の基礎を培うことができると考えられる。また，ピース同士を重ね合わせることによって，辺や角の特徴に気づき，角の大きさは辺の長さに依存しないことも分かる。このように，図形についての様々な性質やきまりを見つけ，さらに，よりよいものを求め続けることができる。つまり，子どもは様々な図形の構成活動を通じて，発見の体験をすることができるのである。また，子どもはこれらの活動を遊びながら行うので，意欲的に楽しく図形について考えることができるのである。

これまでにも，タングラムなどを使って，上記に似た活動は行われていたと思われる。しかし，残念なことに，それらは単なる遊びで終わってしまうことが多かった。それは見つけたきまりやつくり出された図形などについて十分に検討することがなかったからだろう。ゆとりの時間を利用して，子どもたちが見つけたことやつくり出したものについて，自分だけでなく，他の人にも分かるように筋道立てて説明できるようにする機会をぜひつくりたいものである。

４．図形の活用

図形の学習指導のねらいの一つには図形の概念の理解がある。このことについては，これまでには，新たに図形の概念を理解することが中心に議論されてきた。しかしながら，理解の状態は固定的ではなく，変容するものであると考える立場から，初期の姿だけをとらえるのでは

十分でないということが分かってきている。

Moore(1994)は，概念理解に関する困難を明らかにするために，概念定義，概念イメージ及び概念活用を含む概念理解スキーマを設定している。つまり，概念の理解の様相をとらえるのに，言語やイメージの他に，概念の活用状況をみることを提案している。また，Carpenterら(1999)によれば，子どもたちが理解して知識を獲得しているならば，新しいトピックを学習したり，馴染みのない問題を解決したりするために，その知識を活用することができるという。逆に言えば，活用しているということは高度の理解を示していることになる。したがって，活用できるようにすれば，理解も高まるのではないだろうか。このように考えれば，概念の活用は理解の一側面であるだけでなく，理解の程度を示す指標であるとも言えるのではないかと考えられる。

先にも述べたとおり，図形は数や量などと異なり，活用する場面が少ないことは明らかである。このことがなぜ図形の学習をしなければならないかという問いに対する答えを出すことを難しくしていると言えよう。したがって，習得した学習内容が生きてはたらくようにするために，活用の場面を設定し，子どもがそのような場面で主体的に学習できるようにすることが必要である。

例えば，量と測定の領域における学習内容としての面積の公式づくりを考える。多角形や円の面積などを求めるためには，求積公式を生み出したり，既習の求積公式を活用したりする。この場合には，図形の性質を基に考えていることになるが，子ども自身がそのことを十分に意識していないことが多い。長方形の場合，単位正方形を並べて敷き詰めることができる。この敷き詰めは長方形の定義「４つの角が直角である四角形」とその性質「向かい合う辺の長さが等しい」により可能になる。ここでは，公式を生み出すために，図形の性質を活用しているのである。

また，平行四辺形の求積公式を導く場合には，既習の長方形の求積公式に帰着させて考えることがあるが，面積の加法性や保存性を生かして等積変形をする。このとき，平行四辺形の性質が説明の根拠として必要になる。例えば，「向かい合う辺が等しい」「隣り合う角の和が180°である」などを用いて説明することになる。このことから，特別な図を用いて行う等積変形やその手続きが一般化され，どのような平行四辺形についても同様に考えられることが保証される。新学習指導要領では，四角形そのものの学習とその面積の学習がともに第５学年での内容であることから，図形の学習を行い，その後に，面積の学習が位置づけられることになるだろう。そのため，平行四辺形や長方形の定義や性質を繰り返し学習する機会となり得るのである。

このようにして，公式は都合のよいもので，その「よさ」を支えているものが図形の性質であることが分かるようにすることができる。逆に，公式をつくり出すには，図形の性質を生かすようにすればよいことも明らかにすることができる。さらに，別の図形についても同様に考えてみよう，図形の性質を別の場面で活用しようとすることにもなるだろう。このようにして，図形の性質について繰り返し学習ができる。また，活用できているかどうかを調べることにより，子どもの学習状況を的確に評価するための手立てにもなり得よう。

また，次のような数量関係の領域の学習内容についても，図形の性質等を活用する場面を考えることができる（図３）。

下の図のように，正方形の形におはじきを並べて，その総数を求めなさい。

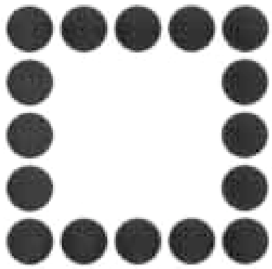

図３　正方形状のおはじきの数を求める問題

この問題については，もちろん一つひとつ数えても答えを見つけることができる。しかし，数え間違えをせずに，簡単に求める方法を考えることになれば，かけ算を使った式を立てて，計算して求めなければならない。そこでは，多様な解決方法があると言えよう。その中には，３×４＋４という式を立てて計算して求める方法がある。この式において，３は一辺に５個あるおはじきから，その両端を引いた個数（５－２）である。また，それにかけている４は４辺の意味である。つまり，正方形の「４つの辺

をもつ」という性質を活用していることになる。正方形の場合，どの辺の長さも等しいことから，かけ算を使うことができるのである。さらに，最後の４は頂点にあるおはじきの個数を表している。つまり，ここでは，正方形は「４つの頂点をもつ」という性質を活用していることになる。

このようにして，図形の性質を基に，式をよむことにより，図形が他の正多角形に変わっても，同様に求めることができることが分かる。すなわち，正五角形，正六角形については，３×５＋５，３×６＋６により求められるのである。

図４　立方体状に並べられたおはじき

さらに，現実にはあり得ないことかもしれないが，１辺に５個ずつ，立方体の形に並べたら，その総数はどのように求められるかという問題も考えられる（図４）。この場合にも，立方体の性質を活用して，おはじきの総数を求めることになる。立方体の辺は１２本あり，その頂点の数は８個である。このことを使えば，おはじきの総数は3×１２＋８という式で求められる。ここでは，立方体の性質，すなわち，辺の数や頂点の数などが活用されている。このように，図形の性質を活用して問題解決に取り組む場面を数多く設定することが必要である。

５．算数的活動

5.1 算数科の目標と算数的活動

平成 10 年告示の学習指導要領における算数科の目標は次の通りである。「数量や図形についての算数的活動を通して基礎的な知識と技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに，活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活に生かそうとする態度を育てる。」

新教育課程では，体験的な学習や問題解決的な学習を重視することから，目標に「算数的活動を通して」という文言が加えられた。この場合，算数的活動を通して，知識・技能や考える力の育成，楽しさやよさの感得，活用する態度の育成を行うということを意味している。「算数的」とは，「算数科の指導内容とかかわりのある」ということであり，また，「活動」とは，「いきいきと行動する」ことであると考えられる。そのため，算数的活動は手や身体を使った外的な活動を意味するものとなる。しかしながら，「事象を数理的に考察，処理すること」が算数的活動の中核であると考えられることから，作業的・体験的な活動としても手や身体を使う外的な活動だけではなく，内的な思考活動が伴ってこそ，算数的活動は算数学習において重要な役割を担うこととなる。さらに，活動という以上，子どもが目的意識をもって主体的に取り組むことが重要であるとも指摘されている。

この算数的活動は，指導方法としてだけでなく，目標としても位置付けられている。つまり，算数的活動を通して○○○の目標を達成し，それを基に自ら次の算数的活動に取り組むような子どもの育成が目標にされているのである。

具体的には，作業的な活動，体験的な活動，具体物を用いた活動，調査的な活動，問題作成的な活動，問題解決的な活動，探究的な活動，発展的な活動，応用的な活動，領域総合的な活動などである。

このような算数的活動のねらいの一つは子どもがそのような活動に取り組むことによって，数量や図形についての意味を自ら理解していけるようにするということである。もう一つのねらいは，算数的活動に取り組むことによって，考える力を高めていけるようにすることである。子どもがこれまでに学習したことなどを基にしながら，自分で工夫して問題を解決したり，新しい考え方や処理の仕方を生み出したりできるようにしなければならない。さらに，算数的活動の主な意義は子ども主体の学習となること，算数の楽しさが味わえること，算数の有用性が分かること，分かりやすい学習となることなどである。

以上のことから，簡単に言えば，算数的活動は身の回りの事象を数理的に考察するために行

う子どもが目的意識をもって主体的に取り組む外的及び内的な活動である。知識や技能，考え方の育成を目指して行われる算数的活動は指導方法として位置づけられるが，算数的活動そのものができるようにすることをねらいとすれば，目標としてもとらえることができる。このような算数的活動を行うことにより，直観でとらえた事柄を論理で裏付けするという図形の学習に特有な考え方を用いて，作業的・体験的な具体的活動と論理的な思考活動のバランスのとれた算数的活動を行うことができる。すなわち，これまでに具体物を操作するなどの外的な活動のみに留まっていたり，観察や実験などを行わずに，内的な活動のみで済まされていたりする問題点を改善することができると考えられる。

5.2 外的な活動と内的な思考活動の例

ここでは，上述のことを考慮して，通常の授業で行われるだろう算数的活動の例を示そう。小学校５年生で，四角形を作図する場合を取り上げる。平行四辺形の作図の後で，ひし形について作図する問題を解決する。通常は，ひし形の場合，対角線を引き，その端を頂点として結ぶ方法が取られ，その作図の仕方を理解し，身に付けることになる。しかし，教師側から与えなければ，子どもはひし形の作図をするために，既習図形の作図方法から類推して自ら作図する方法を考え出し，問題を解決することができるだろう。つまり，平行四辺形の作図方法を前提とし，「２組の向かい合う辺が平行である」という共通性質を基に，平行四辺形とひし形について同様なかき方をする。それに加え，ひし形の場合，相違点に当たる辺の長さの関係に着目し，「辺の長さが等しく」なるようにするのである。

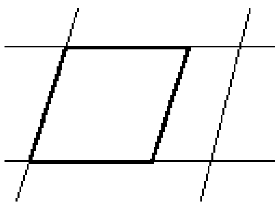

図５　ひし形の作図

この解決過程では，次のような算数的活動が行われていると考えられる。作図は作業的・体験的な外的活動であり，一方，その作図の意味，つまり，その操作をするわけを考えることは内的な思考活動に当たる。この両方の活動により，図形の概念間の関係について理解を促進することができる。具体的には，１組の三角定規を用いて，「２組の向かい合う辺が平行である」ようにかく。これは平行四辺形のかき方である。ひし形の場合は，これに加えて，「隣り合う辺の長さが等しく」なるように，コンパスを用いて，等しい辺を測り取る。このようにして，ひし形を作図することができる（図５）。この場合，平行四辺形とひし形の性質，それらの類似点及び相違点が用いられている。つまり，「２組の向かい合う辺が平行である」ということは類似点であり，「辺の長さがすべて等しい」かどうかが相違点である。これらには作図の操作が対応している。つまり，類似点については同様の操作が行われ，相違点については異なる操作が行われる。これにより，作図の操作を基に，図形の性質の相違点及び類似点を再確認することができ，その結果，図形の概念間の関係を見出すようになる。つまり，ひし形も平行四辺形の仲間である，もしくは，ひし形は平行四辺形の特殊な場合であるということを見出すのである。

以上のように，子どもは外的な活動とともに，内的な思考活動を行い，図形を作図することや図形の性質について探究することを目指して，主体的に算数的活動に取り組むことができると言えよう。この場合，図形の概念やそれらの関係などの既習内容を活用して，作図方法を自ら見つけ出すことができる。また，図形を関係づけて考えることにより，関係概念のよさを知り，学習意欲を高めることもできるだろう。

5.3 算数的活動を促す指導の留意点

算数的活動を行うことができるようにするためには，どのような指導が必要か，その留意点について述べる。第一に，子どもは常に何かをやろうとする意欲があることを念頭に置き，子どもの知的発達に応じて必要感を自覚させ，その上で，子どもが自分なりに仮説を立てたり，問題を整理したりしながら探究していける問題を取り上げなければならない。すなわち，子どもが解決せざるを得ない，解決してみたいと思うような課題を取り上げることが重要である。

第二に，算数的活動は子どもが目的意識をもって行うことであるから，教師は子どもが気付くことまで言わないように注意し，彼らが気付いたことや考えたことを表現させる機会をできる限り多くつくることが必要である。内的な思考活動を促すために，考えたり調べたりする機会

及び考えたことをさらに考える行為を促すようにしなければならない。

第三に，教師は以下のような支援をすることが必要である。問題解決においては，答えを与えるのではなく，その子どもが困っていることを自覚できるような質問をしたり，問題を意識できるようにしたりしなければならない。特に，戸惑いや自信のもてない子どもの内的な活動を活性化することができるように助言したり，子どもの悩みの基を見抜き，子どもが何を基に考えていけばよいか，これは確かに考えるべき問題だと意識できるように支援したりすることが必要である。

第四に，算数的活動は，それが学習指導の目標であり，かつ，その方法でもあることから，評価に関しては，知識や技能の習得状況を明らかにするだけでなく，考え方や関心・意欲・態度についてより一層強調されなければならない。したがって，子どもがどのような考え方をしているのか，あるいは，どのような考え方をしようとしているかを明らかにすることが必要である。また，子どもの学習意欲や態度面に重点を置き，学習の結果だけではなく，一人ひとりの子どもの学習過程を見ていかなければならない。そして，子どもが主体的に取り組み，また，取り組み続けていけるように評価することが重要である。

第五に，問題解決において，教師は何を考え，どのように自分に問いかけて考えを深めたのか，そのありのままの自身の姿を子どもに率直に見せる場面を設定することも必要だろう。これにより，子どもは算数的活動とは何か，それをどのように行えばよいかについて知り，算数的活動を行うことを動機づけられる。このためにも，算数的活動を行う授業の前に，何を課題とするか，その課題はどのように考えられるか，どんなことに気付かせるかを，教師自身が予め考え，整理しておくことが重要である。

６．新しい図形教育のあり方

第一に，我が国の図形教育は小学校段階と中学校段階をつなぐ内容，すなわち，具体的な図形の表現を基にして，抽象的で論理的な思考を行う内容が少なく，それらが適切な位置に配列されていない。この問題点の改善のために，小学校においては中学校で新たに導入される概念の素地指導を，活動場面を通じて行うことが必要である。

線対称・点対称な図形，拡大図・縮図は，これまでの教育課程では，小学校で扱われていた内容であったが，新教育課程では，これらの内容は中学校へ移行された。したがって，小学校では全員に必ず身に付けられるようにする内容ではない。しかし，先に述べたように，子ども自身が活動を通じて発見できることもある。したがって，小学校では，対称性や相似などの中学校における学習内容についても，その素地指導を，算数的活動を通じて行えるようにすることは必要である。例えば，モザイクパズルを使って，２つの合同な図形を組み合わせることによって，線対称，点対称な図形をつくること，形が同じで大きさが異なる（相似な）二等辺三角形をつくり，それらに共通な性質として，対応する角の大きさが等しいことを見つけて，述べることなどが考えられる。

第二に，これまでの教育は新たな知識や技能，考え方などを身に付けることを中心に進められてきた。しかし，これだけでは十分に身に付かなかったり，学習した意味が分からずに意欲をそがれたりすることにもなる。とりわけ，図形教育においては，学習して身に付けた事柄を活用する場面が少ないことから，活用場面を数多く設定し，図形領域だけなく，他領域の内容と総合的に学習が行われるようにする必要がある。このように，既習内容を活用する場面を設定することによって，子どもがそのような場面で主体的に学習できるようにすることになる。また，これにより，繰り返し学習を促すことができ，その経験を通じて，使ってよかったという感動を覚え，意欲的に学習に取り組む態度を養うこともできると考えられる。

第三に，新学習指導要領では，算数的活動を通じて，また，算数的活動ができるように，算数の学習が進められることが目指されている。しかしながら，活動と聞くと，すぐに身体を動かすことが思い浮かぶかもしれないが，算数的活動の「活動」は広い意味を有するものである。つまり，それは思考活動が常に伴うということである。作業的・体験的な具体的活動と論理的な思考活動のどちらが欠けても，十分な学習とはなり得ないことから，そのバランスを上手にとることが必要なのである。つまり，外的な活動については，その後で，内的な思考活動を行えるようにすること，また，思考活動だけですませることは止め，必ず，その具体化やイメージ化をはかることである。このような学習を続

けることにより，直観でとらえたことを論理的に裏付けするという方法やそれを行う態度の基礎を身に付け，自ら図形の学習を進めていこうとすることができるようになるだろう。

７．おわりに

本稿では，我が国の図形教育の問題点を明らかにし，それを解決するための方策を示した。第一に，小学校における素地指導である。これまでに学習内容として位置づけられていた内容については，図形教育上重要であることから，それを様々な活動等を通して示唆的に取扱うようにする。第二に，既習事項を活用する場面を設定することである。これは「生きる力の育成」に関わり，領域間で学習内容が密接に結びついていることを明らかにし，子どもたちの総合的な力を育成することを目指している。第三に，外的な活動と内的な思考活動のバランスのとれた算数的活動を中核とする学習を行い，そのような態度を身に付けるようにすることである。

その著書『生産的思考』で有名なウエルト・ハイマァによれば，幾何学の課題は生活の静かな，純粋な，平和な，すっきりした領域の課題であり，透明な水晶のように済んだ仕方で処理することが可能であるという。そして，これは教育者たちが幾何学の研究を再三奨励した理由の一つであるという。ここでは，幾何学の課題がもつ明快で矛盾なく処理することができるという魅力が述べられている。さらに，「幾何学は，明瞭にして透明な一貫性を持つ雰囲気のなかで心的能力の発達を許し，そして，もっと複雑でもっと簡明でない事柄に関して考える場合にも同じく正確な態度を持するための助けとなる。」と続けている。これはまさに幾何学の学習を通じて，考える力及び態度を育成することができることを意味している。このような意義を踏まえるとともに，幾何学の魅力を教師自身が感じ取り，子どもたちに伝えるようにしたいものである。

最後に，これまでの教育では，間違ったこと，不得意なことは何かを明らかにし，それを改善することに力が注がれていたように思われる。確かに，そのことは子どもが望ましい方向へと進んでいくためには必要不可欠なことであろう。しかし，苦手なこと，嫌なことばかりをするのであれば，やる気は損なわれてしまうだろう。これからは，上述のことと同様に，好きなことや得意なことを十分できるようにしなければならないと考える。好きなことなら，長時間でも続けられることから，その過程で，素晴らしいアイデアを思いついたり，自ら何か新しいことをつくり出したりすることもできるのではないだろうか。

子どもたちが図形の学習を好きであれば，それをなくすのではなく，それをやり続けることを奨励したいものである。子どもたちが楽しんで学習している姿を通して，私たちは子どもの内に秘められた素晴らしい力をうかがい知ることができるだろうから。

引用参考文献

- Carpenter,T.H.& Lehrer,R.(1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema and T. A. Romberg(Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*(pp.19–32). Mahwah,NJ: LEA.
- 松尾七重 (1999). ７ピース・モザイクパズルを使った楽しい算数的活動. 新しい算数研究,345,34–37.
- 松尾七重 (2000).算数・数学における図形指導の改善. 東京：東洋館出版社.
- 松尾七重 (2001). 我が国の数学教育における図形領域の特徴. 千葉大学教育学部研究紀要,49 Ⅰ,97–108.
- 松尾七重 (2001). 図形の概念の活用による理解の促進－小学校５年生の面積の授業を通して－. 第34回数学教育論文発表会論文集, 463–468
- 文部省教育課程審議会 (1998). 幼稚園,小学校,中学校,高等学校,盲学校,聾学校及び養護学校の教育課程の基準の改善について(答申).
- 文部省 (1999). 小学校学習指導要領解説算数編. 東京：東洋館出版社
- 文部省 (1999). 中学校学習指導要領解説数学編. 大阪：大阪書籍.
- Moore,R.C.(1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 249_266.
- National Council of Teachers of Mathematic (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of

Teachers of Mathematics.
- van Hiele,P.M.(1984). A child's thought and geometry. In D.Geddes,D.Fuys,& R. Tischler(Eds.),*English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P.M.van Hiele* (pp.243-252). Research in Science Education Program of the National Science Foundation. Washington, D.C.: NSF.
- van Hiele, P.M.(1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, *5*(6), 310-316.
- ウエルト・ハイマァ (1967). 矢田部達郎訳. 生産的思考. 東京：岩波書店. (原著出版は1943年)
- 山崎七重 (1991). 日本の教科書における幾何の活動についての一考察－ファンヒーレモデルを基にしてー. 第24回数学教育論文発表会論文集(発表資料), 145-150.
- 吉川成夫 (1994). 個に応じた算数科の学習指導. 初等教育資料,608,64-71.
- 吉川成夫 (1999). 小学校新教育課程の解説－算数. 東京：第一法規.

付録：全米数学教師協会（ＮＣＴＭ）の幾何スタンダード

学校数学のプリンシプルとスタンダード

全米数学教師協会（以下，ＮＣＴＭとする）はアメリカ合衆国において，1920年に設立された教育連合団体であり，幼稚園から高等学校までの数学の学習と指導の改善及び子どもにとっての最善とは何かについて議論を進めている。ＮＣＴＭは2000年４月に，学校数学プログラムの基になる６つのプリンシプルと，数学的内容及び過程についてのねらいを示した10のスタンダードを含む『学校数学のプリンシプルとスタンダード』を出版した。これは既に出版されている３つのスタンダードを発展されたものである。プリンシプルは質の高い数学指導プログラムの基礎的な特徴を明らかにし，教育的な意志決定の手引きを示している。これは次の通りである。公正のプリンシプル，カリキュラムのプリンシプル，教授のプリンシプル，学習のプリンシプル，評価のプリンシプル，テクノロジーのプリンシプルである。

また，10のスタンダードは幼稚園就学前～第２学年，第３～５学年，第６～８学年，第９～12学年の各段階で子どもが習得すべき数学的理解，知識及び技能について述べている。５つのスタンダードは子どもが成功できるように学習する数学の内容を示し，他の５つは数学の内容についての知識を習得し，活用する方法を明らかにしている。それらは以下の通りである。数と演算，代数，幾何，測定，データ解析・確率，問題解決，推論と証明，コミュニケーション，関連，表現である。

この10のスタンダードでは，高等学校卒業直後に進学するか就職するかに関わらず，すべての子どもが学習する機会をもつべき基礎数学を定めている。すべての子どもは高等学校に就学したならば，４年間数学を勉強することが期待されている。将来何をするかに関わらず，数学はその一部であり，広く深い数学プログラムを提供することによって，子どもは広い範囲から職業や教育を選択し，それに成功する能力を確実に身に付けられると考えられている。

学校数学のプリンシプルとスタンダードの特徴は次のように明らかにできる。第一に，算数・数学の内容領域に加えて，数学過程に関してもスタンダードが設けられていること，第二に，高等学校卒業までにすべての子どもが数学を勉強する必要性及びその内容が示されていること，第三に，問題解決を中心に据えていることである。このプリンシプルとスタンダードは我が国の学習指導要領とは異なり，法的拘束力はないが，他の国で目指されている数学教育のビジョンとして参考にすることができる。

幾何スタンダード

幾何スタンダードでは，幾何教育のねらいが以下のように述べられている。「２，３次元の図形の特徴や性質を分析し，幾何学的関係について数学的に説明する。座標幾何や他の表現系を用いて，位

置を特定し，空間の関係を表す。数学の場面を分析するために，変換を応用し，対称性を活用する。問題を解決するために，視覚化，空間的推論及び幾何学的モデリングを活用する。」

以上のことは，次の４観点として示されている。「２，３次元の図形の特徴や性質の分析，幾何学的関係についての数学的説明」「座標幾何や他の表現系を用いた位置の特定，空間関係の表現」「数学の場面を分析するための変換の応用，対称性の活用」「問題を解決するための視覚化，空間的推論及び幾何学的モデリングの活用」である。

さらに，幾何スタンダードでは，上述の４つの観点のそれぞれに関して，幼稚園就学前～第２学年，第３～５学年，第６～８学年，第９～ 12 学年の各段階に対応して，その詳しい内容や指導上の留意点が述べられている。

我が国の図形教育の改善点

ＮＣＴＭの目指す図形教育と我が国の図形教育を比較することによって，上述の４つの観点から，我が国の図形教育の改善点を示す。第一の観点である「図形の特徴の分析と幾何学的関係についての説明」については，スタンダードでは，２，３次元の図形の特徴及びそれらの関係についてとらえ，それを演繹的推論を通じて理解できるようにすることになっている。我が国においても，平成元年の学習指導要領では，小学校低学年から系統立てて，図形についての指導が行われることになっていた。しかし，新学習指導要領では，小学校第４学年や中学校第２学年での四角形の相互関係は削除されてしまった。小学校で様々な図形を学習するが，その関係を扱わず，また，それを証明を通じて理解する機会もなくなってしまった。子どもは小学校から四角形の学習を行っていくが，何のために何を目指して学習してきたのか分からないままになるのではないだろうか。

第二の観点である「位置の特定と空間関係の表現」については，スタンダードでは，高等学校段階で学習する座標幾何の基礎を学習することが小学校低学年から考えられている。しかし，我が国の新学習指導要領では，ものの位置の表し方(空間)が削除されてしまった。空間座標は高等学校での必修科目にはなっていないこともあり，削除されてしまったのだろうか。しかし，数学を学び続けていけば，座標を用いて学習することは必須である。しかも，３次元は我々の生活している空間である。このような数学の最も基礎的で，かつ生活にも活用できる内容を低学年から少しずつ丁寧に扱っていくことは必要のないことだろうか。

また，３次元の図形については，新学習指導要領では，多くの内容が中学校へ移行され，投影図などは扱われない。しかし，数学を日常生活に生かすことなどを考えれば，立体図形の考察や投影図などの表現方法は必要不可欠な学習内容ではないだろうか。

第三の観点である「変換の応用と対称性の活用」については，スタンダードでは，幾何の内容の重要な部分として，変換が取り上げられている。しかし，我が国の新学習指導要領では，合同及び拡大図・縮図の内容が中学校へ移行され，中学校では図形の移動が削除された。そのため，この観点に相当する内容は小学校からはほとんど姿を消してしまい，中学校でも限られた時間の中で扱うしかないことになる。ここでの学習はインフォーマルに図形を取扱う証明への橋渡しとなる活動である。これはこれまでにも十分であるとは言えなかったが，新学習指導要領における少ない内容ではこれまでの問題点を改善することができるのだろうか。他の内容に関連させて取扱うような工夫が必要であろう。

第四の観点である「視覚化，空間的推論及び幾何学的モデリングの活用」については，問題解決を中心として，図形領域の内容を他領域や他教科，日常生活に関連させて，総合的に学習を進めようとする意図が読みとれる。我が国の新教育課程でも，生活場面での活用や知の総合化はとりわけ強調されていることである。しかしながら，実際にどんな内容をどのように扱っていくかは明確には示されていない。この点で，スタンダードから得られる示唆は大きいと言えよう。

以上より，ＮＣＴＭで目指す図形教育は，簡単に言えば，これまでに我が国で実施されてきた十分な内容の学習に，問題解決を中心とした総合的な学習とテクノロジーを用いた学習が加わったことになると言えよう。内容として，スタンダードにはこれまで我が国で削除されてきたものが含まれていることを考えれば，新学習指導要領において削除されたり軽減されたりした内容は決して重要でないと言えるものではない。学習指導要領に示されている内容に関連させて学習できるように，また，子どもが自らそれらについても考えていけるようにするための手立てを考える必要がある。