

# 学校数学における証明の機能としての体系化に関する研究

## 記述的公理化に基づく体系化による結果の経済性に焦点を当てて

和田 達次

指導教官：溝口達也，矢部敏昭

### ・研究の目的と方法

従来より論証指導における問題点として，子どもが証明の必要性を感じないこと・証明を構成することができないこと・証明を誤ることなどが挙げられている。宮崎(1997)は，上述の問題点を教授/学習の困難と捉え，それ以外に教材の改善の必要，証明指導の存在意義の疑問視といった問題点を指摘している(pp.51-52)。これらの学校数学における論証指導の問題点を改善していこうとする考えを基に論証指導に関する研究がなされているが，実際にはあまり改善されてきていないようである(国宗,2000)。

もちろんこれら全ての問題点の改善が望ましいと考えられるが，全ての改善は困難であると考えられる。では，どの問題点に焦点を当てるべきであるのか。結論からいえば，本研究では特に教材の改善といった問題点に焦点を当てる。それは次の理由による。例えば，上述の教授/学習の問題は，子どもが既知の事柄についてなぜ証明が必要なのかといった疑問を持ったり，証明したことがなんの役に立つのかが分からないことが考えられる。これは，教師による教授の問題と考えられるが，教師が用いる教材が関係していると考えられる。また，証明指導の存在意義に関する問題点に対しては，証明が数学においてのみ必要とされるのではなく，証明学習において学習した事柄を学校数学以外で活用できることが必要であると考えられる。よって，この目的に応じた教授の方法や教材が必要とされる。以上より，教師による教授の方法の改善といった考えを基に，教授に必要とされる教材の改善に焦点を当てるべきであると考えられる。では，教材の改善のためにどのような観点から考えるべきなのか。

ここで中学校学習指導要領の論証指導における目標を見てみると，証明の意義や方法の理解が目標とされ，筋道を立てて説明する表現力や論理的な思考力の育成が期待されている。この

ことは単に証明を記述できる生徒を育成することではなく，生徒により学習された事柄が，例えば日常といった数学以外へ活用できることを期待していると考えられる。これと類似の観点から宮崎(1997)は，証明の意味・機能を知ることなく証明を構成できてもそれは表面的なものであり，学校数学それ以外の場面での適切な活用は期待できないと指摘する。つまり，証明学習において子どもたちが学習した事柄の活用を期待するならば，証明の機能に着目すべきであると考えられる。

このような証明の機能に関する研究はこれまでも報告されている(De Villiers,1990など)。それらの研究は数学における証明の機能といった観点からいくつかの機能に分類しているが，学校数学においてはそれらの機能全てに同じように重点を置くべきではないことが指摘されている。この指摘に基づき，比較的十分な追及がされていない機能として体系化の機能があげられる。しかし，体系化という活動は，知識を体系化し整理することによって，思考の経済が得られたり，知識の伝達を有効にするといった可能性を含んでいると考えられる。したがって，数学において重要な考え方であるだけでなく他の学問においても重要な考え方である。このように証明の機能としての体系化は，数学だけでなく必要な考え方であり，学校数学で学習したことの活用を期待する上で着目する意義があると考えられる。よって，本研究では，特に体系化の機能に焦点を当て，証明の機能を取り入れた教材を考える。そのために数学における証明の機能としての体系化を中学校の論証指導に効果的に反映するために必要とされる考え方について明らかにすることを目的とする。

この目的を達成するために次のような方法をとる。まず，数学における証明の機能について明らかにすることが必要とされるため，数学における証明の機能の分類やその分類する観点に

ついて先行研究から明らかにする。その上で、学習における証明の機能の捉え方を考察し、論証指導において体系化の機能に着目する意義を示す。次に、論証指導における証明の機能としての体系化に必要な考え方について、先行研究における演繹的な推論の本性、厳密さの問題、根拠を探る活動の必要性などの観点から考察する。また、De Villiers(1986)による公理化の考え方に基づき、本研究で捉える証明の機能としての体系化の方法を規定する。さらに、その方法により体系化された結果として果たされる機能を学習における体系化の機能として捉え直す。その上で、体系化の機能として結果の経済性に焦点を当てるべきであることを示す。以上より、学習における証明の機能としての体系化についての捉え方や扱い方などといった理論的な考察が行われることになる。この理論的な考察によって規定された事柄に基づき、教授実験・インタビュー調査を行い実証的に考察する。この調査によって、学習において生徒が記述的公理化に基づく体系化による結果の経済性を志向するために必要な事柄を特定する。さらに、そこで得られた結果をもとに論証指導に対する示唆について考察する。

## ・論文の構成

- 1章 本研究の目的と方法
  - 1.1 問題の所在
  - 1.2 本研究の目的
  - 1.3 本研究の方法
- 2章 証明の機能
  - 2.1 証明の機能の分類
  - 2.2 証明の機能としての体系化に着目する意義
  - 2.3 本章のまとめ
- 3章 学習における体系化の性質と方法
  - 3.1 先行研究における体系化の機能
    - 3.1.1 Fawcett の証明の本性の観点
    - 3.1.2 Freudenthal の局所的組織化の観点
    - 3.1.3 杉山の公理的方法の観点
  - 3.2 本研究における体系化の機能
    - 3.2.1 「記述的公理化」に基づく体系化
    - 3.2.2 体系化の機能の性質
    - 3.2.3 体系化の機能としての「結果の経済性」を捉える視点
  - 3.3 本章のまとめ
- 4章 実証的考察
  - 4.1 調査の概要

- 4.1.1 調査の目的・方法
  - 4.1.2 調査の対象
  - 4.1.3 調査問題の性質
  - 4.2 「結果の経済性」を志向する活動に必要な事柄
    - 4.2.1 演繹する必要性を認識する
    - 4.2.2 諸命題間の関係を認識する
    - 4.2.3 前提を特定し、体系全体について把握する
    - 4.2.4 結果の非経済性を認識する
    - 4.2.5 結果の経済性を認識する
  - 4.3 本章のまとめ
  - 5章 本研究の結論
    - 5.1 本研究における結論
    - 5.2 教授学的示唆
    - 5.3 今後の課題
  - 引用・参考文献
  - その他の参考文献
  - 資料
- (1 ページ 35 字 × 30 行, 81 ページ)

## ・研究の概要

本研究の目的達成のために、以下のような研究課題を設定し、その解決を試みる。

研究課題1 数学における証明の機能としての体系化とはどのようなものか

研究課題2 論証指導では証明の機能としての体系化はどう扱われるべきか

研究課題3 体系化の機能活用のために必要とされる事柄は何か

### 3.1 証明の機能

まず、研究課題1を解決するために、数学における証明の機能の分類について明らかにする。これまで証明の機能の分類についての議論は様々にされているが、特にBell(1976)による証明のセンスといった観点とDe Villiers(1990)による証明の機能といった観点により分類されている。例えば、前者の証明のセンスの観点は、証明が人に与える印象や感覚として捉えられる。これに対して、後者の証明の機能の観点は、人が証明を使って何ができるかといった捉え方である。学校数学においては、De Villiersによる証明の機能の分類に基づくべきであると考えられる。なぜなら、学校数学においては子どもたちが証明を学習し活用することを期待するためである。このような証明の機能といった観点に基づく、立証(verification) / 説明(explanation) / 体系化

(systematization) / 発見(discovery) / コミュニケーション(communication)といった5つの機能に分類される。特に証明の機能としての体系化は、人が証明を使って、公理、主な概念、定理の演繹的な体系へ様々な結果を位置づけることとして定められる。

また、論証指導で証明の機能としての体系化に着目する意義については次のように考えられる。中学校学習指導要領において演繹的に推論することにより体系的に整理することが利点として挙げられており、論理的な思考力、つまり演繹的な推論をする力を子どもたちに育成することが目標として考えられている。ここでの体系的に整理することの利点は、知識を体系的に整理することにより、知識の伝達が容易なことなどが考えられる。この考え方は、数学以外においても有効な考え方である。また、証明の機能としての体系化は、演繹的な体系へ様々な結果を位置づけることであるため、体系化するために演繹的な推論が必要とされる。よって、証明の体系化の機能活用により上述の目標の達成につながると考えられる。また、問題解決において、子どもたちが答えを導ける理由の確かさよりも答えを導く処理の確かさを優先するといった傾向が指摘されている(宮崎, 1993)。この傾向は、中学校において論理的な思考力の育成を考えるうえで望ましくない傾向である。これに対して、論理的な関係を見いだすために根拠を明らかにすることによって、この傾向の改善につながることが考えられる。つまり、体系化の機能活用によりこのような傾向の改善につながるといったことが意義として考えられる。

### 3.2 証明の機能としての体系化

次に、証明の機能としての体系化を論証指導に反映するために必要な考え方について考察する。そのために、先行研究における体系化に必要とされる観点について明らかにする。これによって、研究課題2の解決を試みる。

#### 3.2.1 先行研究における観点

前述のように子どもたちが証明の機能について知ることなく証明を構成できたとしても証明の学習が望ましいとは考えられない。よって、教師により既に体系化された体系を与えられるべきでなく、証明の学習を通して子どもたちが主体となり体系化することとして捉える必要がある。このように子どもたちを主体とするなら

ば、学校数学においては数学における厳密さを求められるべきではないと考えられる。それは、子どもたちが数学者に比べ数学に成熟していないためである。この考えに基づくと、学校数学においては厳密さを考慮し、証明の機能としての体系化をFreudenthal(1971)による局所的組織化(local organization)として捉える必要がある。また、Freudenthal(1973)は、厳密さの基準が異なることを前提とし、「なぜ?」を問い、それに対して適切に答えることができるならば、それは厳密な数学であると述べる。つまり、子どもたち自身が「なぜ?」を問い、それに対して根拠とする事柄を適切に述べられることが必要とされる。よって、厳密さは教師のよる厳密さではなく、子どもたち自身により定められるべきであると考えられる。

また、体系化の機能は演繹的な体系に結果を位置づけることである。すると、数学において体系化の機能活用のためには公理が必要とされる。このとき、Fawcett(1938)による演繹的な推論の本性的観点から、事柄の正しさが公理に依存するといった相対的な真理観が必要である。また、体系化の機能活用のためには子どもたちが公理のような前提を求める必要があり、そのために杉山(1986)における公理的方法の考え方に基づく「根拠を探る」といった活動が必要とされると考えられる。この「根拠を探る」活動にも「なぜ?」を問うことが必要とされる。

#### 3.2.2 学校数学における体系化の方法

上述のように証明学習において子どもたちを主体と捉えるという考え方にに基づき、学習における体系化の方法を考察する。そのため体系化の方法としてDe Villiers(1986)による公理化の考え方を明らかにする。この公理化の考え方は、「構成的公理化(constructive axiomatization)」と「記述的公理化(descriptive axiomatization)」とに分類されている。「構成的公理化」は、既に存在する体系における公理についての交換などを通して、交換された公理から導かれる新しい命題を発見し体系を構成するといった考え方である<sup>1)</sup>。これに対して「記述的公理化」は、既知の諸命題を証明することによって論理的に関係づけ、公理のような前提を定めるといった考え方である(図1参照)。本研究では、後者の「記述的公理化」に基づく体系化に焦点を当てる。なぜなら、体系化することを子どもたちが主体的に学習するためには、既に体系化された体系

を与えられるべきではないという考え方に基づくためである。また、「記述的公理化」に基づく体系化は、既に記述が残されている命題を論理的に関係づけることにより体系化することである。すると、諸命題についての記述が必要とされる。しかし本研究では、体系化する活動において生徒の思考過程に焦点を当てるため、生徒による諸命題の記述や証明の厳密な記述までは特に必要ないとする。

### 3.2.3 体系化の機能

上述のように体系化された結果として果たされる機能について、De Villiers(1990)は以下の5つの機能に分類している。

- (1) 明確でない仮定などの特定
- (2) 結果の経済的な提示
- (3) 潜在的な公理構造の露呈による全体的な見方の提示
- (4) 数学の内部と外部の両方への適用
- (5) 新しい見方を与えるような演繹的体系へのつながり

これらの機能は、数学における体系化の機能であるが、学校数学においてはこれらの体系化の機能全てを対象とすべきでないと考えられる。例えば(4)の機能は、既に体系化された体系を基に物理などといった数学の外部への適用を考えることである。また(5)の機能は、存在する演繹的な体系に対して新しい見方を与えることにより新しい体系を発見するといった機能である。本研究においては、子どもたちにより主体的に体系化することとして捉えるため、このように既に体系化された体系を他へ適用することやそれを基に新しい体系を作り上げることは対象とされない。

これに対して、De Villiers(1986)は、論理的に関係づけられた概念や陳述は、関係づけられていない概念や陳述に対して覚えるのが容易であること、及び知識の経済化が、子どもがより効果的に学習する助けになり得ることを指摘した(p.21)。このことに関して、上述の(2)の機能活用により結果の経済性が得られるならば、生徒は証明についてより効果的に学習できると考えられる。また、証明学習の問題点として生徒が循環論に陥ることが挙げられる。このように循環論に陥る原因の一つとして、ある命題の証明に多くの命題を根拠として用いることなどといった証明の思考過程が複雑になることが考えられる。この循環論の原因である証明の思考過程の複雑さについては、体系化の(2)の機能活用により結果の経済性を志向することによって少なからず改善されると考えられる。また、暗黙の前提を特定することや体系を全体的に把握することは、体系化の機能として結果の経済性を志向するために必要とされると考えられる。つまり、(1)の機能の活用や(3)の機能の活用が前提とされる。よって、学校数学においては、(1)や(3)の機能の特徴を踏まえながら、体系化の機能として(2)で示された結果の経済性に焦点を当てるべきであると考えられる。

### 3.2.4 体系化による結果の経済性を捉える視点

以上のように体系化の機能として結果の経済性に焦点を当てる。しかし、学校数学において、体系化の機能として結果の経済性をどのように考えるのかといった疑問が生じる。よって、子どもたちを主体とした学習において結果の経済性を捉える視点が必要とされると考えられる。これに対して本研究では、体系化の機能として

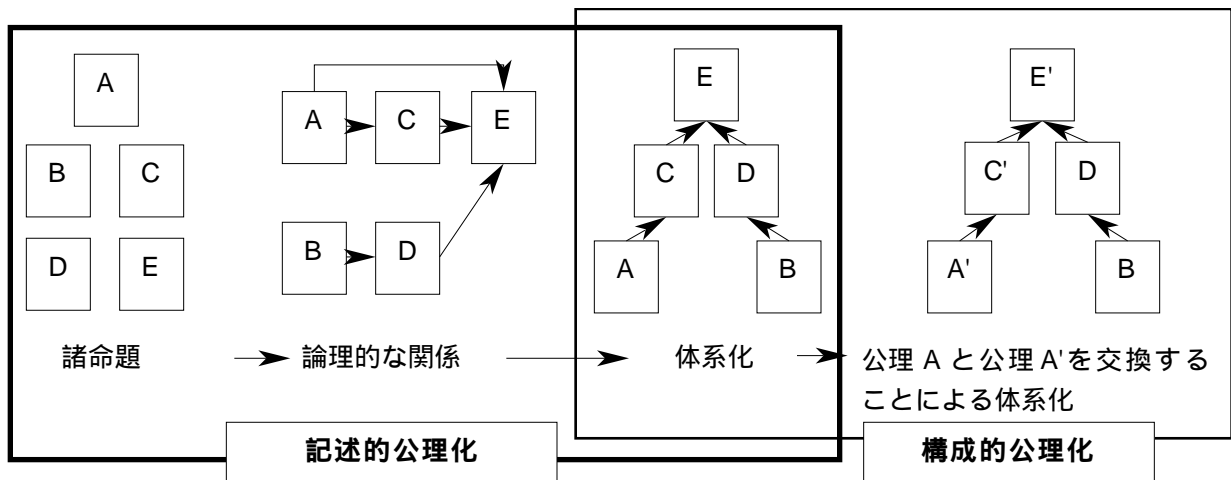


図1 記述的公理化と構成的公理化

の結果の経済性を単に証明の記述が簡潔になることだけでなく、証明の思考過程が簡潔になることであると捉え、その結果の経済性を捉える視点として以下の視点を設定した。

(視点1)生徒が体系化した体系に基づき、証明自体を単純化する傾向にある(証明の処理あるいは手続きの経済性)

(視点2)生徒が体系化した体系に基づき、暗黙の前提を特定し、その特定された前提から証明する傾向にある(証明において用いる根拠を少なくすることに基づく経済性)

(視点1)は、諸命題を論理的に関係づけることによって、ある命題の証明に用いる根拠をさらに証明することなく用いることができるといった経済性である。つまり、証明する過程において処理や手続きが単純になり結果の経済性につながるという視点である。これに対して(視点2)は、諸命題を論理的に関係づけ暗黙の前提(根拠)を特定し、ある命題を証明するとき、その特定された前提の中から根拠として用いる命題をできるだけ少なく選択する。これにより根拠として用いることのできる命題が少なくなり体系が単純になるといった経済性である。このとき、特定された前提のように確実な命題を用いることによって証明の過程において確実性につながることも考えられる。

ただし、生徒が演繹的に推論することにより諸命題の論理的な関係を捉えたうえで、上述のような経済性を志向しなければならないと考えられる。したがって、生徒は体系化による結果の経済性の性質を捉えるために上述の両方の視点を持つことが必要である。なぜなら、ここでの議論は、前述の処理の確実さと理由の確実さについての議論と同様に捉えられるためである。つまり、理由の確実性を認識したうえで、処理の確実性を優先しなければならない。また、その逆のことも言える。

### 3.3 実証的な考察

以上の理論的な考察により規定された事柄に基づき、実証的な考察が必要とされる。なぜなら、理論的な考察だけでなく、実際の教授学習場面において必要とされる事柄について考察しなければならないと考えられるためである。これにより研究課題3の解決を試みる。

#### 3.3.1 調査の概要

本研究では、生徒が体系化の機能として結果

の経済性を志向する活動に必要な事柄を特定するために教授実験・インタビュー調査を行う。この方法を適用したのは、実験で扱われる調査問題において被験者が証明を構成できない可能性があり、観察者による支援が必要であると考えたためである。また、インタビュー調査という形式を適用したのは、教師による「なぜ?」「根拠は何か?」などの体系化において必要とされる「根拠を探る」活動を促すための発問をすることによって、実際の教室に近い状況において被験者が考えている事柄を明らかにするためである。以上の考えに基づく調査から得られるプロトコルを分析することによって実証的に考察を行う。また、本研究においては子どもの思考過程に焦点を当てるため、厳密な記述が必要とされなかった。よって、調査においても証明についての厳密な記述は特に残されなかった<sup>2)</sup>。

本調査において対象としたのは、中学校第3学年の男子生徒である。対象を選択した理由は、中学校第3学年では既に第1学年において図形の基礎を学習し、第2学年において図形の性質や証明を学習してきており、諸命題についていくつが既に知っていると考えられたためである。

また、教授実験を行う際に調査問題を提示するのであるが、その調査問題が先に設定した結果の経済性を捉える視点に基づき、次の性質を備えているべきであると考えられる。

(性質1)生徒が、命題について複数の証明を考える可能性を持つ

(性質2)証明された命題を他の命題の証明において活用できる可能性を持つ

調査問題にこれらの性質が必要とされるのは、次の理由のためである。体系化の機能として結果の経済性を志向するために生徒が経済的である証明と非経済的である証明を考えたと、経済性について認識できなければならないと考えられる。そのため、命題についての複数の証明を考え、それらの証明を振り返ることにより根拠として用いた命題などを論理的に関係づけ体系化する。その結果として、経済性について認識できると考えられる。よって、(性質1)が必要とされる。(性質2)の必要性は、演繹することにより妥当性が得られ、体系化のために必要な演繹の必要性について認識することができると考えられるためである。また、それらの命題を体系化することで、生徒が既に演繹的に証明した命題については再度証明しなくとも他の命題の

証明に用いることができるといった結果の経済性を認識できると考えられる。このことは経済性の性質を捉える視点として定めた(視点1)により捉えられる経済性を志向する可能性を含んでいると考えられる。もちろん、この(性質2)には(視点2)から捉えられる経済性を志向する可能性も含まれている。

本調査においては教授実験・インタビュー調査を2つのセクションに分割し、それぞれに調査問題を与えている。なぜなら、それぞれの調査問題がどちらも両方の性質を備えているのではなく、調査問題1と調査問題2(資料参照)を組み合わせることで、これらの両方の性質を満たすように作成されているためである。

### 3.3.2 調査により得られた事柄

以上のような調査を基にした実証的な考察により、生徒が体系化の機能として結果の経済性を志向するために次の5つの事柄が必要であることが明らかにされた。

- (1) 演繹する必要性を認識する
- (2) 諸命題間の関係を認識する
- (3) 前提を特定し、体系全体について把握する
- (4) 結果の非経済性を認識する
- (5) 結果の経済性を認識する

これらの事柄が経済性を志向する活動に必要なとされるのは、次のように考えられるためである。記述的公理化に基づく体系化は、諸命題を証明することにより論理的に関係づけ体系化することである。よって、(1)のように生徒が実験・実測だけでなく演繹的な推論の必要性を認識する必要があると考えられる。また、結果の経済性を志向するためには、例えば生徒が視覚的な判断や命題の暗記によって、この命題の証明には決まった命題を使って証明できると考えているとき、必ずしも経済性があるとは考えられない。よって、(2)のように体系化された諸命題の関係を認識する必要がある。さらに、論理的に関係づけることにより暗黙の前提などを特定する必要がある。また、それらの前提などを認識することで体系全体を把握する必要がある。なぜなら、体系全体を認識することにより、上述の(視点1)や(視点2)から捉えられるような経済性を志向することにつながると考えられるためである。よって、(3)の事柄が必要とされる。また、例えば根拠として用いることのできる事柄を確実性といった基準で選択するとき、必ずしも経済性があるとは考えられない。よって、生

徒自身が結果の経済性を志向するためには、(4)のように非経済的であることを認識する必要がある。このように認識した上で、結果の経済性を志向するためには、(5)のように経済的であることについて認識する必要があると考えられる。よって、上述の5つの事柄が結果の経済性を志向する活動に必要なとされる。

また、本調査により、生徒は上述の(視点1)から捉えられる経済性を志向する傾向にあり、(視点2)から捉えられる経済性を志向しようとは考えていないことが示された。しかし、非経済性について認識する上で、生徒は根拠の確実性を認識しており、単に処理や手続きが簡潔になるといった経済性を志向しているわけではないことが明らかにされた。

### 研究の結果

本研究における結論は、以下の通りである。

(1) 数学における証明の機能としての体系化を学校数学に効果的に反映させるために、子どもたちが証明を道具として使うといった観点から De Villiers による証明の機能の分類に基づくべきであることが明らかにされた。また、学校数学においては、証明の機能としての体系化が、中学校学習指導要領の目標達成、理由の確実さより処理の確実さの優先といった子どもの傾向の改善に必要なとされることが意義として明らかにされた。

(2) 本研究では、証明の体系化の機能活用のために、子どもたちを主体とした学習として捉える必要があることが明らかにされた。特に学校数学において扱う際に厳密さを考慮し、局所的組織化を考えるべきである。また、公理が重要であるといった相対的な真理観として捉えるべきであることが明らかになった。さらに、体系化の機能活用のためには子どもたちが公理のような前提を求める必要がある。つまり、「根拠を探る」といった活動が必要とされる。

(3) 本研究において、証明の機能としての体系化は、子どもたちを主体とする学習といった文脈において「記述的公理化」に基づく方法を提案する。その際、生徒の思考過程に焦点を当てるため、厳密な記述は特に必要ないことが明らかにされた。

(4) 学校数学においては、体系化の機能全てを対象とすべきでなく、いくつかの機能の特徴を踏まえながら、体系化の機能として結果の経済性に焦点が当てられるべきであることが示され

た。また、結果の経済性を捉える視点が必要とされることから、(視点1)生徒が体系化した体系に基づき、証明自体を単純化する傾向にある(証明の処理あるいは手続きの経済性)/(視点2)生徒が体系化した体系に基づき、暗黙の前提を特定し、その特定された前提から証明する傾向にある(証明において用いる根拠を少なくすることにに基づく経済性)を設定した。

(5)調査を行う上で、先に設定された結果の経済性を捉える視点に基づき、(性質1)生徒が、命題について複数の証明を考える可能性を持つ/(性質2)証明された命題を他の命題の証明において活用できる可能性を持つことが調査問題に含まれている必要がある。また、その調査を基にした実証的な考察により、生徒が体系化の機能として結果の経済性を志向するために次の5つの事柄が必要とされることが明らかになった。(1)演繹する必要性を認識する/(2)諸命題間の関係を認識する/(3)前提を特定し、体系全体について把握する/(4)結果の非経済性を認識する/(5)結果の経済性を認識する。

以上より、次のような教授に対する示唆が得られる。

「記述的公理化」に基づく体系化により結果の経済性が得られるが、そのためには子どもたちが処理の確実さのみでなく、理由の確実さを認識することが必要である。よって、教師から生徒に根拠を求めさせるための発問が必要であるなどの教授上の示唆が得られる。

また、生徒は教師の支援を得ることで体系化できることが調査を行うことによって明らかにされた。その際、その生徒の思考過程における簡潔さを捉えるために結果の経済性を捉える視点を設定し、その視点に基づき調査に用いる調査問題を作成した。つまり、結果の経済性を志向する活動を取り入れた指導に関する教材開発において、視点の設定が必要であると考えられる。

上述のように調査により特定された、体系化に基づき結果の経済性を志向する活動に必要とされる事柄は、少なくともそれらの事柄について育成される必要があることを指摘し得る。

今後の課題は以下の通りである。

本研究における調査は一人の生徒に対して実施されたため、複数の生徒が存在する教室といった状況において経済性を志向する活動に必要とされる事柄については明らかにされていない。

本研究は、学習における体系化の機能活用の

ために、体系化により得られる結果の経済性を志向する活動を思考の経済性と捉え、証明の思考過程に重点を置いている。したがって、公理のような前提の重要性に着目したが、その公理のような前提については教科書の範囲にとどめており、厳密さについての具体的な議論がされていない。

本研究では、公理化に基づく体系化を対象としているが、公理化とは異なる方法による体系化については言及されていない。

## 注

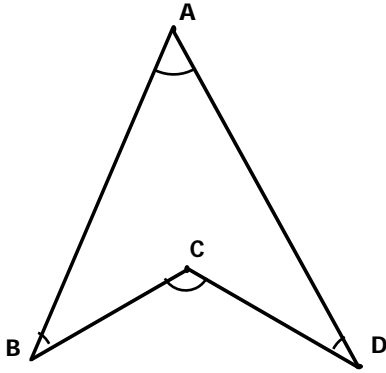
- 1)構成的公理化に基づく体系化において交換できる公理は、どのような事柄でも良いわけではなく、他の公理との無矛盾性や完全性、独立性といった基準で選択される。
- 2)本調査においては、例えば生徒が補助線を引くことによって根拠として用いようとした事柄などをインタビューにより明らかにしたため証明の厳密な記述は残されなかった。

## 主要引用・参考文献

- 国宗進(2000).図形の論証に関する理解度の変化 日本数学教育学会誌,第82巻 第3号,pp.66-76
- 文部省(1998).中学校学習指導要領解説 数学編 大阪書籍株式会社
- Bell,A.W.(1976).A Study of Pupils' Proof-explanations in Mathematical Situations.Educational Studies in Mathematics,7,pp.23-40
- De Villiers,M.D.(1990).The role and function of proof in mathematics.Pythagoras,pp.17-24
- 杉山吉茂(1986)公理的方法に基づく算数・数学の学習指導 東洋館
- 宮崎樹夫(1993)学校数学における証明の意義に関する考察;証明の機能に焦点を当てて 筑波大学教育学系論集,第18巻第1号,pp.155-169
- Fawcett H.P.(1938).The Nature of Proof.NCTM Year Book,New York;Columbia University Teachers College
- Freudenthal,H.(1971).Geometry between the devil and the deep sea.Educational Studies in mathematics,3(1), pp.413-435
- Freudenthal,H.(1973).Mathematics as an Educational Task.Dordrecht:D.Reidel,pp.147-154
- De Villiers,M.D.(1986).The role of axiomatisation in mathematics and mathematics education.URL:<http://mzone.mweb.co.za/residents/pr ofmd/homepage4.html>

## 資料

(調査問題 1)



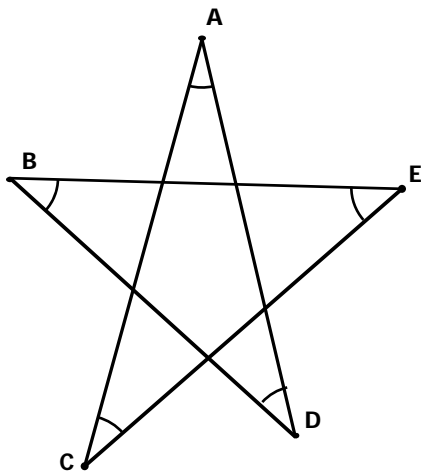
左の図は

「 $A + B + D = \angle C$ である」

このことを証明してください。

(証明)

(調査問題 2)



左の図は

「 $A + B + C + D + E = 180^\circ$ である」

このことを証明してください

(証明)