

関数教材におけるグラフ化の機能に関する研究

杉本 享靖

指導教官：矢部敏昭

I. 研究の目的と方法

指導要領では、変化する 2 量を身の回りの事象から見出すことが重要とされている。

しかし、教科書では既に依存関係にあるとされている 2 量が示され、重要とされている「依存関係を見出すこと」は扱われないように思われる。よって、具体的な事象の中から依存関係にある量を見出すことの指導とその理解が不十分であると考えられる。

また、グラフには、2 量の変化やその特徴が捉えやすく、身の回りの変化する事象から 2 量間にある依存関係を見出すには、グラフを用いるのが適していると考えられる。

そこで、本研究ではグラフに焦点を当て、その機能について考察することにより、関数教材におけるグラフ化の機能を明確にすることを目的とする。

その方法として、まず、関数の概念について文献研究を行う。次に数種の実測データをもとに描かれたグラフを観察することを通し、関数教材におけるグラフ化の機能を明確にしていく。しかし、もし、生徒にとってグラフの観察から関係を見出すことが困難である場合、教材にグラフを活用することは困難であると考えられる。したがって、生徒がグラフの観察から関係を見出すことは可能であるのかを確認するため、調査問題を作成、実施する。また、その一方で、グラフ化の機能に着目した事例の考察も行うものである。

II. 本論文の構成

第 1 章 本研究の目的

1-1 研究の動機

1-2 研究の目的と方法

第 2 章 関数の概念

2-1 順序対と直積集合

2-2 対応・関数・写像・関係

2-3 定義域と値域

2-4 直積集合の点表示

2-5 教科書の中の関数概念

第 3 章 関数教材におけるグラフ化の機能

3-1 依存関係の抽出

3-2 推測の構成

3-3 解の存在の確認

3-4 まとめ

第 4 章 依存関係に着目した生徒の様相

4-1 調査問題の目的と作成

4-2 調査問題の結果と考察

4-3 まとめ

第 5 章 グラフ化の機能に着目した事例の考察

5-1 事例考察 1 ～小学校 4 年「変わり方」～

5-2 事例考察 2 ～小学校 6 年「割合の計算」～

5-3 事例考察 3 ～中学校 2 年「線対称・点対称」～

(1 ページ 40 字×40 行，41 ページ)

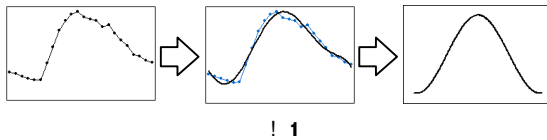
Ⅲ. 研究の概要

本論文においてグラフ化の機能として特に次の3点に着目し考察したものである。

- ・依存関係の抽出
- ・推測の構成
- ・解の存在の確認

3.1 依存関係の抽出

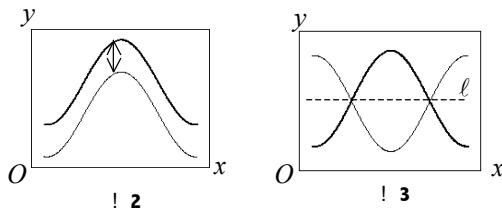
図1のようにグラフを概括的に捉えることや、グラフを理想化して見ることによって、グラフが同じ形、または逆の形をしていることから関係があるのではないだろうかと考えることが出来る。



これがグラフ化の機能として1つ目に挙げた依存関係の抽出である。

3.2 推測の構成

2量の間にある関係を利用し、一方の量から他方の量を推測できるだろうと考える。



同じ形をしているグラフは一方を平行移動したグラフであると見ることができ(図2参照)、逆の形をしたグラフは上下対称なグラフであると見ることが出来る(図3参照)。このような特徴を利用して一方の量から他方の量を推測していくことが可能である。

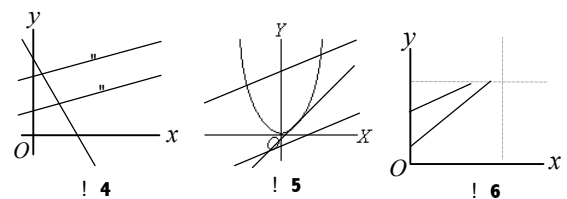
これがグラフ化の機能として2つ目に挙げる推測の構成である。

3.3 解の存在の確認

方程式をグラフに表すことによって交点の座標を求めることや、グラフの特徴を求める

ことはよく行われることである。しかし、グラフは関係式の変化を見るのに適しているが、正確な数値を読み取ることは適していない。それにも関わらず、連立方程式をグラフに表すのは、その解を知るためではなく、解が存在するかどうかを確認できることや、その解の個数が分かるということが考えられる。その際には、定義域が実数全体の場合に限られず、問題を解決するための条件を含めて考えることも出来る。

下の図4,5,6はその考察において用いたグラフであり、図4は一次関数と一次関数のグラフ、図5は二次関数と一次関数のグラフ、図6は条件付の問題をグラフに表したものである。



これらのグラフにおける交点の有無やその個数を見ることによって解の存在を確認することが出来る。

数学の問題であっても、日常生活の問題であっても、解の存在しない問題の解を求めようとすることは避けたいと考えるのが一般的であろう。よって、解の有無が分かることは問題を解くときに大きな意味を持つ。したがって、解が存在するのか、また、いくつ存在するのか、が分かることは重要なことであるといえる。

これがグラフ化の機能として3つ目に挙げる解の存在の確認である。

以上の3点をグラフ化の機能として指摘する。

4 調査問題

グラフを捉えることによって関係を見出すことが可能であったとしても、中学校での教

材として扱ったとき、生徒にとってグラフを概括的に見ることや、同じ形のグラフであるから、逆のグラフをしているからということから関係を見出すことが出来なければ、教材として活用することは困難であると考えられる。

そこで、中学生にとって 2 量を表すグラフを観察したとき、グラフを概括的に捉えることによって、グラフの形が同じである、または、逆であると捉えることは可能か、ということ、そしてそれらの理由から 2 量の間に関係を見出すことは可能か、を確認するために調査問題を作成、実施する。

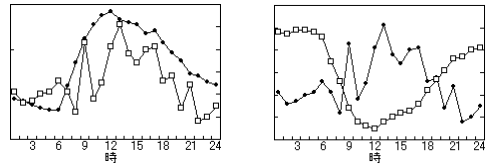
その考察においては、グラフの形から関係を見出している生徒に着目した。その内容は、どのようなグラフが多く選ばれているのかということに着目した分析と、同じ形をしたグラフ、逆の形をしたグラフと捉えている生徒のグラフの捉え方に着目した考察の 2 通りを行う。この 2 通りの考察を通して、生徒にとってグラフを観察することによって調査の目的として設定したことについて確認した。

調査問題において 10 通りのグラフを提示した。これらのグラフを同じ形のグラフ、逆の形をしたグラフ、同じ形でも逆の形でもないグラフ、に分類したが、調査結果は同じ分類をしたグラフであっても、多くの生徒が関係を見出したグラフもあれば、ほとんどの生徒が関係を見出せなかったグラフもあった。

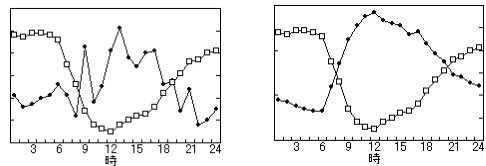
このように、グラフによって関係を見出しやすいグラフと見出し難いグラフに分かれるが、生徒にとってグラフを概括的に捉えることは可能であり、また、同じ形をしている、または、逆の形をしていると見ることによって、2 量の間に関係を見出すことは可能であると考えられる。

その中でも、同じ形のグラフより、逆の形をしているグラフの方が関係を見出し易いことが分かった (図 7 参照)。さらに、グラフの形を概括的に捉える必要があるグラフより

グラフの形を概括的に捉える必要がないグラフの方が関係を見出し易いということも調査結果から分かった (図 8 参照)。



! 7



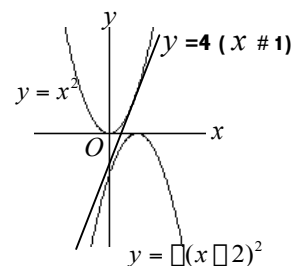
! 8

5 事例考察

また、グラフ化の機能に着目した、小学校 4 年「変わり方」、小学校 6 年「割合の計算」、中学校 2 年「線対称・点対称」の事例考察を行った。

それぞれの教材は、一般的にグラフを扱うものではないが、その中でグラフを用いたとき、どのような数学的内容が見出せ、また、その数学的展開が可能であるかについて考察を行ったものである。

例として小学校 4 年「変わり方」をとりあげる。これは正方形を並べて正方形を作る問題である。このとき、大きな正方形の面積は $y = x^2$ と表すことが出来、内側の正方形の面積は $y = (x - 2)^2$ と表すことが出来る。二次関数 $y = x^2$ から $y = (x - 2)^2$ を引くことによって一次関数 $y = 4(x - 1)$ が作られる。これを $y = x^2$ と $y = -(x - 2)^2$ の和と見ると、直線 $y = 4(x - 1)$ は 2 つの放物線における共通の接線となっている (図 9 参照)。このような場合を特別なことと見ることによってこれらの間に関係があると見ることが出来る



! 9

考える。

IV. 今後の課題

本研究においてグラフ化の機能として、3つを指摘し、生徒もグラフを用いることによって依存関係を見出すことが出来るだろうと考えた。

本研究においての調査問題は、依存関係を見出すことに限定し作成した。そのため、推測や解の存在については行われていない。したがって、依存関係を見出すことが可能であっても推測が可能であるといえない場合には、依存関係を見出した後の展開が困難になることも考えられる。

また、関係を見出す際に、提示の仕方によって生徒がグラフを観察したとき、関係を見

出し易くなったり、見難くなったりすることが考えられるが、その提示の仕方については考えていない。

これらのことが今後の課題として残った。

参考文献

- ・「中学校 学習指導要領 解説 -数学編-」
文部省 大阪書籍 1999年9月20日
- ・「関数とその指導（中学校編）」 日本数学教育会 編 明治図書 1968年7月