卒業論文要約【鳥取大学数学教育研究，第 5 号，2003】

文字式の学習におけるつまずきについての研究

堀家　浩子
指導教官：溝口達也

Ⅰ．研究の目的と方法

ある文献に，「つまずかせない」という授業例が挙げられていた。この授業はおそらく，『つまずきはいけないもの』という考えから行われたものと思われる。しかし，つまずきというのは，数学の学習場面に限らず他教科の学習場面や日常生活の場面でも経験されるものであり，また，特に学習場面においては必ずしも全てのつまずきが望ましくないものとされるものではないと考える。そこで，「子どもがつまずいた時に，それをいかに望ましい理解の方向へもっていくか」を考えることを，本研究の目的とする。ただし，つまずきといっても，その事例はそれぞれの学習分野によってさまざまである。よって本研究では，文字式のつまずきに限定をする。

そのために本研究では，次のような方法をとる。まず杜威氏の「学校数学における文字式の学習に関する研究」を基に，文字式とは何か，そして学習をする子どもの認知システムの機能とその不均衡や変容を，Piaget の認知発達理論に基づいて考察をしていく。この考察は，実際につまずきの事例を見て分析をしていく際に，「なぜこの子どもはこういうつまずきをしたのか」という背景を見ていくために重要になるものである。次に，つまずきの事例はさまざまなものがあるが，その中でも多く見られるものとそうでないものがあると考えられる。そこで，どのようなつまずきが多いのかを実態調査を行って分析をする。これらの考察や分析を踏まえ，文字式の学習への示唆を行う。

Ⅱ．本論文の構成

（1 ページ 35 字×30 行，49 ページ）

Ⅲ．研究の概要

本研究の目的を達成するために，次のような研究課題を設定した。

研究課題 1:なぜつまずきが起こってしまうのか。
研究課題 2:文字式のつまずきにはどのような事例があるのか。
研究課題 3:子どもたちはどのようなつまずきを多くするのか。
研究課題 4:つまずきの事例についての考察を踏まえ，指導へはどう生かすことができるのか。

まず研究課題 1 を解決するために，文字式とは何かということ，文字式の文字についての意味や読み取り方，文字式の学習における認知システムとその不均衡や変容についての考察を行っ

た。文字式に使われる文字は定数，未知数，変数のいずれかを表しているもので，子どもたちも文字をそのように読み取る。しかし，実際にはそれ以外にも，プレースホルダー(数を入れる場所のこと。小学校で文字の代わりに使われている□など)や物(例えば3b－３の計算について，3bを３とｂが並んでいる物とみて，３を取って答えをｂにするなど)として読み取ることがある。また，文字をちゃんと読み取っても，文字式という新たな対象を学習することによって，今まで数の計算の際に作られた認知システムが変容したり不均衡に陥ったりする。

この認知システムの変容は，４つの形態にまとめることができる。そのうち変容Ⅰ(認識対象についての新しいシェマをつくり出すことによる変容)が上手くいかなければ不均衡に陥るのだが，その不均衡は主体と対象間の不均衡にあたる。そしてその不均衡は，内容によってポジティブな撹乱(同化の障害となるもの。例えば対象の抵抗，相互同化の困難など)とネガティブな撹乱(必要が満たされないことからくるもの。例えば問題解決に必要な知識の欠如など)に分けることができる。変容Ⅱ(既存の概念シェマに新しい対象を取り込もうとすることによる変容)，変容Ⅲ(既存の操作をそのまま新しい対象に適用しようとすることによる変容)，変容Ⅳ(既存の知識を新しくできた概念シェマへと取り込もうとすることによる変容)が上手くいかなかった場合は，その不均衡は下位システム間の不均衡にあたり，これも内容によってポジティブな撹乱とネガティブな撹乱に分けることができる。これらの撹乱や不均衡によって，文字式についての誤った操作が行われるのである。

(以上，第２章)

次に研究課題２を解決するために，杜威氏が提起した文字式の操作モデルについての考察を行った。操作モデルとは，認知システムの変容や不均衡というのは，具体的には文字式を解く際の誤答として表れてくるが，その誤答を18個にモデル化したものである。子どもたちがこの18個のモデルの中からどの操作モデルを使うのかは，操作モデルを選択したり，使ったりするのをコントロールし，モニターする装置(コントロール・モニターと呼ぶ)が判断をする。そしてこのコントロール・モニターと操作モデル，シェマとの関係を操作システムと呼ぶ。ここでのシェマとは，子どもが持つ文字式についての知識の枠組みのことで，具体的には文字式に関する概念的な知識(文字や文字式の意味など)と，文字式を操作する手続き的な知識(文字式の構文法)が挙げられる。

操作システムには，間違った操作を行ってもシェマを変容させないパターンと，間違った操作を行ったらシェマそのものを変容させるパターンの２つが考えられ，シェマを変容させるパターンの時にはじめて，認知システムが不均衡から均衡状態へと変わっていくのである。

(以上，第３章)

なお図１は，認知システム，操作モデル，操作システムの関係性を示したものである。

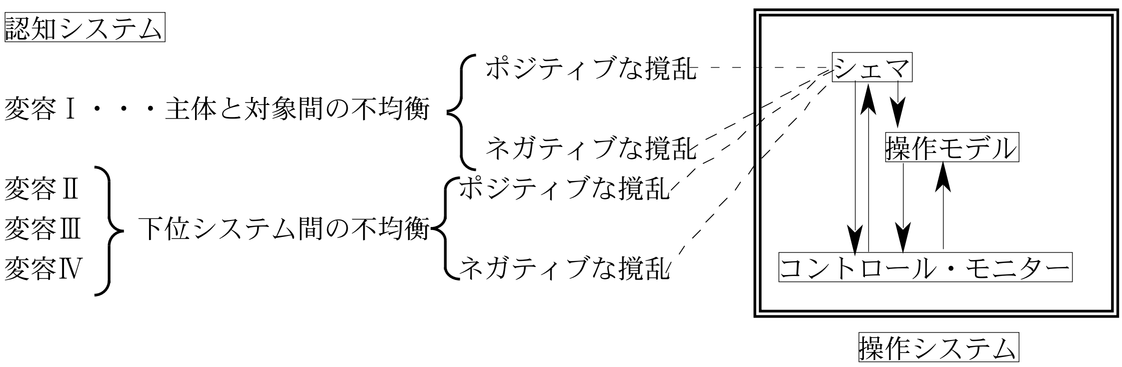


図１

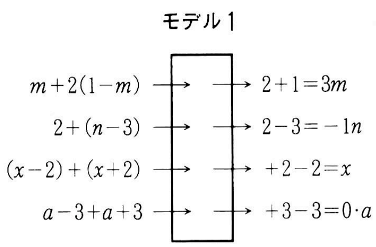
次に，研究課題３及び研究課題４を解決するために，第３章で述べた文字式の操作モデルの出現率についての実態調査を行い，その結果から分析を行った。調査は鳥取大学教育地域科学部附属中学校全学年の生徒，総計445名を対象として，2002年9月下旬にペーパーテスト形式，所要時間約20分で行った。なお，調査問題の設定については，操作モデルの出現率を調査することを実態調査の目的とすることより，杜威氏が実際に行った予備調査及び実態調査と同じ問題を用いた（資料参照）。集計及び分析方法は，問題の中から正答率が90％未満のものについて，それらの問題にはどのような誤答が多く，そしてその誤答はどのモデルによって説明可能かを考察した。

操作モデルの出現率については，次の表１のとおりである（延べ人数の部分あり）。また操作モデルは以下に示す。なお，モデル図において，左側は問題，右側はその問題に対する子どもの操作および操作の結果である。

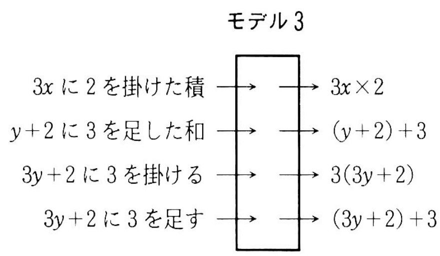
表１

モデル17	72名
モデル３	48名
モデル18	29名
モデル１	21名
モデル16	19名
モデル14ー2	13名
モデル15	9名
モデル14ー1	7名
モデル13	2名
モデル８	1名

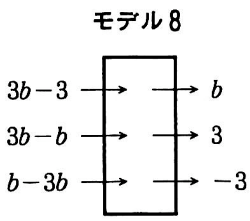
モデル１　見える数を計算したりして，
それに文字を付けるモデル



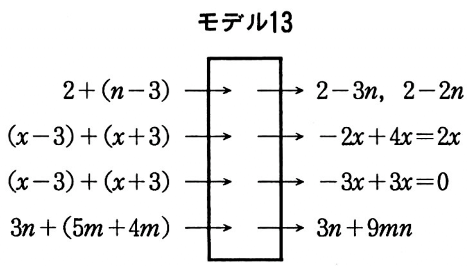
モデル３　要求された計算をそのまま要素に付けるだけのモデル



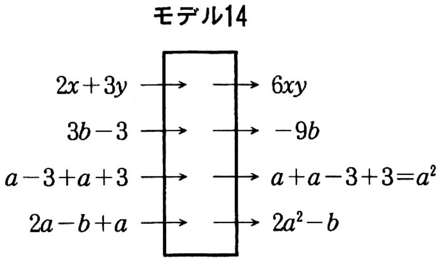
モデル８　引き算をするときに項の文字や数の部分を省いてしまう（取り算と呼ぶ）モデル

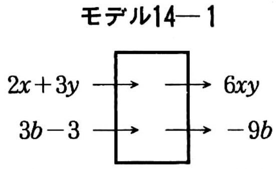


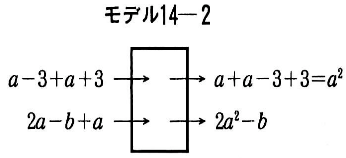
モデル13　括弧がみえるとき，まずそれに包まれる式をまとめて計算するモデル



モデル14　文字式の足し算や引き算は掛け算にし，a±aをa^{2}にするモデル







モデル 15　非同類項の足し算や引き算を
より“完全”にするモデル

モデル15

$m+2(1-m) \to \to -2m+m+2=-m+2=m$

$2+(n-3) \to \to -1+n=-n$

$3n+(5m+4n) \to \to 7n+5m=12mn$

$3y+2x \to \to 5xy$

モデル 17　括弧に対する足し算と引き算 を
掛け算にするモデル

モデル17

$y+(x-2y) \to \to xy-2y^2$

$(b-3a)-2a \to \to -2ab+6a^2$

$(x-y)+2y \to \to 2xy-2y^2$

$(a+b)+a \to \to a^2+ab$

取り上げた誤答の中には，操作モデルでは説明できないものがいくつかみられた。それらについては，次のように新たなモデルを提起した。モデルＡについては，誤って分配法則を使うモデルである。これは，杜威氏が提起したモデル 18 の誤って括弧を外すモデルと類似している。しかし，モデル 18 は符号を誤って外すのに対して，モデルＡは，括弧に近い数だけ分配法則を使ったことによる誤答である。よって，モデルＡとして新たに提起した。

モデルＡ　誤って分配法則を使うモデル

モデルＡ

ｍ＋２（１－ｍ）→　→ｍ＋２－ｍ＝２

モデル 16－1 及び 16－2 は，完全にモデル 16 に当てはまらないものである。モデル 16 は“無形の括弧”の存在と，項の移動を移項と読み取る，あるいは大きい数から小さい数を引いて－(マイナス) をつけるという 2 つが含まれているが，取り上げた誤答はそのどちらか一方が含まれているものである。したがって，モデル 16 のサブモデルとしてモデル 16－1，モデル 16－2 を新たに提起した。

モデル 16　ある項の符号をその隣の項に移し
それに付け加えるモデル

モデル16

$a-3+a+3 \to \to 3+3-a+a$

$(x-3)+(x+3) \to \to 3+3+x-x$

$m-2(1-m) \to \to m-2+2m=m-2-2m=-m-2$

モデル 18　括弧の前に記号＋と－がみられるときに，誤って括弧を外すモデル

モデル18

$m-2(1-m) \to \to m-2-2m=-m-2$

$y+(x-2y) \to \to y+x+2y=3y+x$

$(m+n)+(m-n) \to \to 2m+2n$

$2a-(b-3a) \to \to 2a-b-3a$

モデル 16－1　無形の括弧の存在から誤って計算するモデル

モデル 16－1

3(b-2+4b)-10b+5→　→3b＋12b-10b-6+5
=5b-11

モデル 16－2　大きい数から小さい数を引きマイナスをつけるモデル

モデル 16－2

m+2(1-m)→　→m+2m＋2=－(2-1)m+2=m+2

(x-y)+2y→　→x-y+2y=x-(2-1)y=x-y

モデル 17’ については，モデル 17 とほぼ同じモデルである。つまり，括弧の前にある符号を掛け算と読み取ることに変わりはない。しかし，その中でも乗法の公式を当てはめて計算をする誤答がみられた。したがって，モデル 17 と類似しているのでモデル 17’ として提起した。

モデル 17’　乗法の公式を使用するモデル

モデル 17’

$(x+2)+(x-2) \to \to x^2-4$

$(m+n)+(m-n) \to \to m^2-n^2$

これらの分析から，文字式の学習への示唆を行った。調査の結果，多くの生徒が行うつまずきの操作の原因のひとつに，文字式を学習する以前の数の計算で行った操作を，そのまま文字式に適用してしまうということがあることが明らかになった。したがって，数の計算と文字式の計算の違い（構文法）を特に導入の部分においてしっかりと理解させる必要がある。

（以上，第4章）

Ⅳ．研究の結果

どの学習分野にもつまずきは存在するものである。その中で，文字式のつまずきについての分析が，さまざまな文献で行われていた。しかしそれらの分析は，つまずきの原因を「計算力の不足」などとしていることが多く，このことによってつまずきを生かす指導といっても，計算練習を多くする，あるいは授業中に助言を行ってそのまま終わりということになっていた。この問題点を解決するために，本研究ではつまずきの原因や文字式のつまずきについての出現頻度を調査したのである。このことによって，計算練習を多くするだけではなく，どの時点で間違った認識をしているのかをはっきりさせ，そこから改善をしていかなければいけないことが明らかになった。計算練習を多くすることが悪いわけではないが，子どもが誤った認識をしたままでは，いくら計算練習を多く行っても，つまずきを解消することはできない。子どもの認識をよい方向へ変容させるような授業や助言が必要であると考える。

しかし，本研究において，個人の操作システムについて言及はしたものの，指導への示唆に操作システムを考慮することができなかった。これは，調査問題の中で操作システムについてみる問題について，分析を行えなかったことにつながる。そして，本研究をもとにしたつまずきを生かす具体的な学習指導案を考えることができなかった。

また，本研究では，文字式のつまずきに限定をして研究を進めたが，つまずきというのはその他の数学学習場面においてもみられるものである。したがって，本研究での内容を，数学全体の学習内容にまで広げて考えていくことが今後の課題である。

主用引用・参考文献

・杜威.(1991).学校数学における文字式の学習に関する研究.東洋館出版社.
・フラベル.(1969).ピアジェ心理学入門（上）明治図書.pp.80-85.
・中垣啓.(1984).矛盾と均衡化，ピアジェの発生認識論.国土社. pp.177-217.
・三輪辰郎.文字式の指導に関する重要な諸問題，ICME9 配布資料.
・藤井斉亮.(1992). 児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査，数学教育学論究 Vol.58. 日本数学教育学会.

資料：調査問題

この問題は，文字式についての理解を調べるものなので，成績には全く関係ありません。また，結果を口外することもありませんので，名前などを書く必要もありません。安心して答えてください。なお，もし間違えた場合でも消しゴムでは消さずに，空いているスペースに書いてください。

１．次のことがらを式に表し，その式を簡単にせよ。もしできなければ，そのままでよいが，そのときも答えを書くこと。

(１) 3x に２を足した和

式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　答え＿＿＿＿＿＿＿

(２) 3x に２をかけた積

式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　答え＿＿＿＿＿＿＿

(３) 3y＋２に３を足した和

式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　答え＿＿＿＿＿＿＿

(４) 3y＋２に３をかけた積

式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　答え＿＿＿＿＿＿＿

２．次の式を計算せよ。ただし，計算の途中も書くこと。

(１) $5a+2a$
(２) $2b-b$
(３) $a+3+a-3$
(４) $m+2(1-m)$
(５) $(x+2)+(x-2)$
(６) $2+(n-3)$
(７) $(5m+2n)-3n$
(８) $2x+3y$
(９) $m+2n+3m$
(10) $(m+n)+(m-n)$
(11) $(x-y)+2y$
(12) $2a-(b-3a)$
(13) $2a-b+a$
(14) $a+3-2a+a+3+2a$
(15) $3(b-2+4b)-10b+5$

３．次のア～クの中から 5a になるものをすべて選んで〇をつけなさい。次に，〇をつけたわけを説明しなさい。

ア　$5+a$
イ　$5+5+5+5+5$
ウ　$a+a+a+a+a+5$
エ　$5\times a$
オ　$a\times a\times a\times a\times a$
カ　５とａ
キ　$a+a+a+a+5$
ク　$a+a+a+a+a$

〇をつけたわけ

４．友だちが「$3a=36$ だから $a=6$」と計算をしました。あなたはこの計算が正しいと思いますか？
次のどちらかに〇をつけなさい。

正しい　　　　　　正しくない

上の計算について，あなたの考えを説明しなさい。

５．$p=5q+1$ で，$q=2$ のとき，ｐはいくらですか。計算の途中も書きなさい。

６．(1)　$3b-b+3$ を簡単にしなさい。ただし，計算の途中も書くこと。

簡単にした式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(2)　$b=2$ のとき

$3b-b+3$ の値は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(1) の簡単にした式の値は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿