

# 原理・原則の発見と利用に焦点を当てた数学的活動の展開 — 「立方体の展開図」の授業実践を通じた追究—

山脇 雅也

鳥取市立西中学校

## I. はじめに

学校教育における数学の授業は民主主義的な営みと捉えることができる。なぜならば、生徒は数学の授業を通して、事象に潜在する数理を学ぶ。その数理はすべての生徒にとって原理・原則となる。つまり、その原理・原則は利用する個人に依存せず、いかなる生徒にとっても原理・原則となり得るという意味で平等であるからである。よって、一度、原理・原則を発見できれば、生徒はそれに頼ることによってものごとを機械的に処理し得る。このことこそが、ものごとを数理的に扱うことのよさを保証するのではないであろうか。そうであるものの、我々が日々、数学の授業を実践するとき、果たして、教材の数理すなわち原理・原則はどのように扱っているだろうか。

一方で、平成14年度から実施されている学習指導要領の目標に「数学的活動」の語が加わった。これにより、数学的活動の楽しさを生徒に感得させることが我々に要請された。よって、我々が数学の授業を実践するとき、この数学的活動を少なからず意識しなければならない。

以上を請けて、本稿は、数学的活動の展開について探ることを目的とする。このとき、上記の原理・原則をいかに扱い、生徒にアプローチさせ得るかということ課題として探る。

その方法として、まず、数学的活動の基本的な考え方を矢部(2002)の主張に基づき捉え、杉山(1995)による公理的方法の学習指導の考え方を援用し、本稿の課題に迫る授業テーマの設定をする。次に、そのテーマに基づき「立方体の展開図」の授業を構成する。続いて、その授業の実践を試み検証し、原理・原則の扱いについての教授的示唆を得る。

## II. 授業テーマとテーマ設定

2.1 数学的活動の展開についての基本的な考え方  
数学的活動については様々な見解があり議論

されつつあるが、筆者の立場は、矢部(2002)に立脚する。矢部(2002)によると、算数(数学)的活動とは「目標の実現に向けて、数学的な考え方を生み出し、新たな表現・処理を引き出す子どもの主体的な活動」である。

数学的活動を考えると、「何のための数学的活動であるか」ということ抜きでは建設的になり得ないを考える。上記によれば、「目標の実現」のための数学的活動といえると思われる。教師が単に生徒に何らかの活動を期待するだけでは、およそ目標は実現され得ない。つまり、教師には生徒が目標を実現するような数学的活動を仕向ける必要性が生じる。

また、溝口(2000)によれば、数学的活動は目標実現のための手段であって目標そのもの(目的)ではない。発達特性から、小学校低学年においては活動すること自体に価値が認められ、授業の目標(目的)となり得るが、それ以上の学年のほとんどの児童・生徒においては、そういった活動を通して得られる数学的知識の獲得が目標(目的)とされるべきである。この主張からも、再度、単に生徒の何らかの活動を期待するのではなく、教師が意図的に生徒の数学的活動を仕組む必要性が示唆される。

以上から数学的活動は教師によって仕組むものであることが確認されたが、では、その数学的活動を教師はいかにして授業に仕組むかが問題となる。その問題に対するいくつかの方法の一つとして、解決することを通して目標が実現されるような課題の提示と予想される生徒の活動へと仕向けるための支援が考えられる。

まず、課題の提示についてである。生徒の数学的活動は「数学的な考え方を生み出す」ものでなければならない。つまり、生徒の活動に何らかの数学的価値が認められなければならないといえる。ここで言う数学的価値とは、目標の実現に向かうか否かである。例えば、目標を「空間的推論をすること」と設定し、ある図に

ついて「この図は何らかの立体の展開図であるか」という課題を提示したとする。もし、ある生徒がその図を紙に写し取り、切り抜いて、実際に折ってみるという一連の活動によって課題を解決したならば、それは、目標を実現したことにはならない。なぜならば、この生徒が行った活動は、単に具体物による実験であり、推論とは言い難いからである。つまり、目標とする「空間的推論をすること」がなされておらず、目標の実現に向かっていないのである。この場合、展開図を折りたたむという操作を念頭で行い、重なる辺や点を推論することにこそ数学的な価値を認めるべきである。よって、組立てたとき重なる辺や点同士の対応関係を記述したり、重なる辺や点同士に印を付けたりするような生徒の活動こそが、この場合、数学的価値の認められる活動であり、目標の実現に向かうと考えられる。

したがって、課題を提示するとき、たとえ数学の苦手な生徒であっても目標の実現に向かうような活動を仕向ける課題設定をしなければならぬことが示唆される。すなわち、いかなる生徒にとっても目標と対応した核心的な課題となる課題設定を教師は打ち出さなければならない。この課題によって生じる生徒の活動こそが「新たな表現・処理を引き出す」ことにつながると思われる。

しかしながら、苦手な生徒にとっては、いわゆる「手の付かない」状態になり得ることが予測される。また、そうでない生徒であっても「つまずく」状態になり得ることも予測される。これでは、新たな表現・処理は観察し得ない。そういった生徒の経験する困難を生徒自らが克服するために手立てを企てることが教師の役割である。これが、生徒の活動に対する支援であると考えられる。

先の例で言えば、念頭で組立てていくことが苦手のように思われる生徒に対して、例えば、具体的にある一つの辺にだけに着目させ、組立てるときその辺と重なる辺はどの辺か考えさせる。つまり、全体を折りたたむことの困難さを一部だけを折りたたみ考えていくことで克服させようとするのである。この支援により、重なる辺同士に印をつけるという生徒の活動が予測され、すべての辺において重なる辺同士を対応づけるという処理が引き出されると考えられる。この場合、教師の支援が契機となって、生徒の活動は、生徒自らが困難を克服しようとする「主体的な活動」となり、克服した結果「新たな表現・処理を引き出す」こととなり得ると言

える。このことから、教師が生徒の数学的活動を予測するとき、一方でその活動を仕向ける支援も用意する必要性が示唆される。

以上の議論を整理すると、数学的活動は目標実現の手段として授業に位置づくものであり、授業を構成するときには、目標に対応した数学的活動を引き出す核心的な課題を設定すること、生徒に期待する数学的活動とその活動を仕向けるための教師の支援を併せて開発しておくことが要請されることが示唆された。

## 2.2 公理的方法に基づく学習指導

上記を踏まえて、授業で数学的活動を教師が仕組むとき、生徒のそれを探究活動となるようにすることを考え得る。というのは、探究を主とすることにすれば「「見つけ」「つくり」「つかう」ことに重点が置かれることになる」(杉山, 1998)からである。つまり、探究活動では、探究の対象とする事象から原理・原則を発見し(見つけ)、それを抽象し(つくり)、それを利用する(つかう)ことに重点が置かれるということである。この考え方により、授業における原理・原則の扱い方の示唆を得られるのである。このような探求活動を取り入れた授業は、公理的方法に基づく学習指導と呼ばれる。

公理的方法の考えを学習指導に生かすということは、杉山(1995)によれば、「根拠を求め、基づいている原理・原則を明らかにし、それらをもとに発展的・創造的に数学の学習指導を進めるといふこと」である。

このように学習を進めるとするということは、生徒の活動は次のようになると思われる。まず、生徒が事象から何らかの性質を発見したとする。生徒は、その性質を別の事象にもあるものとし、適用することを通して、これらの事象に潜在する何らかの規則性を見出そうとする。もし、その性質が一般的でなければ、生徒は、また元の事象の別の性質を根拠として、これらの事象の一般性を求める。このようにして、生徒は発展的な知見を得ることとなる。このとき、生徒の活動は、根拠となる元の事象から発見される性質を探り、別の事象においても通用する一般性をもった原理・原則と言い得る性質を導こうとするものである。さらにこの活動には、発見した性質を別の事象に利用することも含まれているのである。つまり、生徒にとっては、利用することで新たな知見を得るための原理・原則なのである。原理・原則を発見し、それを利用し

有用性を感得する経験が、次なる探究活動に対する動機づけになり得ると思われる。

したがって、授業において数学的活動として探究活動を仕組むということは、生徒がその活動を通して、事象に存在する原理・原則を探り、それを発見するだけにとどまらず、それを利用させるところまで含めて考えなければならないことが示唆される。

以上から、本時の授業のテーマは「生徒に教材における原理・原則の発見をさせるだけにとどまらず、その発見した原理・原則はいかに利用し得るかを探究させること、また、原理・原則を実際に利用させることまでを含めて数学的活動を仕組むこと」と設定し得る。

### Ⅲ. 「立方体の展開図」の授業構成と実践

#### 3.1 授業構成

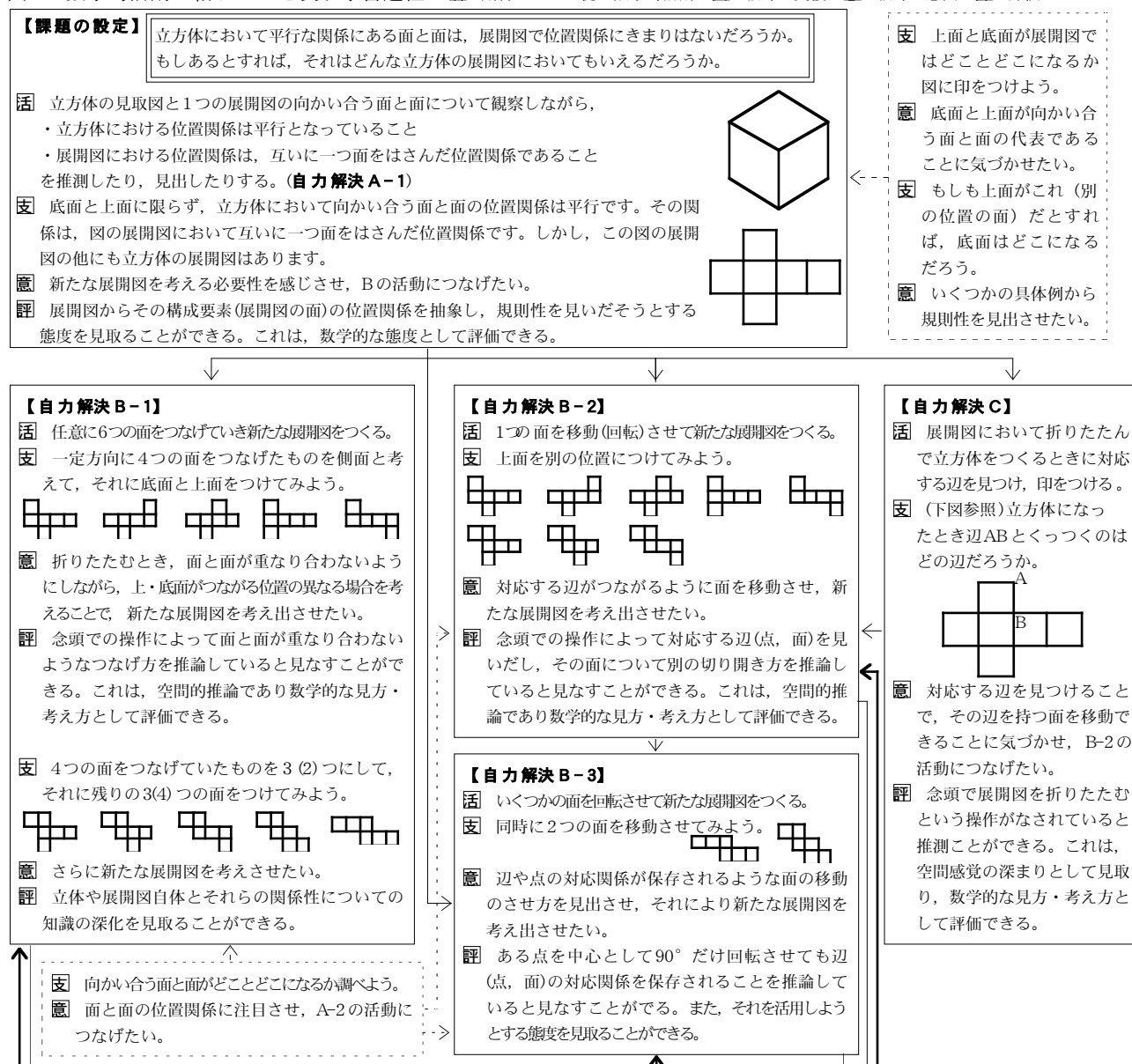
##### 3.1.1 学習過程

授業における数学的活動の結びつきを表す下の図1のようになる。

##### 3.1.2 課題について

課題は「立方体において平行な関係にある面と面は、展開図で位置関係にきまりはないだろうか。もしあるとすれば、それはどんな立方体の展開図においてもいえるだろうか」とした。ここでの「きまり」が原理・原則となる。立方体において、平行としか見えていなかった面と面の関係について、展開図に表すことで顕在化する原理・原則を生徒に探究させるのである。つまり、当該の原理・原則を生徒に発見させることを課題に設定したのである。生徒が発見した原理・原則を別の展開図において適用し検証することを通して、その原理・原則に一般性をもたせようとする活動を期待する。終結として、原理・原則を利用する評価問題を設定した。

図1：数学的活動の結びつきを表す学習過程 ㉔：期待される生徒の数学的活動 ㉕：教師の支援 ㉖：教師の意図 ㉗：評価



**【自力解決 A-2】**

**活** 展開図を観察し、「互いに一定方向に辺を2つまたぐ位置にあり、その途中、その方向に垂直な方向へはいくら辺をまたいでよい位置関係」であることを導く。

**支** 互いの面の位置を比べたとき、展開図上でどの方向にどげ移動すればたどり着けるか調べてみよう。

**意** 面と面の位置関係が方向づけによって表せられることに気づかせたい。

**評** 具体例(いくつかの展開図)から一般性(共通する性質)を見いだそうとする帰納的な考えを見取ることができる。これは、数学的な見方・考え方として評価できる。また、位置関係が方向づけによって表し得るという位置関係の理解を見取ることができる。

**支** どの向き合う面と面についても成り立つ関係を見つけよう。

**意** 当該の関係について一般性を見出させたい。

**支** 他の展開図でも考えてみよう。

**意** 導いた関係性を他の展開図で検証させたい。

**【集団による課題の解決】**

**活** 新たな展開図を考え出すときに感じた困難さを話し合う。

- ・組立てたときに面と面とが重なり合わないためにどうつながればよいか。
- ・基となる展開図から複数の面を移動させてしまうと念頭で組立てられなくなってしまう。

**活** 新たな展開図をいかにして考え出したか発表するとともに、平行な面と面の位置関係のきまりを見つけたときに感じた困難さを具体的に例を挙げて、説明する(図 a)。

- ・「互いに1つ面をはさんだ位置関係」が適用できない面と面があること。

**活** 複数の具体例から、平行な面と面の位置関係についてきまりを見つけたら(図 b)。

- ・「展開図上で一方の面からその面と平行な面へ移動するとき、初めに移動しようとする方向に2回移動すればたどり着け、たどり着くまでに別の方向へはいくら移動してもよい」を見つけたこと

**支** 発言が少ない場合は、机間指導で把握した生徒の発見やその記述を当該生徒に発表させる。

**意** 自力解決時における発見やその記述を対話の中から引きだし、集団で共有したい。

**評** 発言内容を通して、展開図やそれにおける構成要素(面、辺、点)の位置関係についての理解の達成状況、自分の考えを表現する力、自分の考えを他者に伝えようとする態度を見取ることができる。

**◎評価問題(自力解決 D)**

1. 右の図について、次の問いに答えなさい。

(1) 図を組立ててできる立体について、影のついた面と平行となる面は①～④のどれですか。

(2) 立方体の展開図にするためには、あ～このどこに面をつけ加えればよいか。4通り見つけなさい。

2. 立方体の展開図は何通りかけるか。

### 3.1.3 数学的活動について

生徒の数学的活動として4つの様相を見取る活動を予測した。それぞれは、以下の通りである。

**活動 A：原理・原則を発見する**

**活動 B：展開図をつくる**

**活動 C：重なる辺や点を対応付ける**

**活動 D：原理・原則を利用する**

活動 A として、A-1、A-2 が予測され、前者が「『互いに一つ面をはさんだ位置関係』を発見する活動」であり、後者が一般性をもった原理・原則となる「『互いに一定方向に辺を2つまたぐ位置にあり、その途中、その方向に垂直な方向へはいくら辺をまたいでよい位置関係』を発見する活動」である。B の活動として、B-1、B-2、B-3 が予測される。B-1 が「任意に面を6つつながてつくる」、B-2 が「1つの面を(回転)移動させてつくる」、B-3 が「いくつかの面を回転させてつくる」である。B-3 は B-2 の発展的な活動である。

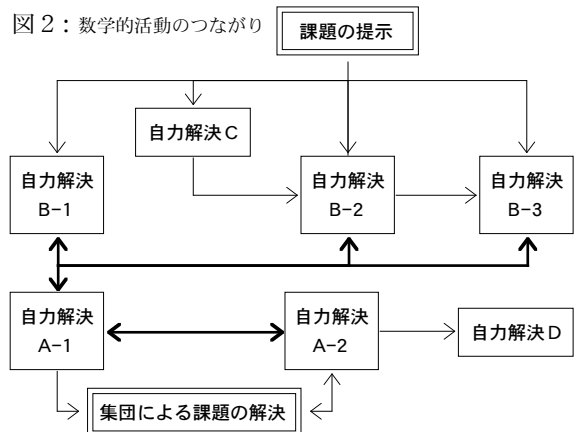
活動 A については、集団解決時までに A-1 まで保証するような支援を考えた。A-2 は A-1 を経た後に観察されると思われる。このとき、自力解決では A-2 へ変容し得ない生徒において

も、集団による課題の解決の場を設定することで、A-2 が引きだせることが期待される。

活動 B については、できるだけ多くの展開図を見出せるような支援を考えた。活動 A と活動 B は、生徒の試行錯誤に伴い往來する様子が観察されると思われる。

活動 C は、いわゆる「手の付かない」状態を活動 B-2 につなげるための支援によって観察し得ると予測される活動である。また、活動 D は、活動 A によって引き出される活動である。

以上から本授業における数学的活動のつながりは図 2 のように整理できる。



### 3.2 授業実践

#### 3.2.1 授業について

授業は、鳥取市内の公立中学校第1学年の生徒、約140名(4クラス)を対象として、2003年2月中旬に実施した。対象とした生徒は、これまでに小学校第4学年で直方体と立方体の展開図について基本的な事項を学習している。

また、生徒は本授業の前々時に、基本的な柱体と錐体の特徴を調べ、それにより立体を弁別する学習を、前時に、基本的な柱体を構成する面や辺の位置関係を調べ、立体の構成要素について明らかにし、その立体を再度特徴づける学習を行っている。

#### 3.2.2 授業の評価と反省

原理・原則を発見する活動(活動A)については、A-1、2を予測していたが、それ以外のA-3「『縦、横それぞれ一列につながって並んだ正方形を列と見て、その一列をはさんだ位置関係』を発見する活動」が観察されたことである。このA-3を加え、活動Aを捉え直すと、A-1→A-3→A-2の順を経てより一般性をもつ原理・原則となっていくことが考えられる。活動Aについては、ほとんどの生徒が、A-1を集団による課題の解決時まで達成していたようであった。

展開図をつくる活動(活動B)については、B-2、3(一つ(複数)の面を回転させてつくる活動)と比較的に、B-1(任意の正方形をつなげてつくる仕方)が、多くの生徒で観察された。このとき、重なる辺や点を対応付ける活動(活動C)は、任意に面をつなげる活動(B-1)時に、つなげてよい位置と、いけない位置とを検証することに対する支援となり得たようであった。

原理・原則を利用する活動(活動D)については、評価問題の達成状況から、多くの生徒でなされたことが予測される。このことから、本授業のテーマに設定した数学的活動を仕組むことについては成功裡に展開し得たと思われる。よって、教材の原理・原則の扱い方として、それを発見・利用するような探究の対象として扱うことの妥当性が示唆される。また、そうした探究を数学的活動として仕組むことの妥当性も示唆される。

しかしながら、一方で、次のような問題が明らかになった。授業の展開時における生徒の活動として、当該の原理・原則を見つけること(活動A)よりも、新たな展開図そのものを考え出すこと(活動B)に専念する状態の続く様子が、

多くの生徒で観察された。このため、集団による課題の解決時まで、A-1は達成していたが、より一般性をもった原理・原則の発見であるA-2、3を達成している生徒がほとんどいなかった。このことが、問題点として明らかになった。

問題の原因として、第1に、原理・原則の利用する場面が、授業の終結における評価問題においてのみであったことが考えられる。原理・原則を利用する場が当初課題の自力解決時に設定されず、原理・原則を発見する必要性を生徒が十分に感得し得なかったためと思われる。つまり、課題の設定自体が不適切であったと考えられる。第2の原因に、設定した課題の提示の仕方が不適切であったことが考えられる。提示の仕方は、展開図は代表的な一つのみを掲示ただけで、生徒は当該の原理・原則を見つけさせるために自力で展開図を考えなければならないようになっていた。よって、生徒は、本来の課題となっていた当該の原理・原則を発見することよりも、新たな展開図を考え出すことに専念したと思われる。

上記の問題を改善するために、第1の原因に対しては、原理・原則を積極的に利用する支援を考える。当該の原理・原則は、念頭において展開図を組立てることが苦手な生徒にとっても、それを利用することで、機械的に展開図がどうか確かめたり、新たな展開図を創造したりできるような利用の仕方がある。このことを踏まえると、生徒は、発見した平行な面と面の関係の原理・原則を利用することによって、展開図をつくっていき、それまでの原理・原則でつくることのできない展開図をつくるためのより一般性をもつ原理・原則を発見していくといった課題の設定が考えられる。つまり、一度、原理・原則を発見したならば、その原理・原則にこだわって展開図を追究するという課題である。この課題設定の方が、本授業のものより、「原理・原則をもとに新たな知見を得る」という公理的方法に基づく学習指導に沿うようになる。

第2の原因に対しては、導入時に課題と併せて、いくつかの展開図を提示しておき、それらの展開図における平行な面と面の位置関係についての原理・原則を発見させるようにすることが考えられる。このことは、上の改善策と関連する。つまり、原理・原則を発見するために展開図を考えるのではなく、展開図を考えるために原理・原則を発見するような課題にするのである。これによって、活動Bの様相は「原理・原

則を利用してつくる」活動へと、考え直すことが要請される。

以上の問題点に対する議論から、生徒に原理・原則を発見させる動機づけとして、原理・原則を利用することのよさを感じさせる必要性が示唆される。このことは、本授業で設定した授業テーマによる数学的活動の仕組み方を考える上で一つの指針となる。

#### IV. 終わりに

本稿では、数学的活動の展開について、原理・原則をいかに扱い、生徒にアプローチさせるか探ることが目的であった。本稿では、公理的方法に基づく学習指導を援用し、原理・原則を発見と利用するような授業を構成することを考えた。このことは、数学的活動を授業に仕組むことの具体的方策としての一つの提案である。

本稿はこの主張を実際の学習指導において実践し検討を試みた。検討の結果、次の示唆が得られた。

- (1) 教材の原理・原則の扱いとして、数学的活動による探究の対象として授業に位置づけられる。
- (2) 教材の原理・原則は、それを利用する活動を通して生徒にその利用価値を感じさせることによって次なる原理・原則を発見する活動への動機づけとなる。

本稿では、実践した授業の検討の結果、上の(2)が示唆されたが、これを取り入れた授業を構成・実施することが課題として残された。それに伴い、再度、本稿で設定した授業テーマについての吟味が必要とされる。また、数学的活

動を仕組む方策についても、他の見解との比較・検討が必要とされる。

#### 参考文献・資料

- ・ Burton, L. (片桐重男 監訳). (1988). 楽しく考える問題と発問－算数・数学の問題解決 二. 東洋館出版社.
- ・ 福森信夫ほか. (2001). 数学1年. 啓林館.
- ・ 福森信夫ほか. (2001). 指導書数学1年第2部, 詳説. 啓林館.
- ・ 姫田恭江ほか. (2002). 算数・数学的活動の展開とその追究. 鳥取大学数学教育研究, 第4号, pp.73-88.
- ・ 溝口達也. (2000). 算数・数学的活動と評価. 鳥取大学数学教育研究, 第2号, pp.33-41.
- ・ 文部省. (1999). 中学校学習指導用領解説－数学編－. 大阪書籍.
- ・ 杉山吉茂. (1995). 公理的方法に基づく算数・数学の学習指導. 日本数学教育学会(編), 日本の算数・数学教育1995 数学学習の理論化へむけて. 産業図書.
- ・ 杉山吉茂. (1999). これからの数学教育・数学教育研究のあり方. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会(編), 新しい算数・数学教育の実践をめざして. 東洋館出版社.
- ・ 矢部敏昭. (2002). 教育課程をふまえた新しい算数授業の創造－基礎・基本と算数的活動に着目して－. 平成14年度中部小学校教育研究会算数部県大会, 講演配布資料.