

人の営みとしての算数・数学

- 算数教育の未来に向けて -

講演者：宮崎樹夫 信州大学助教授

みなさん，こんにちは。今日は，お招きいただき本当にありがとうございます。この機会に，是非，みなさんに何かをお渡しできればと考えています。少し私なりに考えさせていただきまして，「人の営みとしての算数・数学」をキーワードとしてお話をさせていただきたいと思いません。

突然で恐縮ですが，私は，息子の通う公立小学校のPTA 役員を3年間続けています。先日も，学校に子どもたちを集めてキャンプをしました。子どもたちは，夢中になってテントを張ったり，カレー作りをしたりしていました。私は，そのときの子どもたちの目の輝きが忘れられません。私はいつも子どもたちのこの目の輝きが教室の中に欲しいと思っています。しかし，算数の授業になると，そのように目を輝かす子どもたちは少ないように思います。なぜ，算数だとこの目の輝きが無くなってしまうのでしょうか。

現行の学習指導要領では，「できる子」と「できない子」という意味で，学力の差があるように思います。新学習指導要領で文部科学省は，内容を削減して「できない子」を無くしましょうということ，つまり，誰もが共通にもつべき最低限の力を示した上で，様々な不安や要望にこたえて，教科書を越えて理解できる子のための対策が考えられています。つまり，力がある子どもたちを支援することが，教師の力量として問われる時代に入っていくのです。

では，どのようにしていけばよいのでしょうか。今まで通りやっていけばよいという考えがあります。しかし，それでは今までと何ら変わりません。そこで今日は見方を変えて，「こんなことができるのではないか」ということを2つ提案したいと思います。一つは「数学的モデリング」について，もう一つは「説明をする活動」についてです。

算数・数学の目指してきたこと

戦後，算数・数学教育が目指してきたことの一つは，子どもたちに「できるようになってほしい」ということでした。例えば，一次方程式の解き方だけを学んでしまうことがあります。また，分数の除法については，「ひっくり返してかける」という解き方だけを学び，なぜそのように計算するのかをわからないままになってしまうということがあります。ですから，もう一つの目指してきたことは，子どもたちに「わかるようになってほしい」ということでした。

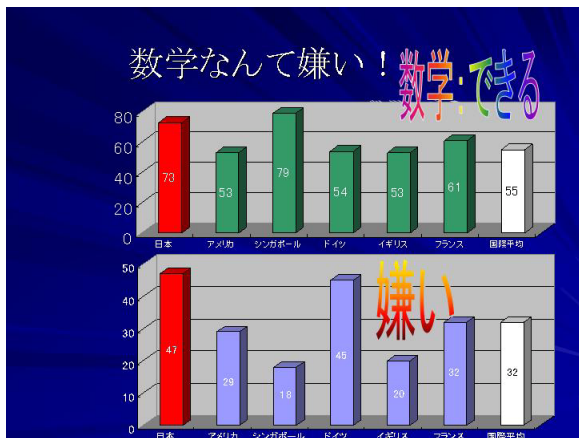
事例： $34 \div \frac{2}{3}$

「 $\frac{2}{3}m$ で34円のリボンがあります。このリボンは1mでは何円でしょうか？」という問題について，子どもたちのやり方の1つに，数直線を用いて，3倍して2mのときを求めて2で割るというやり方があります。このように数直線から割合の見方を読み取り・説明できることが，「わかる」ことであって，ただ単に，計算が「できる」だけで説明できない子どもたちに，教師は目を向けていかなければならないのです。

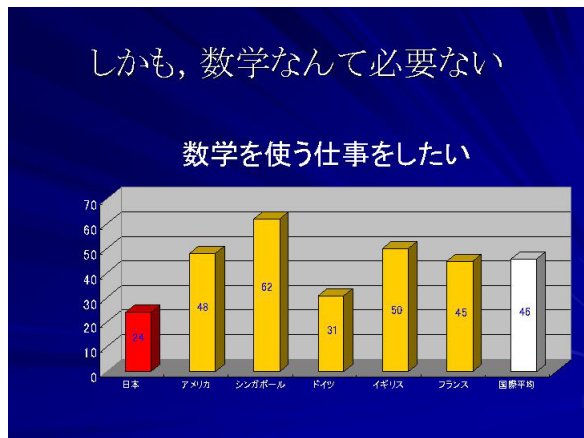


ところが，「できる」「わかる」を目指してきた算数・数学教育の在り方が大きく問われる時代がやってきたのです。今から6年前ではありますが，国際調査¹⁾の結果に現れているように，

日本の子ども(中学2年)は、平均点が50点台のテストで70点台をとっています。この日本の子どもの平均点は、その後、年々下がってきています。しかし、まだ、世界的に見ると、日本の子どもたちは「できる」と言えます。この国際調査で目を向けて欲しいのは、欧米ではなく、アジアの国々です。つまり、「できる」について日本の子どもたちの競争相手は、欧米の子どもたちではなく、アジアの子どもたちです。日本の子どもたちは、数学が「できる」割合が高いにもかかわらず、数学が「嫌い」な割合がかなり高いのです。しかし、シンガポールの子供もたちは、数学が「できる」割合が高く、数学が「嫌い」な割合は低いのです。ドイツは日本より深刻な状況で、数学が「できる」子どもたちの割合は低く、「嫌い」な子どもたちの割合が高くなっています。イギリスやアメリカは、数学が「できる」子どもたちの割合は低いが、数学が「嫌い」な子どもたちは少なくなっています。この結果を内容が易しいから「嫌い」の割合が低いと片づけるのは安易でしょう。あるアメリカの高校生は「私は数学ができません」と言うけれど、「私は数学が好きだ」と言っています。その高校では、グラフ電卓を用いた数学の授業を楽しんでいるようです。



さらに私が深刻に捉えているのは、「将来、数学を使う仕事をしたいですか?」と聞いた調査の結果です。日本の子どもたちは、「数学を使う仕事をしたい」と思う割合が極端に低いのです。将来、科学などを背負って立つ子どもたちが、数学を使った仕事につきたくないということに、私は恐怖を感じます。なぜ、日本の子どもたちは、こういう姿になってしまったのでしょうか。今までの日本は、「できる」「わかる」ことを重視してきました。これからは、さらに次のステップとして、「好き」「大切」を目的とする算数・数学教育が必要なのです。



「知識」から「智慧」へ

そのために、初めの提案をさせていただきたいと思います。私が、教育学部の講義で、学生達に「三角形の内角の和は180°だよ。なんで?」と聞くと沈黙がおこりました。さらに、私が「三角形の内角の和が180°であるということを知っていて、何を得したの?」と聞くと、彼らは「...入試?」と答えました。

算数・数学教育とは、入試のために「知識」を子どもたちに詰め込むことなのでしょうか。実際、私たちが子どもだった頃、先生から教えられたことはそうであったかもしれませんが。しかし、もし私たちが子どもたちに、私たちが教えられたように教えたのでは、やはり、自分たちのコピーをつくることになってしまうのではないのでしょうか。「それではいけない」と誰もが感じていらっしゃるのではないのでしょうか。

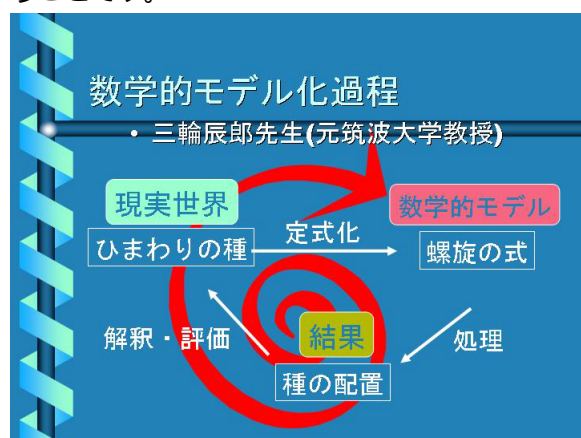
H. フロイデンタール氏は、「人々は、自らの生きている世界に関係のないことを忘れてしまうものだ。...もし数学をそんなふうに進んだら、人々は数学を使えるようにはならないだろう。」と書かれています。(この「人々は」の部分に、自分の可愛い子どもたちの名前を入れて読んでみて下さい。)つまり、数学は学問として正しいから学ぶべきだとするのではなく、その子どもに関係のある世界と結びつけて数学を学べるようにしなさい、ということです。

「知識」から「智慧」へ

- H. フロイデンタール
「人々は、自らの生きている世界に関係のないことを忘れてしまうものだ。...もし数学をそんなふうに進んだら、人々は数学を使えるようにはならないだろう。」(1971, p.420)

事例：ひまわりの秘密²⁾

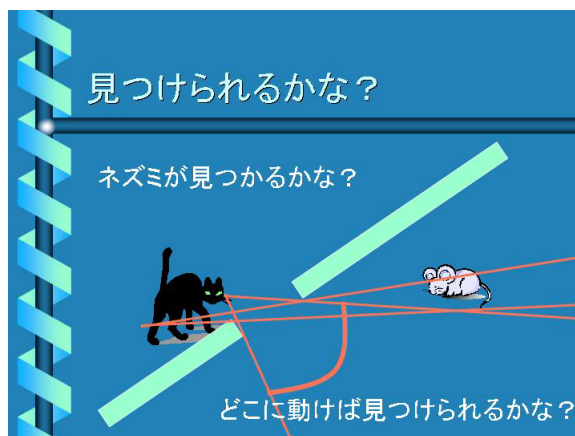
この教材は、ある学部生の作品です。みなさんは、ひまわりをよく見たことがありますか？実は、種が右回りと左回りのらせんとなっています。このことを数学の教材とするとき、学年によりそれに応じた扱いができると思います。例えば、小学生ならば、トレーシングペーパーで種がらせんを描いている様子を写しとったり、中学生ならば、らせんの数がいくつあるか調べたり、等が考えられます。この教材では、現実世界の「ひまわりの種」を数学的モデルとして、「らせんの式」に数学的に定式化し、それを処理し「種の配置」という結果を得ています。しかし、ここまででは、「数学的モデル化過程」として不十分であると思います。それは、結果が子どもにとっての現実世界でリアルであるかどうか、解釈・評価を行っていないからです³⁾。私が強調したいのは、数学の結果を現実に戻すこと、そして、そこで生じる様々な問題を解決するために新たな数学的モデルの構築へと向かうことです。



事例1：フロイデンタール研究所の教材集

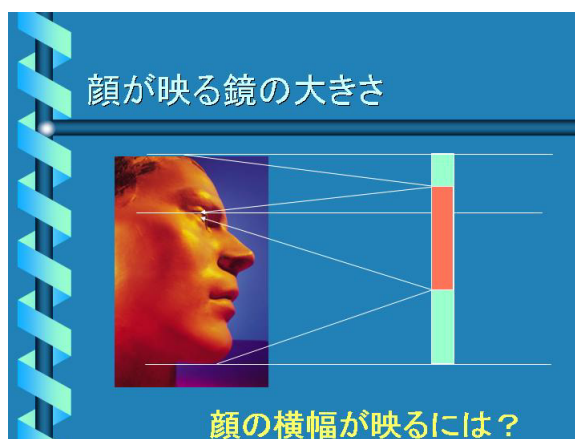
ネコはネズミを見つけられるかな？という問いに、ある小学2年生の子どもは「見つけれられる」と言いました。それは自分に見えるものは、誰にでも見えるということです。一方、ある小学5年生の子どもも、「見つけれられる」と言いました。ところが、自分の手でやってみると、壁に視線がぶつかってしまいます。それで初めて「見つけれられない」とわかるのです。我々にとってはあたり前のことが、子どもにとってはそうではないんです。子どもにとって、半直線や角が、子どもたちの世界でどのような役割を果たしているかを考えることが大切です。日本では、図形のために図形を学習するように思いますが、この研究所では、人の認識にとって図

形の学習がどのような役割を果たすのかという立場から教材や指導法を考えています。子どもたちの、算数・数学離れを食い止めるには、こうした考えが必要となってきているのではないのでしょうか。



事例2：顔が映る鏡の大きさ

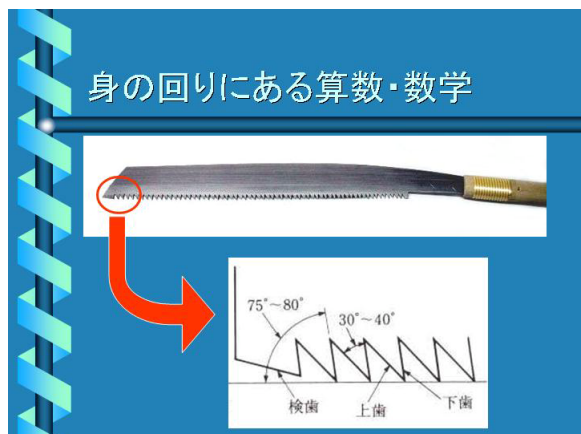
さて、それでは先生方にも一緒に考えてもらいますね。どのくらいの大きさの鏡なら、ご自分の顔が写ると思いますか？子どもたちに聞くと、「遠く離れれば絶対見えるよ」と答えてきます。私もはじめそう思っていました。しかし、実際には遠く離れても見えません。実は、縦は、顔の長さの半分あればいいんです。この理由には、図形の性質が使われています。では、顔の横幅が映るには、どのくらいの大きさが必要でしょうか。



事例3：身の回りにある算数・数学

実は、のこぎりにも算数・数学が隠れています。なぜのこぎりを引くと切れるのでしょうか？実は、一定の角度で、歯が木材にあたるので切れるようになっています。ここには、平行線と角の性質が活かされています。実際には、これだけではなく、切りくずが外にできるように、のこぎりの歯に工夫が施されています。「のこぎりは切れるものだ」と考えてしまう、「そうい

うものだ」と思った瞬間から人間はどんどん退化していってしまいます。「なぜなんだろう」という心を大事にしていきたいものです。



「好き・大切」のために・・・

これからの算数・数学教育では、子どもたちが「好きだ・大切だ」と感じてくれることをもっと大事にしたいものです。子どもたちの「手作り」を出発点にして、その結果を現実に戻して、有効性や限界を見つめる。そして、限界を乗り越えるために、もっとよいものを自分で作ってみようとする子どもたちを育てたいものです。そのためには、私たちが、古い衣を脱ぎ捨てて、新しい衣を纏っていきましょう。

説明する活動

では、第二の提案に進みます。第二の提案は、「説明する活動」です。例えば、3つの連続する数の和について、「 $3+4+5=12$ 」と計算して、答えが真ん中の4の3倍になっていることに気づくとしめます。ここで、ある子どもたちは大きい数で確かめてみようとしめます。例えば、 $563+564+565=564\times 3$ です。この心は大切ですね。というのは、子どもは、3つの連続する数の和の性質について、その一般性に心を開いているのです。

「3つの連続する数の和の性質」を先生方はどう説明されますか？中学校ですと、どうしても文字式のことを気になってしまいますよね。全ての場合で成り立つことを表すために文字式を使う。そうすると、数学の証明になると考えていませんか。では、なぜ文字式を使うのでしょうか。

数学は人が作り上げたものであるから、必ず理由があるはず。「そういうものだ」と考えるのは宗教です。数学は宗教ではありません。理由があるはず。子ども同士が図形の論証問題について電話で話しているときに、「ここ

ところが等しくて」と言うのでは相手に正確に伝わりません。それは2人の目の前に図がないので「ここ」と言われても、どこだかさっぱりわからないからです。しかし、記号があると、たとえ図が違っていても、正確に論証の筋道を伝えることができます。記号を使うことで「脱文脈」できるのです。

「3つの連続する数の和の性質」についても同様です。まず、文字式ありきではなく、なぜそうなるかを相手に伝えればよいわけです。おはじきでも、操作と言葉で相手に伝わることもあります。おはじきの操作や、数式で不正確・不明確なことが起きてくるから、文字式が必要になるのではないのでしょうか。

説明する活動

$$3+4+5=12=4\times 3 \quad 563+564+565=564\times 3$$

「伊藤家の食卓」から (図5 参照)

テレビの人気番組で「 $72+73+74+75+76+77+78+79+80+81=?$ 」という問題が紹介されていました。これは小学4年生が考えた問題で、この答えは、真ん中の76に5を「くっつけた」765になります。なぜでしょうか。理由は、おはじきで十分説明できます。文字式を使うだけが証明ではありません。なぜそうするのかというアイデアを示すことが大切です。よく授業で、先生から「さん、説明してください」と指示されて、黒板の自分の板書を棒読みする子どもがいます。これは「説明」ではあ

「伊藤家の食卓」から

- ◆ $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$
- ◆ $8+9+10+11+12+13+14+15+16+17=125$
- ◆ $56+57+58+59+60+61+62+63+64+65=? \quad 605$
- ◆ $72+73+74+75+76+77+78+79+80+81= \quad 765$

りません。なぜそういう説明をしたのか、どうやって思いついたのか、そういったアイデアを話してこそ、「説明」になるのではないのでしょうか。

「なんでなの？」を問う心を育む

「なんでなの？」と問う心を育てたいと思います。というのは、子どもたちが、この心を持つことによって、原因と結果の世界から、理由の世界へと移り住もうとすることになるからです。理由の世界は、「なぜ正しいのか」を問う世界でもあります。この世界では、物事の正しさを自分で理由付けて定めていくことが求められます。

では、小学校では何ができるのでしょうか。先生方が発問する際に、意図的に「どうして?」「なんで?」と聞いてほしいのです。たとえば、T・Tの授業では、一方の先生が子どものふりをして「どうしてですか?」と質問することがあります。そして、算数・数学として、命題の全称性・一般性というのが問題となりますから、「いつでも成り立つ?」と聞くことも大切にしてください。授業でのこうした発問が、子どもたちの中で内面化されて、次第に、自分で自分に「どうして?」「いつでも成り立つ?」と問いかけるようになります。

二つ目は、教室の中に決まり(教授学的契約; プロトソー(仏))を入れて欲しいということです。授業をしていくうちに、4つに場を区切りましょう。問題に一人で立ち向かう時間(活動の場)を作りましょう。次に、お互いの言い分をしっかりと受け止めましょう(定式化の場)。受け止めた後、グループ討議で正しいかどうか吟味しましょう(妥当化の場)。最後に教師がどこに行っても使えるということを意味付けましょう(公共化の場)。ある中学校では、定式化の場が共有の場というように名前を変えて使ってい

ました。先生の都合のいい子の考えだけ取り上げて、シナリオどおりに進めるのは止めましょう。そんな授業は子どもたちの心に届きません。授業は生き物です。表面的にスムーズな授業よりも、子どもたちと真に向き合い、ともに苦悩し喜び合う授業にしていきたいと思います。

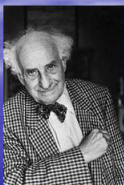
事例:「誤答」こそチャンス

授業参観で、ある子どもが308としていました。そのうち、その答えが近くの子どもたちに「伝染」していきました。ただの計算ミスのように見えますが、子どもたちにとっては違ったのです。ある子どもは、「たし算のとき使っていたことが、何で使えないの?」と先生に質問しました。別の子どもは、「わからない。258になるのは、ばらばらに考えると分かるのに、何で308じゃいけないの?」とつぶやいていました。足し算のとき、認められた手続きをきちんと使ったのだから、答えは正しいはずだ。でも使えないらしい、子どもにはその理由がわからないわけです。このように、授業などで誤答が現れることによって、子どもたちが何をもちて正しいとしているかを知ることができます。この正しさを捉えることなく、教師側の正しさを一方的に押し付けても、自立した学習者にはならないでしょう。

人の営みとしての算数数学

フロイデンタール氏は、「我々の文化的資産は、既に完成したものとして若者に提供するには、あまりにも危険である。」と述べています。そうであるとすれば、「天から真理が降ってくるのを、手を広げて待っている」子どもたちの姿は、望ましいものではありません。「えらい人の言うことを聞く」「だれもいないと路頭に迷う」のは、21世紀に、アジア列強のなかで、日本の子どもたちが生き残れるはずがないのです。むしろ、「自ら真理を一步ずつ作り上げていく子供」を目指していきましょう。それには、はじめから真理を与えてしまっでは、作りあげる心は育ちません。むしろ、子どもたちの作り出すものが宝物です。その宝物をもっといいものにしようとする。その手助けをする、お膳立てをするのが教師です。なぜなら、そもそも、「数学」は、真理を求める知的探究のたゆまない営みの結実であるからです。こうした教育観は、数学の成立過程を見ても、決して否定されるものではないはずです。

数学=「完成品」?



「我々の文化的資産は、既に完成したものとして若者に提供するには、あまりにも危険である。」(1971, p.415)

「好き・大切」のために・・・

これからの算数・数学教育の目標には、「好き・大切」という心を育てることが含まれます。そのためには、人の営みとしての算数・数学に向けて私たちは歩み出さなければなりません。

「好き・大切」のために **目的**

内容 数学的モデリング過程

- モデルを手作りしようとする子供たち
- モデルの結果を現実にあてはめる子供たち
- よりよいモデルへ向かっていく子供たち

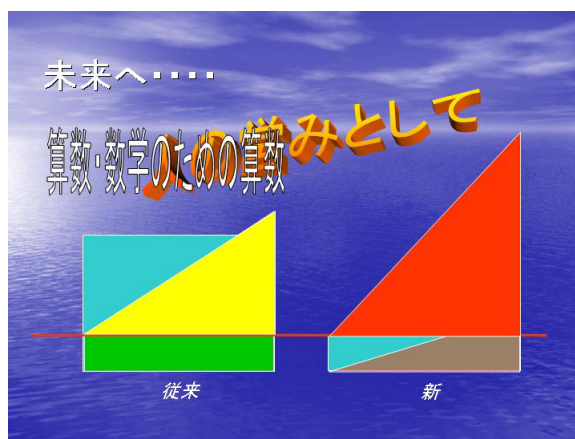
指導法 「説明する」活動

- 「なぜ？」を問う心を持つ子供たち
- 自分にとっての「正しさ」を追い求める子供たち
- 「正しさ」を分かち合おうとする子供たち

今日は、2つの提案をさせていただきました。一つ目は、数学的モデリング過程です。これは、教材の見直しに主につながると思います。二つ目は、「説明する活動」です。これは、指導法の見直しに主につながると思います。

未来へ

教える内容をいくら削減しても、「できない子ども」「わからない子ども」がいなくなるとは思えません。かといって、これまでと同じことを繰り返していても、21世紀に必要とされる人材の育成に答えることにはなりません。ですから、これまで何気なくやっていることを、もう一度見直してみましょう。今日、お話しした、モデリングの考え方や、説明する活動は、その一例にすぎません。そして、算数のために算数を教えるのではなく、人の営みのために算数を教えていただきたいと思います。算数は宗教ではありません。誰かえらい人から、ありがたく頂くもので、与えられるものでもありません。算数を作り上げるのは子ども自身です。その上、作り上げたものが正しいかどうか判断するのは子供自身です。そして、こうして育まれた力が、生涯にわたって、算数・数学を超えて、子どもの生き様を決めていくのではないのでしょうか。10年後、今やっていることが本当によかったかどうかが裁かれます。その時を考えたつ、私たちは算数の指導に取り組んでいかなければならないと思います。今日は、本当にありがとうございました。



注

- 1) 国際教育到達度評価学会 (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement: 略称 IEA) が 1995 年 2 月に実施した第 3 回国際数学・理科教育調査 (Third International Mathematics and Science Study: 略称 TIMSS) による。データは中学校 2 年生に行った結果。

2) ひまわりの種は円の中に規則正しく詰まっている。中心から右回りと左回りの2種類のらせんが重なり合っているように見える。それは、花の形を円として、1番目にできる種と2番目にできる種との弧に対する中心角が137.5°と決まっているためである。この角度を黄金角という。詳しくは以下のURL参照。

<http://math-edu01.shinshu-u.ac.jp/Teaching/sakuhin/computer98/96e3204c/index.htm>

3) 記録者は以下のように解釈した。この教材のモデル化過程としては、まず、実際のひまわりの種に対して、その並びのみを抽象することである。これが数学の世界に定式化することであり、それを処理した結果、なんらかの並びが結果として得られる。それを再び現実に戻して、解釈・評価することによって、より現実を正確に捉えるという意味で、よりよい「種の並び」のモデルを目指すよ

う工夫や改善をする。これを繰り返し行うことがモデル化過程であり、それによって「らせん形」が導かれる。さらに、1番目にできる種と2番目にできる種との弧に対する中心角を黄金角に定式化し、「らせん形」を導くという、別のモデル化過程も考えられる。この後者のモデル化は前者に対して、よりよいモデルであり、この意味においてもモデル化過程であると考えた。

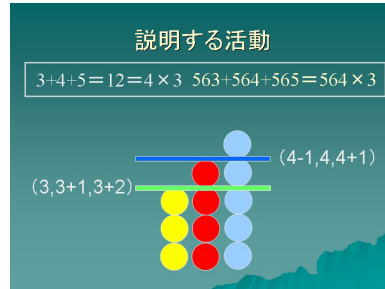
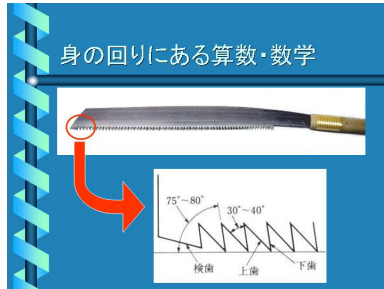
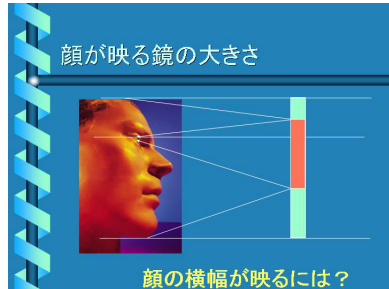
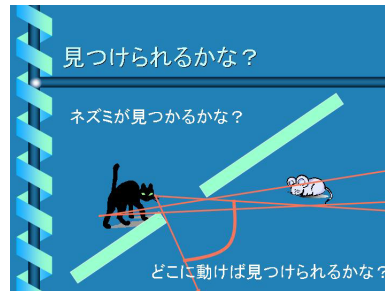
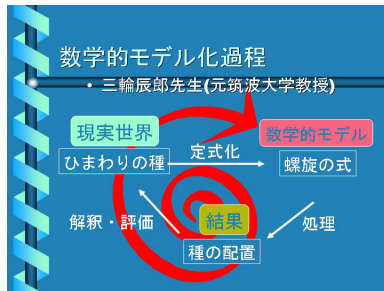
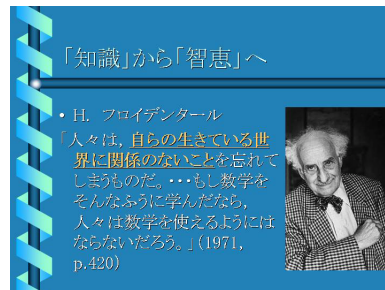
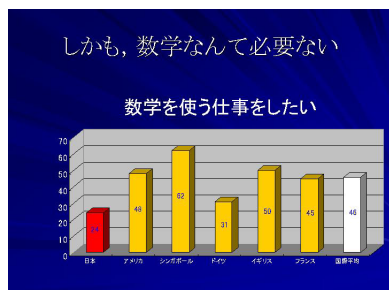
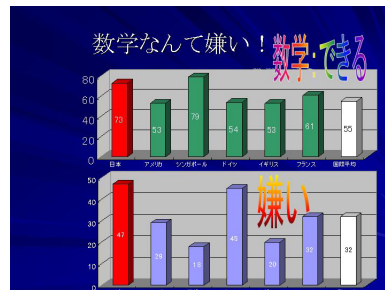
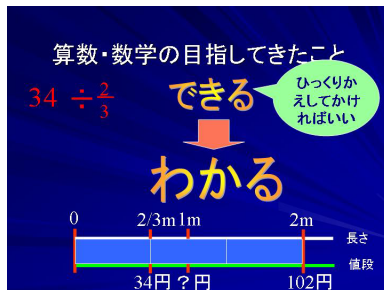
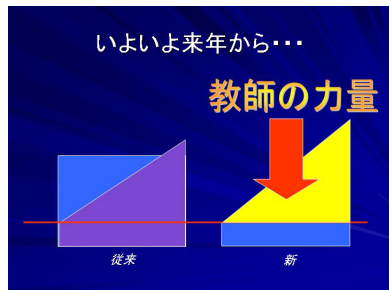
講演日：2001年8月10日

会場：プランナール三朝

記録者：種本将明，松田由香里，山脇雅也，和田達次

(みやざき・みきお，信州大学教育学部理数科学教育講座(数学教育分野))

資料：主要プレゼンテーションスライド



「伊藤家の食卓」から

- ◆ $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$
- ◆ $8+9+10+11+12+13+14+15+16+17=125$
- ◆ $56+57+58+59+60+61+62+63+64+65=?$ 605
- ◆ $72+73+74+75+76+77+78+79+80+81=$ 765

「なぜ？」を問う心を育む

理由

◆ 疑問の質

- なぜ？
- 納得した？
- いつでもOK？

原因⇒結果

$3+4+5=12=4\times 3$

◆ 教授学的契約

- 活動の場
- 定式化の場
- 妥当化の場
- 公共化の場

「丁寧なプロセス！」

「くりあがり」は、たしざんだけよ！

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 6 \\ \hline 308 \end{array}$$

「くりあがり」をしているんだから、あってるよ。

自分にとっての「正しさ」

「なんで、いけないの？」

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 6 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ + 9 \\ \hline 8 \end{array}$$

自信

数学＝「完成品」？

「我々の文化的資産は、既に完成したものであるとして若者に提供するには、あまりにも危険である。」(1971, p.415)

「好き・大切」のために **目的**

内容 数学的モデリング過程

- モデルを手作りしようとする子供たち
- モデルの結果を現実にあてはめる子供たち
- よりよいモデルへ向かっていく子供たち

指導法 「説明する」活動

- 「なぜ？」を問う心を持つ子供たち
- 自分にとっての「正しさ」を追い求める子供たち
- 「正しさ」を分かち合おうとする子供たち

未来へ……

算数・数学 **対** 数の学びとして

従来 新