卒業論文要約[鳥取大学数学教育研究第４号, 2002]

コンピュータ活用における数学教材の開発

－教材の展開事例集－

田中　敬

指導教官：矢部敏昭

Ⅰ. 研究の目的と方法

本研究では、Cabri-Geometry のような図形ソフトが、生徒の図形の知識を作る活動をどういった形で支援しているかについて考察する。また、さまざまな数学教材において図形ソフトの活用により、どんな展開や活動が考えられるかも考察の対象となる。

研究の方法としては、図形ソフトと生徒の学びとの関係を文献研究より明らかにして、また学習指導要領の図形領域における目標などを述べ、その中で「定義」という言葉の意味に注目して論じる。図形ソフトの１ つである Cabri-Geometry の歴史やその背景、機能などを述べ、その後に「三角形の発展問題」「ビビアニの定理」「ナポレオンの定理」という数学教材において、実際に Cabri-Geometry,Cabri-GeometryⅡを操作してみて、考えられる展開や活動を考察する。

Ⅱ. 本論文の構成

（1 ページ35 字×32 行，91 ページ）

Ⅲ. 研究の概要

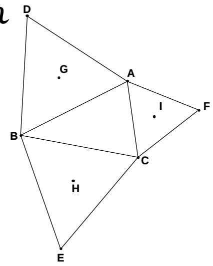
図形の学習において、「観察や操作、実験を通した」活動は大切である。これは、平成14 年度から施行される新学習指導要領でも重要視されている。ある問題があり、そこから学習者は、さまざまな疑問を抱き、推測したり、探究する。紙や鉛筆、定規、コンパスといった作図道具を用いた活動と比べて、図形ソフトを用いた活動では、学習者の探究したい内容の過程や結果をディスプレイ上で即座に、正確に見ることができる。言い換えれば、自分の知的な活動を写すことのできる『鏡』の役割を、このような図形ソフトウェアは果たしていると考えることができる。このことにより、図形を「動的」に扱うことができる図形ソフトは「知的な鏡（Intellectual Mirror）」であると位置付けられる（ハーバード・エデュケーショナル・テクノロジー・センターのジューダ・シュワルツ (Judah Schwartz)による）。

その「知的な鏡」としての利用の展開事例として、「ナポレオンの定理」の問題を取り上げる。操作しているなかで、Cabri を利用しなかったら到底発見することができなかった性質などが多くあった。また、Cabri の利用により、自分の考えや発想

の結果が、即座にCabriの画面上で見ることができた。また、補助線を自由に引いたり、測定をしたりできるので、証明をする上でとても役にたった。まさに、「知的な鏡」としての活動を、身をもって体験できた。

◎「ナポレオンの定理」の展開事例

問題：三角形ABCの外側にそれぞれの辺を1辺とする正三角形を作図する。その正三角形の重心をそれぞれG,H,Iとする。気づいた関係をすべて述べなさい。



考えられる性質は以下のように挙げられる。

(1) 3点G,H,Iを結び、△GHIを作る。△GHI は「ナポレオンの三角形（Napoleon's outer Triangle）」と呼ばれている。辺の長さや角度を測ると、それぞれ等しく、△GHIは正三角形である（図1-1）。

(2) △ABD, △BCE, △CAFの外接円を作図すると1点Jで交わる（図1-2）。

(3) 重心ともとの三角形の向かい合う頂点を結ぶ。すなわち、AとH,BとI,CとGを結ぶ。AH,BI,CGの長さを測ったところ、等しいところは見つからないがAH,BI,CGは1点Kで交わる（図1-3）。

(4) 外の正三角形の頂点ともとの三角形の向かい合う頂点を結ぶ。すなわち、AとE,BとF,CとDを結ぶ。AE,BF,CDの長さを測ったところ、AE=BF=CDということがわかり、またAE,BF,CDは1点Lで交わる(図1-4)。そして、角度を測ると、∠ALD=∠DLB=∠BLE=∠ELC=∠CLF=∠FLA=60°であることがわかった（図1-5）。

(5) (4)のとき、AL+BL+CLを計測してみる。すると、AL+BL+CL= AE=BF=CDであった（図1-6）。

(6) (2)の点J、(4)の点Lは一致し、また、この2点は「フェルマー点※)」とも一致した。

※フェルマー点…次の「フェルマーの問題」に由来する。

「与えられた鋭角三角形ABC内に1点Pをとり、Pから各頂点A,B,Cへいたる距離の和を最小にせよ。」

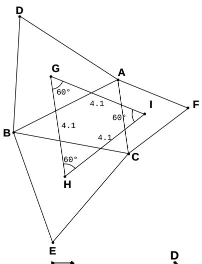


図1-1

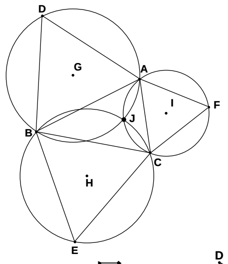


図1-2

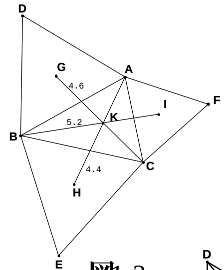


図1-3

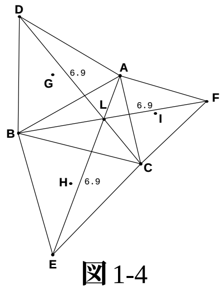


図 1-4

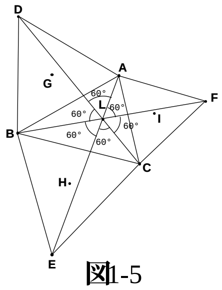


図1-5

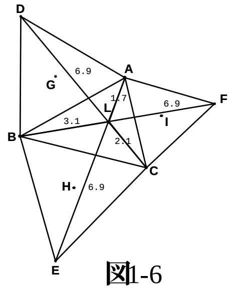


図1-6

(1)の証明のみ述べる。図1-7参照。他は省略。

<証明>

△AGIと△ADCにおいて、

∠GAI=∠GAB+∠BAC+∠CAI

=30°+∠BAC+30°=60°+∠BAC

∠DAC=∠DAB+∠BAC=60°+∠BAC

ゆえに、∠GAI=∠DAC・・・・・・・・・・・①

また、AG:AD=$\sqrt{3}\times\dfrac{2}{3}$:2=1:$\sqrt{3}$ ・・・・・②

AI:AC=$\sqrt{3}\times\dfrac{2}{3}$:2=1:$\sqrt{3}$・・・・・・・・・・③

①,②,③より、2 辺の比とその間の角が等しいので、△AGI∽△ADC・・・・・・④

対応する辺の比は等しいので、GI:DC=1:$\sqrt{3}$

ゆえに、GI=$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$DC・・・・・・・・・⑤

同様に、△BGH∽△BDC・・・・⑥より、

GH=$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$DC・・・・・・・⑦

⑤,⑦より、GI=GH・・・・・・・・⑧

④より,∠AGI=∠ADC, ⑥より,∠BGH=∠BDC

ゆえに、$\angle AGI+\angle BGH=\angle ADC+\angle BDC$

$=\angle ADB=60^\circ$

$\triangle AGB$ において、

$\angle AGB=180^\circ-\angle GAB-\angle GBA$

$=180^\circ-30^\circ-30^\circ=120^\circ$

$\angle HGI=120^\circ-(\underline{\angle AGI+\angle BGH})$

$=120^\circ-\underline{60^\circ}=60^\circ$ ・・・・⑨

⑧,⑨より、△GHI は頂角が60°の二等辺三角形、すなわち正三角形である。

<証明終了>

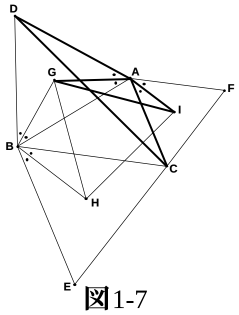


図1-7

（発展的な展開Ⅰ）

外側でなく、内側に作って考える。よって、三角形ABC の内部にそれぞれの辺を1 辺とする正三角形を作図し、その重心をそれぞれG',H',I'とする(図 2-1)。

(1') 3 点G',H',I'を結び、△G'H'I'を作る。△G'H'I' は「Napoleon's inner Triangle」と呼ばれる。辺の長さや角度を測ると、それぞれ等しく、△G'H'I'は正三角形である（図2-2)。

(2') △ABD', △BCE', △CAF'の外接円を作図すると、1 点 J'で交わる（図2-3)。

(3') (3)を参考に、A と H',B と I',C と G'を結ぶ。AH, BI,CG の長さを測ったところ、等しいところは見つからないし、AH',BI',CG'は交わらない（図2-4)。しかし、AH',BI',CG'を延長すると、1 点 K'で交わる（図2-5)。

(4') (4)を参考に、A と E',B と F',C と D'を結ぶ。AE', BF',CD'の長さを測ったところ、AE'=BF'=CD'ということがわかり（図2-6)、またAE',BF',CD'をそれぞれ延長させたものは1 点 L'で交わり、点L'の周りの角はすべて60°であった(図 2-7)。

外側の場合と違い、フェルマー点は関係していなかった。ただし、点J'と点L'は一致した。

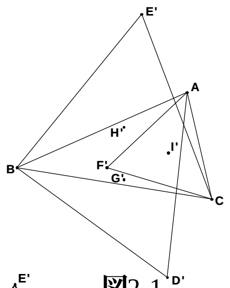


図2-1

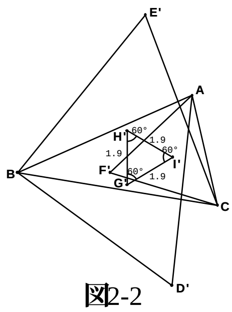


図2-2

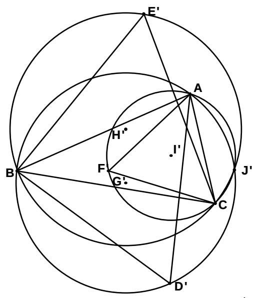


図 2-3

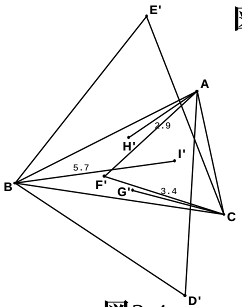


図2-4

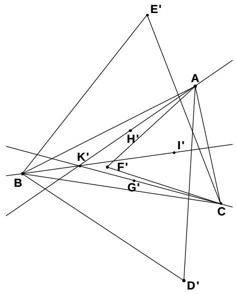


図2-5

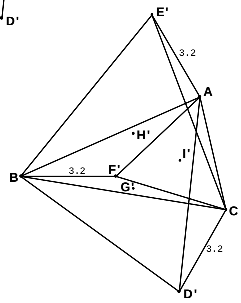


図 2-6

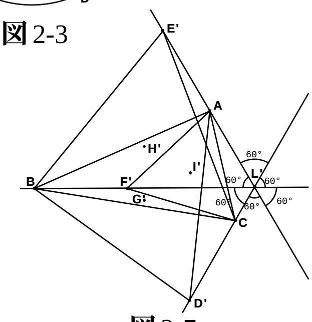


図 2-7

（発展的に考えるⅡ）

外側（outer）と内側（inner）の 2 つの三角形の関係を調べる。

(1'') outer Triangle の頂点とinner Triangle の頂点はそれぞれもとの三角形の辺に対して線対称になっている。すなわち、点G と点 G'は辺AB に対して、点H と点 H'は辺BC に対して、点I と点 I'は辺CA に対して、それぞれ線対称になっている（図3-1)。

(2'') 面積の関係－次のような関係が成り立つ。

(☆)『(outer Triangle)－(inner Triangle)=(△ABC)』

(★)『(outer Triangle)＋(inner Triangle)

=(3 つの正三角形の平均)』

（⇦図3-2）

(3'') outer Triangle と inner Triangle の重心は一致する（図3-3)

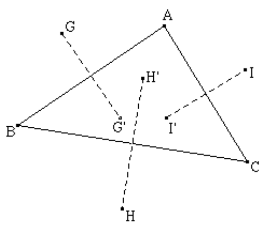


図3-1

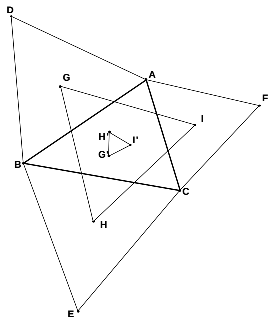


図3-2

Area(GHI)=16.8cm²

Area(G'H'I')=0.5cm²

Area(ABC)=16.3cm²

Area(ABD)=18.8cm²

Area(BCE)=21.4cm²

Area(CAF)=11.6cm²

$\frac{1}{3}$ *{(ABD)+(BCE)+(CAF)} =17.2666…*

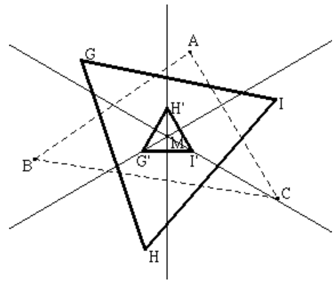


図3-3

（発展的に考えるⅢ）

・周辺の図形を正方形、正五角形、正六角形に変える（図4-1は正六角形）。

・もとの図形を四角形に変えて、周辺の図形を正三角形、正方形に変える（図4-2は正方形）。周辺の図形が正方形のときに考えられる性質は以下のことが挙げられる。

(1°) **周辺に作られた正方形の重心の対角を結ぶと、その対角線は、等長で、垂直である（図4-3）。よって、もとの四角形の1点を動かしたときの、対角線の交点の軌跡は、円となる（図4-4）。**

(2°) **もとの四角形の形をさまざまに変えると、重心を結んでできた図形もさまざまに変わる（表1；図は省略）。**

(3°) **もとの図形がどんな図形でも下の(◇)が成り立つ。もとの図形が平行四辺形やひし形、長方形、正方形のように、outerやinnerが正方形になる場合、下の(♦)が成り立つ。図4-5はもとの図形が等脚台形、図4-6はもとの図形が平行四辺形の場合である。**

(◇)『(outer) － (inner) = (□ABCD) ×2』

(♦)『(outer) ＋ (inner) = (4つの正方形の和) ÷2』

もとの図形	外側	内側
四角形	四角形	四角形
等脚台形Ⅰ	たこ型	凹四角形
等脚台形Ⅱ	たこ型	たこ型
平行四辺形	正方形	正方形
ひし形	正方形	正方形
長方形	正方形	正方形
正方形	正方形	1点

表1

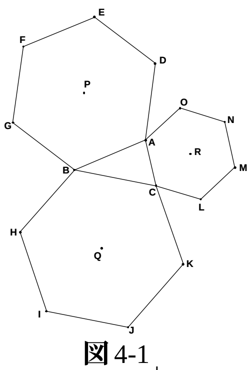


図4-1

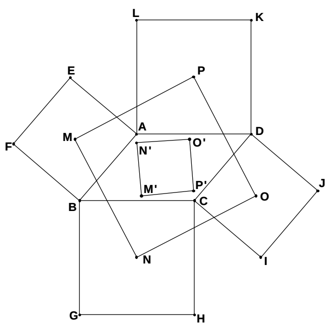


図4-2

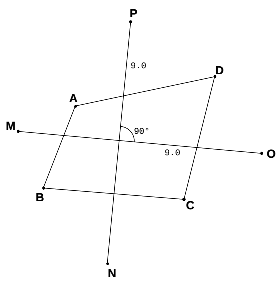


図4-3

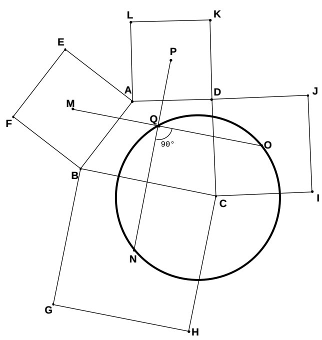


図4-4

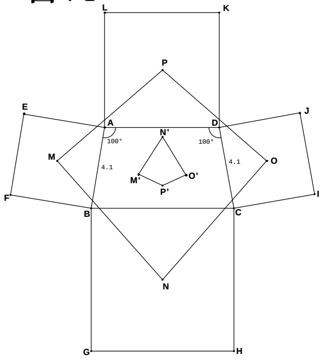


図4-5

Area(MNOP)=53.8cm²

Area(M'N'O'P')=2.8cm²

Area(ABCD)=25.5cm²

Area(AEBF)=16.5cm²

Area(BGHC)=50.0cm²

Area(CIJD)=16.5cm²

Area(DKLA)=32.2cm²

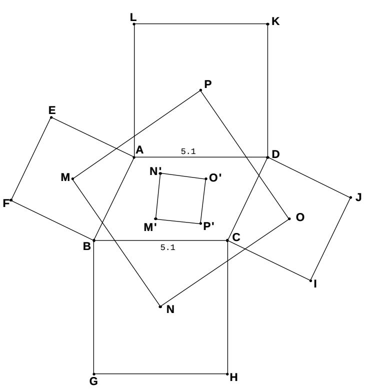


図4-6

Area(MNOP)=35.2cm²

Area(M'N'O'P')=3.0cm²

Area(ABCD)=16.1cm²

Area(AEBF)=12.5cm²

Area(BGHC)=25.7cm²

Area(CIJD)=12.5cm²

Area(DKLA)=25.7cm²

Ⅳ. 研究の結果

ｉ）考察のまとめ

来年度から施行される新学習指導要領は、[ゆとり]の中で豊かな人間性や自ら考える力などの[生きる力]の育成が基本となっている。中学校数学の図形領域においては、論理的な思考能力の育成のために論証や証明の取り扱いがより丁寧になるとともに、「観察、操作や実験を通した」活動が重要視されている。図形学習の中で、生徒が自分でしてみたいことを実際にディスプレイ上で映して見るという意味で、図形ソフトは「知的な鏡」として利用される。その結果をみることで、自分なりの知識を構成することが可能となるのである。

4〜6 章で、実際に 3 つの教材について、私が Cabri-Geometry や Cabri-GeometryⅡを操作して、展開の一例を述べた。操作しているなかで、Cabri を利用しなかったら到底発見することができなかった性質などが多くあった。また、Cabri の利用により、自分の考えや発想の結果が、即座にCabri の画面上で見ることができた。また、補助線を自由に引いたり、測定をしたりできるので、証明をする上でとても役にたった。まさに、「知的な鏡」としての活動を、身をもって体験できたのである。

私は、紙と鉛筆、定規やコンパス、分度器などの道具の機能をCabri の機能がそれ以上に果たしているのではないかと思う。「それ以上に」というのは図形を「動的に」扱うことが可能になったということである。

清水克彦氏は、「動的」という意味を、

・「図形の持つ性質や作図によって与えられる性質に関する一部を変化させること」
・「図形の持つ性質や作図によって与えられる性質に関する一部を変化させて、生徒が図形をとらえられること」

と考えている。また、清水氏は次のように述べている。

「図形を「動的に」扱うことにより、図形の世界がダイナミック（Dynamic;動的な）になる。これは紙の上に書かれた図が変化せずスタティック（Static;静的な）であることとは対照的である。生徒の活動も、与えられた性質を確かめたり証明を考えたりという活動だけでなく、ダイナミックになる可能性を持っている。さらに、図形の見方や数学の学習のとらえ方もダイナミックになっていく。」

Cabri で操作をしていると、さまざまな可能性を考えることができるので、私なりにDynamic に図形をとらえることができたと思う。

ⅱ）今後の課題

コンピュータ活用で期待できる効果は次のようなことが挙げられる。

・図形学習が発見的、探索的になり、主体的に進められる。
・図形の概念や定理についての理解が深まる。
・図形を動的に見たり、考えたりすることができる。
・証明への意欲を持つことができる。

授業の中にコンピュータを活用させる上で、考えられる問題点としては、次のようなことが挙げられる。

・ソフトの操作技能の指導が必要である。
・測定などの機能を安易に使用しないようにする。
・コンピュータの操作そのものへの興味・関心で終わらず、数学そのものの考えを追求させるようにする。
・直観や視覚に頼った活動のみにならないよう、「ことば」による押さえが必要である。
・「予想」や「自分の考え」をしっかり持たせることが必要である。
・生徒の評価をどう考えるか。

最後の「生徒の評価」であるが、Cabriの『Exposition（説明）』や『History（履歴）』を用いて、実際生徒が図を作成した手順などを教師が見ることができ、評価をすることができるのであるが、まだ考察の余地があり、今後の課題とする。

実際、4~6 章で行った教材開発は何十時間もかかった。私が行ったような教材開発を実際の授業の中で同じように行おうとすると、時間が足りないはずであり、教師の効率的な問題提示が必要とされる。上に挙げたような問題点を考慮に入れ、効果的で、しかも能率的な問題提示・展開を行うことが、授業におけるコンピュータ活用の課題と考える。

主要引用・参考文献

・コンピュータで支援する生徒の活動－数学科・図形分野での新しい展開－
（清水克彦・垣花京子編著；1998 年 2 月；明治図書）
・中学校学習指導要領解説－数学編－
（平成10 年 12 月）
・ 初等数学概論（内海庄三・平岡忠編；昭和58

年 3 月 25 日）
・鳥取大学教育学部 平成 10 年度 学位論文（津田加奈子 編）
・啓林館 中学校第 2 学年 教科書（平成9 年度版）
・啓林館 中学校第 2 学年 教科書（平成14 年度版）
・ コクセター 幾何学入門第2 版（銀林浩 訳;1994 年 4 月；明治図書）
・わかる幾何学（秋山竹太郎 著；昭和34 年 10 月 30 日；日新出版）