

子どもの数学的思考に関する一考察

- 思考の実際とその特徴 -

松岡 由布子

指導教官：矢部敏昭

・ 研究の目的と方法

子ども達の「発想が豊かだ」とされる論について、みえにくいが存在しているであろう「筋」を浮き上がらせ、子ども達がどのように思考しているのかみていくことを、本研究の目的とする。論における「筋」を浮き上がらせることで、子ども達が上手く説明することができなかった、論と論との組み立ての様子を、確かなものとして捉えていく。子どもの、突拍子もないといわれる言動の要因、つまり、思考過程の様子を捉えていくことで、的確な指導や助言を行うことができるのではないかと考える。そして、的確な指導や助言によって、子ども達自身が自分の考えや論を確かなものとして自覚していくことができるのではないだろうか。

研究の方法としては、思考そのものについて、直観や試行錯誤に関する文献を中心に研究を始めていき、その中で、数学的なものの見方であるとか考え方を、事例を挙げていく中でみていくことにする。また、子どもの発達段階にみられる概念の形成、思考の特徴を合わせて研究していくことで、子どもの思考について、多面的に捉えていくことができるのではないかと期待する。

文献による研究、考察の次に、実際に子どもの思考の様子を観察し、その特徴を考察していく。授業観察から、子ども達の思考の様子を考察していく中で、それまで研究してきた内容についても再考していく。そして、文献による研究、考察と、実際の授業観察の様子から考察できることを互に関係づけながら、子どもの思考の特徴をより深く研究していくことにする。

・ 本論文の構成

序章

はじめに 研究の動機

1 研究の目的

2 研究の方法

第1章 「考える」ということ

1-1 課題解決の過程にみられる「考える」ということ

1-1-1 思考と直観

1-1-2 課題の観察

1-1-3 課題の構造化

1-1-4 試行錯誤

1-2 「考える」と試行錯誤

1-2-1 「三角形の外心」の問題を通して

1-2-2 「魔方陣」の問題を通して

1-3 直観と分類行動について

1-3-1 共通するものや関連性を探ること

1-3-2 「6枚のクッキーを7人で分ける」という問題を通して

第2章 子どもの発達段階にみられる思考の特徴

2-1 ピアジェの発達段階モデルについて

2-1-1 類(クラス)と関係の理解

2-1-2 保存の概念

2-2 分類行動と同一性の感覚

第3章 子どもの思考の実際

3-1 授業観察の視点の設定

3-2 授業観察にみられる子どもの思考1
「面積」の授業を通して

3-2-1 思考の実際

3-2-2 思考にみられる分類行動

3-2-3 思考にみられる同一性の感覚

3-3 授業観察にみられる子どもの思考2
「分数」の授業を通して

3-3-1 思考の実際

3-3-2 課題の提示にみられる同一性の感覚

3-3-3 分数の数としての認識

3-4 調査問題にみられる子どもの思考 「分数」について

3-4-1 調査問題における視点の設定

3-4-2 思考の実際

3-4-3 抽出児にみる思考の特徴

第4章 本研究で得られた結果と残された課題

4-1 本研究で得られた結果

4-2 残された課題

さいごに

引用・参考文献

(1 ページ 40 字 × 36 行, 78 ページ)

・ 研究の概要

本研究では、「考える」ということの根底に働いている、論理では説明できない「直観」や「同一性の感覚」について、考察してきた。文献による研究を通して、思考の基には分類行動が成されており、また、分類行動の基礎に同値関係があり、それは同一性の感覚や直観によってつくられていることがわかった。このことを、直観と分類行動に視点を置き、詳しく次に述べることにする。

人は生まれながらにして、分類行動をしている。まず初めにする分類行動は、自分にとって不快なものであるかそうでないか、である。これは誰かに教えられて成される行動ではなく、本能によって成される行動と言ってよいだろう。分類行動は人が成長するにつれてより複雑に成されるようになる。その分類行動の中には意識的に成されるものもあるだろうし、本能的に、無意識的に成されることもある。そしてこれらの分類行動は、絶えず繰り返されながら成されているのである。

分類行動のもとには「同じである」か「同じでない」という判断がある。しかし、全く同一の物や事はないので、「同じである」という判断は「同じような」とか「ある点からみて同じである」ということから発せられているといえる。つまり、ここでの「同じ」というのは、同一性 (identity) を示す等号「 $a = b$ 」ではなく、同値性 (equivalence) を意味する「 $a \sim b$ 」である。同値性の三つの性質 (反射律・対称律・推移律) をもつ関係「 \sim 」を同値関係 (equivalence relation) といい、人の無意識に行う分類行動の基礎となるところにもこのような同値関係がある。人が「同じである」とする

ことができるのは、その基礎に「同一性の感覚」があるからである。つまり、同一性の感覚が同値関係をつくっているのである。

このことにより、共通するものや関連性を探っていくことになるのではないだろうか。また、この同一性の感覚と同値関係の両者がつながる部分に「直観」が働いているのではないかと考える。なぜなら、「同じである」ことは「ある点からみて同じである」ということから発せられていると先に述べたが、この「ある点」を定めることに対して、「直観」が働きかけているように思えるからである。このとき、先行経験が影響しているかもしれないし、していないかもしれない。分類行動は生まれながらに成されるものであったり、本能的に成されるものであったりするのであるから、一概にどちらであるかはいえることではない。

しかし、ある程度成長し、経験・体験をしてきた者が「ある点」を定めて同値関係をつくる時、そこでは本能的な「直観」だけでなく何らかの影響を受けているだろう。そして、感覚が常に変化し研ぎ澄まされていくものだとすると、「同一性の感覚」も同じように変化を成し得るし、分類行動も絶えず繰り返されながら、何かしらの変化を成しているのではないかと考えられる。(第1章, 1-3-1より)

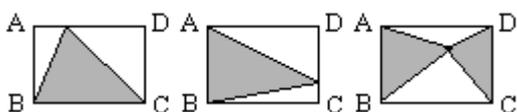
ピアジェの発達段階による「類(クラス)と関係」の理解においては、分類行動の発達段階を考察することができた。それは、次元からだけでなく他の諸次元から統一された一つの体系をつくるのが、類(クラス)と関係における発達の最終段階であると同時に、分類行動の最終段階でもあるということである。つまり、分類行動は発達段階によるものであり、同一性の感覚や直観も発達を伴い、子どもの発達とともに絶えず変化しているということが考えられるのである。

授業観察や調査問題を行い、子どもの思考の実際をみることで、その様相は実に様々であることがわかった。面積の授業観察においては、同一性の感覚を中心に考察を進めていったが、この考察によって、次のことが結論として得ることができた。同値関係を一つずつ取り上げ、それらの関係を広げていくことで、統一された一つの体系を認識することや、それを形成している各部分を捉えていくことができる、ということである。また、このことは、思考そのもの

についてもいえることであり，思考することは同一性の感覚が働くことでもあるといえるであろう。

次に，統一された一つの体系が認識されおらず，体系を形成している各部分を個々に捉えている様子を取り上げ，考察する。

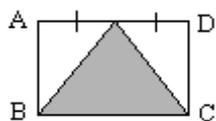
「長方形 ABCD に適当な 1 点を打ち，その 1 点と各頂点を結んでできる線分で長方形を区切り，色分けした面積を比べてみよう。」



この課題に対して，1 点を辺 AD の中点に打つたものを指して以下のやり取りがみられた。

C 1 白い部分 2 つを合わせた面積は色のついた面積と同じ。

T 色のついた部分はちょうど全体の半分ということね。



ここで，C 1 は T の言い換えに納得が得られない様子であった。そこで次のような考察を行った。

C 1 の発言を「2 つの面積は同じ」，T の言い換えを「全体の半分の面積」とすると，「2 つの面積は同じ」～「全体の面積の半分」と，表すことができる（ここで，「～」は同値関係を示すものとする）。このような関係を認識させるには，両者の間にさらなる同値関係を結ぶ要素が必要である。また，ここでいう統一された一つの体系は，「長方形 ABCD において，辺 AD 上に 1 点 P を打ち，線分 PB，PC を引いたときにできる三角形 PBC は長方形 ABCD の面積の 2 分の 1 である」ことになる。実際この場面で必要となる同値関係を結ぶ要素，つまり体系を形成する部分は，「長方形の対角線は，その長方形の面積を二等分する」ことや，「底辺と高さが等しい三角形は面積も等しい」ことなどである。これらの要素を個々別々に捉えていては，同値関係はなかなか見出せない。同値関係を見出すことは，統一された一つの体系を形成している各部分を，一次元の注意からだけでなく，諸次元の注意から捉えていくことが重要となってくる。諸次元の注意から捉えることは，その対象の構造をより詳しく捉えることに

つながる。しかし，各部分を個々別々にしか捉えることができない場合には，それらをつなぐ同値関係を一つずつ取り上げて関係をみていくことが大切であると考えられる。

さらに，分数の授業観察と調査問題においては，分数の数としての認識を中心に考察を進めてきた。子ども達の分数に対する意識は，形式的・機械的な操作の対象となるものであり，また，そのような操作を行わなければならないものとして認識されているようであった。そのことが特に顕著に表われていたのが，分数そのものの大きさを捉えるという場面である。分割分数についての理解は成されているのに対し，数量を伴ったり，具体的な量を伴った場合の理解は成されていないことが多かった。つまり，分割分数と数量を伴う分数の両者において，それらの関係の理解は成されておらず，「分数」という一つの統一された体系を認識することができていないことがわかる。

次に，実施した調査問題から，正答率の低さが目立った調査問題と，分数は形式的・機械的な操作の対象であることが表われていた調査問題について取り上げ，考察する。

調査問題 下の問いに答えましょう。

(1) 3 m の $\frac{1}{3}$ を下の線分図に表しましょう。

(2) $\frac{1}{3}$ m の長さを下の線分図に表しましょう。

次に示す解答例は，得られた誤答の代表的なものである。

(1) 3 m の $\frac{1}{3}$ を下の線分図に表しましょう。

(2) $\frac{1}{3}$ m の長さを下の線分図に表しましょう。

調査問題は，分割分数と，数量を伴う分数についての理解をみるために設定したものである。

(1) では 9 割に近い子ども達が正答しているのに対し，(2) では 2 割の子どもが正答しているに留まっている。また，(1)，(2) とともに正答しているのは 2 割を切っている。子ども達にとっての分数とは，分割分数の意識が高く，数量を

伴う分数に対しての意識は低く，理解も成されていないと推測できる。

調査問題 分数の大きさ比べをします。
(1) 通分しないで比べる方法を，考えがわかるように説明しましょう。
・ $5/8$ $3/7$ ・ $13/17$ $2/9$
(2) $12/7$ と $6/5$ の大きさを比べます。
あなたの考え方と同じものをア～エの中から選んで○をつけましょう。
・ $12/7$ $6/5$
ア. 帯分数に直して，1をおいといて， $5/7$ と $1/5$ を比べる。
イ. 分母をそろえて（通分して） $60/35$ と $42/35$ を比べる。
ウ. 分子をそろえて $12/7$ と $12/10$ を比べる。
エ. $12/7$ は $14/7$ (=2) に近くて， $6/5$ は $5/5$ (=1) に近いから，
 $12/7 > 6/5$ 。
・ 他にも考え方があれば書きましょう。

調査問題は，分数そのものの大きさをおよその見当をつけて捉えること，数の相対的な大きさを見積もりを通して捉えていくことなどに視点を置き，設定したものである。

ほとんどの子ども達が(1)において線分図やタイル図を用いており，また，小数に直して比較する子どもも数人いた。ここで期待していた回答は，次に示すものであったが，そのような回答は2人からしか得ることができなかった。

・ $5/8$ $3/7$ $1/2$ を基準に...
 $3/7 < 1/2 < 5/8$
だから， $5/8 > 3/7$
・ $13/17$ $2/9$ 0と1を基準に...
 $2/9$ は0に近く，
 $13/17$ は1に近い。
だから， $13/17 > 2/9$

(2)の四択問題では，イ.の通分して大小比較を行うという手段を選ぶ子どもが7割以上であった。また，その子ども達の中には，調査問題の(2)において誤答が目立つ。

これらのことから，分割分数と数量を伴う分数の両者において，それらの関係の理解は成されておらず，「分数」という一つの統一された体系を認識することができていないことがいえるだろう。

・ 研究の結果

本研究では，直観や同一性の感覚について考察を行い，「思考」のもとには分類行動があり，

同一性の感覚や直観が重要な働きを成していることがわかった。また，同一性の感覚や直観は，発達段階によるものであり，子どもによってその様相は様々であるということがいえる。

しかし，子どもの思考の中に実際にどのような形で直観や同一性の感覚が表われているのか，明らかに示すことができなかった。そして，直観や同一性の感覚は，発達段階によるものだとしながらも，その様子を思考の実際にみることができず，それらを体系づけることができなかった。また，思考することの過程において，試行錯誤が大きな影響を与えるであろうことを指摘したが，追究することまでに及ばず，指摘するだけに終わってしまった。以上のことが，本研究で取り上げられなかった課題であり，今後，追究していきたい課題である。

また，思考の実際を考察していくことで，直観や同一性の感覚についてさらに追究していくことができると考えていたが，そのためには，子どものものの認識についての研究が必要であると思われる。つまり，思考することや認識することのほとんどは，直観や同一性の感覚によって成されているとしながらも，「認識するとはどういったことなのか」ということについては何も追求していなかったのである。そこで，「認識すること」についての研究を，先に挙げた今後の課題の中に含めたい。

子どもの思考を定義づけることは容易なことではないし，数学的な思考を定義づけることも同様である。しかし，子ども達の思考の実際を多くを観察し考察していくことで，その様子を特徴づけていくことはできるだろう。特徴づけることで，子どもの数学的な思考を一つでも多く取り上げていくことができれば，と考える。そして，子ども達一人一人に的確な助言や指導を行っていくことが，今後，最も大きな課題となるであろう。

主要引用・参考文献

- ・ 松原元一著「数学的見方考え方」国土社 (1990)
- ・ 銀林浩著「人間行動からみた数学」明治図書 (1982)
- ・ ロバート・S・シーグラ著 無藤隆ノ日笠摩子訳「子どもの思考」誠信書房 (1992)