

数学教育における「理解」に焦点を当てた教材開発

数学的教具の役割と開発

森崎 真

指導教官：矢部敏昭

研究の目的と方法

現在の算数・数学教育においては「わかる」と「できる」についての立ち入った反省がなされていないように思われる。これより、本研究では子供の「理解」がどのようになされていくかについての考察を行い、子供の理解に焦点を当てた「教具」の開発を行っていくことを目的とする。

そのため本研究では以下のような方法をとる。「理解」についてスケンプの論を基に、ランサム の指摘をあわせつつ考察する。次に、このことを受け、「理解」を反映させた実際の教具を考えていく上での視点を打ち出す。この際には、「数学」と「教具」の関係、教具の「役割」についても併せて考察する。最終的には、以上にことに留意しつつ、実際の「数学的教具」の開発に取り組んでいく。

本論文の構成

第1章 はじめに

- 1 - 1 研究の動機
- 1 - 2 研究の目的
- 1 - 3 研究の方法

第2章 数学教育における「理解」について

- 2 - 1 スケンプの考える「理解」について
- 2 - 2 ランサムの考える「理解」について
- 2 - 3 「関係的理解」の特性について
 - 2 - 3 - 1 スケンプの考える「関係的理解」の特性について
 - 2 - 3 - 2 関係的理解の長所について
 - 2 - 3 - 3 関係的理解の短所について
- 2 - 4 私の関係的理解のあり方
- 2 - 5 「関係的理解」と「用具的理解」の関連
 - 2 - 5 - 1 スケンプの考える二つの理解の関連

2 - 5 - 2 ランサムの考える二つの理解の関連

2 - 5 - 3 私の考える二つの理解のあり方

2 - 6 { 関係的理解 } を目指した指導とは

2 - 7 { 関係的理解 } を目指した授業実践

第3章 数学教育における「教具」の位置付け

- 3 - 1 数学と教具の関係
- 3 - 2 数学的教具の概念
- 3 - 3 数学教育における数学的教具の役割

第4章 数学的教具の開発に当たって

- 4 - 1 数学的教具となるための条件
- 4 - 2 私が考える数学的教具を作っていく上での「視点」

第5章 数学的教具の開発

- 5 - 1 四角錐合体教具（仮称）
 - 5 - 1 - 1 「四角錐合体教具」について
 - 5 - 1 - 2 { 四角錐合体教具 } を作ってみて
- 5 - 2 ピタゴラスのパズル
 - 5 - 2 - 1 ピタゴラスの定理についてのパズル
 - 5 - 2 - 2 ピタゴラスのパズルにおいて考えられる「関係的理解」
 - 5 - 2 - 3 ピタゴラスのパズルの教材化
- 5 - 3 子供自身が作っていく数学的教具

第6章 各章のまとめと今後の課題

- 6 - 1 各章のまとめ
- 6 - 2 今後の課題

第7章 参考文献

資料

(1 ページ 35 字 × 35 行 , 35 ページ)

・本研究の概要

本研究では、はじめに子供の「理解」について知るため、これを「関係的理解」「用具的理解」に区別し、それぞれについての考察を行っていった。「関係的理解」を「わかる」、「用具的理解」を「できる」とするならば、「わかる」と「できる」ことは、そもそも別な場所からなされるものとする必要があると、安易に「わかる = できる」とすることはできない。今日の算数・数学教育においては、この「わかる」と「できる」についての立ち入った反省がなされていないまま、「わかれば、できる」といった形が取られているように思われる。

「関係的理解」は、色々と考えているという試行錯誤がなされるため、次の課題の取り掛かりができやすいという特性がある。これは、算数・数学教育における「数学的な見方、考え方ができる」という教科目標につながってくる。よって「関係的理解」を目指した指導は、教科として目指すべき姿ということができる。

しかし、「関係的理解」は、「取り掛かりが、しやすい」「記憶しやすい」「知識自体を目標にできる」「有機的である」といった長所がある反面、「試験に間に合わない」「教科課程が過重になる」「評価が難しい」「教師が持ち続けてきた体制の調整の困難さ」といった短所が考えられる。長所が、教育目標論的重要性をとしているのに対し、短所では、その実践の困難さが浮き彫りとなっている。また、「関係的理解」「用具的理解」はともに達成されるべき教科目標であり、どちらか一方を積極的に目指すということとはできない。これより、私は一単元に置いての導入時の概念形成、言い換えれば「わかる」の部分の見直しの必要性を感じた。導入に置いての指導では、教師からの説明という形が一般的であるが、子どもを主軸に置いた実践をすることで子どもの理解も変わってくるのではと、私は考える。そもそも、数学とは「測量」などの活動と共に発達してきた学問であるため、「活動」と言った側面をとらえることができる。よって、算数・数学教育においても、子ども自身の活動を主に置くべきであると私は考える。しかし、手に何も無い状態で活動をするには限度があるため、ある何らかの「現実の小断片」の手助けが必要となる。これより、私は子ども理解に焦点を当てた数学的教具の使用を提案する。

しかし、「教具」には様々なものがあり、とても広い意味で捉えられてきたので、平林一榮氏のいう「子どもに教師が意図する望ましい活動を誘発させる現実の小断片」を一般的な教具の概念とし、私の考える「数学的教具」について考察していった。「教具」に成りうる

かどうかは、材などの物的質ではなく、「どのように使用するか」という「子どもの活動性」に掛かって来るものである。これより「教具」は、「子どもに求める活動」で、「訓練機」「説明器」「構造器具」「問題場面構成器」の四つに分けることができる。私は、この中でもとりわけ、「問題場面構成器」に着目し、以下の四点を含むものを「数学的教具」とすることとした。

- ・ 子どもの数学的活動が含まれている
- ・ 既習の知識、概念に幅を持たせることができる
- ・ 新たな課題発見につながる側面をもつ
- ・ 子ども自身が立ち入ることのできる余地が残っている

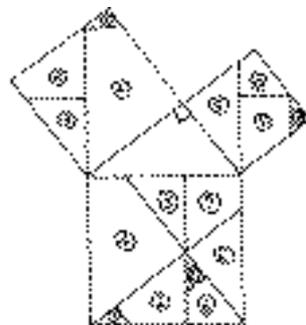
私は、この中で四点目の「子ども自身が立ち入れる余地」について、更に着目した。（「子どもが立ち入る」とは子ども自身が教具の製作を擬似的におこなったり、教師側から提示された教具に、それ以上の意味合いを見出すことができたりといったこととする）。子どもの自発的活動には、子ども自身の知識の「吟味」が存在し、これは「関係的理解」と言い換えることができるのではないだろうか。

実際に教具を作ると自分の中で、既習の知識、概念の吟味がおこなわれ、得るものが多くある。子どもにもこのような教具開発に取り組ませれば、深い「理解」をさせることができるのであろうが、それは困難なため、教具の取り扱い、教具への子どもの知識の反映といった点に留意した指導を行うことで、これと同様な効果を期待することができると思う。

・数学的教具の開発

- 1. ピタゴラスのパズル

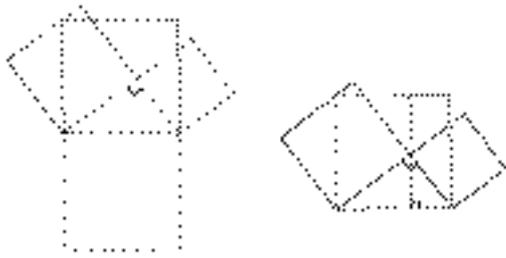
次に、数学的教具の提案の一例として、私の製作した「ピタゴラスの定理を用いたパズル」を挙げる（図1）。ここではその開発プロセスについて述べていく。



（図1）

このパズルは文献の中で「ピタゴラスの定理」の付録の一つとして記載されていたもので、それ自体の開発の経緯は載せられていな

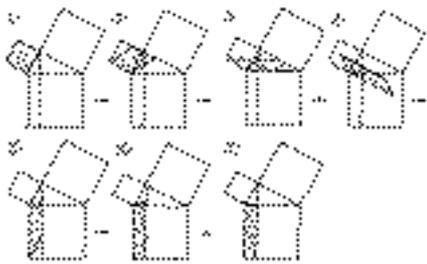
かった。一見、あまり規則性が無いように思われるが、一辺 a の正方形を上部にある2つの正方形の中に投影させていることに気がついた(図2)。次に三つの正方形に囲まれる直角三角形の直角の頂点から辺 a に向かい垂線を引き、その延長をもとると、各辺 a の正方形を、二つの長方形に分割することができる(図3)。これより、各辺 b, c の正方形それぞれで、一つずつ長方形を作れば一つの正方形に収めることができるのではという見通しを立てることができた。つまり、図形の一部を固定し、そこを中心に三角形などの図形の平行移動をすることにより、二つの長方形から一つの正方形を構成したのではないかとということに気づいた。これより、他の様々な辺についても延長を取ってみると、平行の関係にあるものが多く存在し、これに沿って図形を移動させていくと、全てのピースをはめることができた。このことから、このパズルは平行移動という規則をもとに作られていると考えられた。



(図2)

(図3)

また、「二つの長方形から一つの正方形を作る」という点から(図4)のような動的な要素をこのパズルの中に取り入れてみることに検討した。

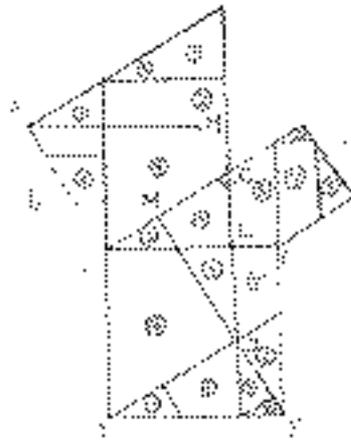


(図4)

これはユークリッドの証明法の動的な翻案と呼ばれるものであり、最近ではパソコンを用い、実際にその動く過程を見ることのできるものがある。ここでの子どもの活動は「見る」ことであり、この「見る」ことにより子ども自身が図を動かす主体となり、証明の全体構造を理解していく。「図が動く」ということは子ども自身によるところではない物的運動であるが、「見る」ことを通じて子ども自身の心

的運動に転化させることにより、子どもの主体的活動になり「理解」に有効に働くと考えられる。このことより、この動的な翻案を用いることでピタゴラスの定理についての関係的理解がなされうるといえるのではないだろうか。

次に、実際にこの案をパズルにおいて取り入れることについて考える。パズルにおいて動的な展開をすることはできないので図形の合同と量の保存を使った証明を用いることにした。



(図5)

まず、各点を A, M と置き、それぞれの図形についてみていく(図5)。一辺 b の正方形 $ABCD$ における三角形 ABE を平行移動させ、平行四辺形 $EBCF$ を作る。また同様に正方形 $ABCD$ における三角形 DAH を平行移動させ、平行四辺形 $ABGH$ を作る。この2つの平行四辺形についてみると $DC = CB$ 、 $BC = AB$ 、 $FEB = ABG$ より両者ともに底辺 b 、高さ b の合同な平行四辺形となる(図4, ~)。次に、平行四辺形 $EBCF$ と平行四辺形 $BIJC$ についてみていく。この2つの平行四辺形は $EI // FJ$ より $EFH = BCJ$ 、 $EF = BC$ 、 $DC = MJ$ より底辺 b 、高さ b の合同な平行四辺形となっている。したがって、平行四辺形 $ABGH$ 平行四辺形 $BIJC$ となる(図4, ~)。また、この平行四辺形 $BIJC$ においての三角形 CBL の辺 BL を辺 IK に合わせるように平行移動させると長方形 $BIKL$ となる(図4, ~)。よって正方形 $ABCD$ 、長方形 $BIKL$ は同面積であることが分かる。(もう一方の正方形についても同様の操作が行える)この一連の証明は図1の動的翻案に沿ったものであることからみて、ピタゴラスの定理についての関係的理解についても成しえるものと言うことができるのではないだろ

うか。また、既存の知識である図形の合同の証明を取り入れることのできる側面をもつので単に動的なものよりも更に深い理解が期待できるのではないだろうか。

- 2 . ピタゴラスのパズルの教材化

前述したが、この「ピタゴラスのパズル」はアニメーションといった動的翻案とは異なり、証明を用いながら、一つ一つの過程を見ていけるということに価値があると私は考える。全てを一連の流れとして子どもに見せることも、確かに全体把握としてとても有用と考えられるが、そこから一步踏み込んで、「どうして、そういえるのか」というところを考えるのが「関係的理解」であり、算数・数学教育の目指すべき「理解」の姿ではないだろうか。課題についての疑問を子供から引き出すには過程の一つずつに立ち止まってやり、「本当に、これでいいのか」「別のことは考えられないか」と問い掛けていくことが必要である。

この指導にあたり注意しなければならない点は、最終的な八つのピースに切り分けられたパズルの取り扱いである。教師が単に提示し、ピースの移動を見せるだけでは、動的翻案の場合とそんなに差がなくなり、子どもは疑問を抱く必要がなくなってしまう。まずは、子どもにパズルを委ね、「正方形を作る」という方向付けにとどめる。子どもは試行錯誤しながら、様々な図形を作り出すだろう。ここで、(図4)のような動的翻案を提示し、「等積変形」

というキーを子どもに与える。これにより、今までは見えてこなかった図形分割の解決の糸口が見つかり、正方形を構成していくことができるようになり「八ピースの必要性」を知ることができる。これは言い換えれば、「等積変形」を出発点としながら、最終的にはパズルの移動により、「等積変形なし」つまり、一辺 b の正方形と一辺 c の正方形により、一辺 a の

正方形を覆うということに到達することが期待できる。これは「ピタゴラスの定理」についての関係的理解ということができるのではないだろうか。

また、これを基に、他にどのようなパズルが考えられるかについて実際に子ども自身に製作させるという拡張についても考えることができる。これより、子どもの「図形」に対する見方、考え方についても「教具を作る」事を通じて育てることができないのではないだろうか。これより、このパズルは、ピタゴラスの定理についての教具でありながら、単一の知識獲得という短期的な「理解」の展望にたった教具ではなく、「数学的な見方、考え方」を伸ばすような長期的に「理解する」態度を育てていく「数学的教具」という側面も持つと考えられる。

. 今後の課題

実際に子どもの「理解」に焦点をあてた教具の開発をおこなっていったが、試行的開発であり、実践にまでいたることができなかつたため、「教具」のもつ可能性の示唆にとどまってしまった。教具はそれを使用する子どもによって、内面での「思考」が大きく変わることが考えられるため、可能性についてもごく一部についてしか考察できていないように思われる。また、子供の理解は次第に内面化していくものであり、非常に多様なものであるため、「評価」についての課題も残る。

参考文献

- ・「数学教育の活動主義的展開」平林一榮著 東洋館出版社 1987 . 10 . 28
- ・「小学校学習指導要領（算数編）」文部省 東洋館出版社 平成 11 年 5 月 31 日