修士論文要約【鳥取大学数学教育研究，第3号】

高校数学における教材開発とその展開に関する研究

－新しい視点に立った「三角関数」教材に焦点を当てて－

津田　華奈子

指導教官：矢部敏昭

Ⅰ．研究の目的と方法

本論文は高校数学、その中でも三角関数の領域での教材開発とその展開について考究したものである。教材といえば教科書がもっとも一般的である。そして、その内容はその教科書に沿って指導されることが多い。ここでは、教材を広義にとらえるとともに日常の事象と積極的に関連を図り、教科書教材とは違った、新しい視点に立った教材の開発について考察を行ったものである。

まず初めに、教材開発を行うのであるから、主となる教材について「教材とは何か」を考える必要がある。そこで教材論と教具論を通して、教材とはいかなるものであるのかの考察を行った。

次に、本研究は高校数学における教材開発であることから、高校数学の在り方について目標と内容のふたつの面から考察を行った。高校数学には学科の違いにより数学科と理数科に区別されている。これらふたつに関しても内容を対比させ、その関係について考察を行った。

そしてこれらのことを念頭に置き、「相貫体」を素材としてその展開図を求める教材を作成していったものである。同じ円柱同士を突きさした相貫体を基本とし、突きさす円柱の大きさを変える、突きさす円柱の角度を変えるというように教材開発の過程を徐々に一般化の方向へ展開していった。そして、さらに突きさす立体を円柱から円錐へ、円錐から球へと、円柱以外の立体にまで拡張していったものである。このようにひとつの教材から、一般化や拡張などの方法によって教材を発展させ、展開していったものである。

最後に、この作成した教材に関してその活用場面、問題を作成していくうえでの注意点等について考察を加え、新しい視点に立った三角関数の教材を提案をしたものである。

Ⅱ．本論文の構成

(1ページ40×40，54ページ)

Ⅲ．研究の概要

1.教材論

教材開発を行うのであるから、「教材とは何か」について考える必要があると考えた。そこで教材論と教具論を通して、教材とはいかなるものであるのかの考察を行った。これより、私は教材を次のようなものと考えた。

教材は学校教育で用いられる教科書のようなもののみを指すのではなく、子どもが世界を認識する際の媒介物すべてを指すと言っても過言ではない。また、特別なものではなく話し言葉の世界を素材にして日常的に絶えず作り出されている日常世界そのものであるとも言える。と考えると、教材は教師や子どもにとってはもっとも具体的で、身近な、しかも文化的バラエティに富む世界だと言える。身近であるゆえ、その正体をはっきりさせることは困難である。そこで、教材を

『大人と子ども、あるいは子どもと子どもがつくりだしている教育関係の中に登場し、教育の媒介となるすべての文化財。』

と一定の定義をした上でどういうものなのか考えていく。教材というものがはっきりしなくなっている理由に教育目標との混同、指導過程、学習形態論との混同という2つが考えられる。

これらと混同しないためには、目標の場合であれば、目標は分かち伝えることのできる文化、教材は目標と子どもをつなぐ媒体とし、目標が子どもの日常生活の経験的事象であるとする立場をとらないことである。また、指導過程、学習形態論の場合では、教材は、指導過程として解きほぐされ、学習形態として子供の学習活動を組織する段階に入って初めて、媒介者としてのその本来の働きを実際に発揮し、また、教師の教材解釈を通過することによって初めて生きて働き始める。個々の解釈を規定しているものは解釈者たる教師の主観的な意図や願望ではなく、教材の客観的な構造の方であり、その教材がどうつくられうる性格のものであるかの方なのであるということを認識しておく必要がある。

2.高等学校における数学のあり方についての考察

次に、本研究は高校数学における教材開発であることから、高校数学の在り方について目標と内容のふたつの面から考察を行った。高校数学は学科の違いにより数学科と理数科に区別されている。これらふたつについて目標を対比させ、その関係について考察を行った。そして、目標に関して次の3 点が挙げられるのではないかと考えた。

①理数科は、数学科よりも専門的であることからより深い知識が必要となるので、数学科よりも知的な面が重視されると考えられる。

②数学科の目標には「事象を数学的に考察し処

理する」とあり、理数科の目標には「事象を探究する」とあることより、理数科の方がより広い視野で物事を処理する目が養われると考えられる。

③理数科は専門的であるので、一見数学科とはかけ離れているように思えるが、目標は根本は同じであると考えられる。

次に以上3点についての根拠を述べる。

①については、理数科の目標表現において「事象を探究する過程を通して」という部分が加わることにより、より深く問題に対して取り組むという姿勢が感じられる。この部分が付け加わることにより数学科よりも理数科の方がより専門的すなわち、一つのことに専ら従事するということにより近くなるのではないかと思われる。また、数学科と理数科の目標表現を比較した場合、知的な面に関する表現は同等に見受けられるが、情意的な面に関する表現は数学科では「数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる。」とあるのに対し、理数科では「（事象を探究する過程を通して）数学的に考察し、処理する態度を育てる。」とされており、記述されている量から見ても理数科では知的な面の方が重視されていると言うことができると考える。

②については、「事象を探究する」とは、ここでは問題を発見してその解決を図り、結論を得ることであるとされている。　探究とは、一般には「たずねきわめること」また、教育学的には「生徒が自発的に、自分の問題に立ち向かい、持続的に解決していこうとする態度」といった意味がある。よって、先のように言うことができると考える。

③については、数学科と理数科の目標表現を比較した場合、理数科は数学のみではなく自然科学も含まれるので、それに関する記述をのぞいた表現は数学科の前半部分、知的な面に関する表現と似通っている。具体的には、

数学科でいう「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高める。」

理数科でいう「数学における基本的な概念、原理・法則などについての系統的な理解を深め、数学的に考察し処理する能力と態度を育てる。」の部分である。

以上のことより、目標は根本的には同じであると考える。

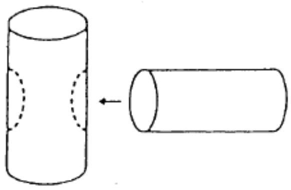
3.教材開発－相貫体を作る－

以上のことをふまえて、「相貫体」を素材としてその展開図を求める教材を作成していった。ここでは基本となる同じ大きさの円柱を突きさす相貫体の展開図を求める過程を示し、そこからどのように応用・発展させていったのかを示す。

3-1.課題の誕生

初めに、このような「相貫体」という立体が示されたとする。この立体を長方形の画用紙を丸めて2本の円柱を作り、一方の円柱に他方の円柱を突きさして作ろうとした。そのためには、一方にあらかじめもう一方の円柱が隙間無くぴったりと突きささるような穴をあけておく必要がある。円柱の側面はカーブしているので、ただ突きさす円柱の底面と同じ円の穴をあけたところでその円柱をぴったりと隙間なく突きさすことはできない。そこで、円柱の側面のカーブも考慮すると、どのような穴をあけておく必要があるのだろうか。このような背景のもと、次の課題が誕生した。

円柱に穴をあけて，別の円柱を突きさす。もとの円柱には、どのような穴をあければよいか。

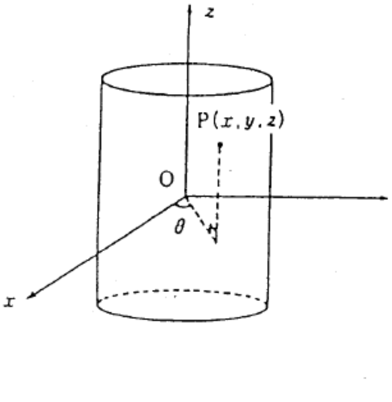


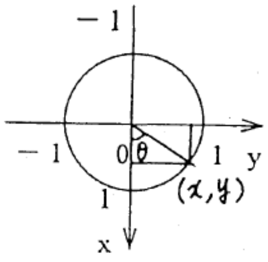
3-2.空間座標への適用

この課題について、空間座標を用いて解くことを考える。xyz空間において、穴のあいた円柱Aを

$A : x^2+y^2=1$

とし、円柱A の側面上の点をP(x,y,z)とし、xy平面において O'(0,0,z) と P を結ぶ線分 O'P が x=1を始点としてつくる角をθとすると、





（真上より）

【xyz座標上の点P(x,y,z)】

xyz座標上の点P(x,y,z)は、

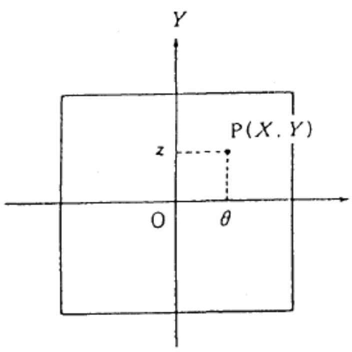
$x=\cos\theta$

$y=\sin\theta\ (-\pi\leqq\theta\leqq\pi)$ −①

$z=z$

というように表される。

求めたいのは円柱の展開図においてあける穴がどのように表されるかであるから、円柱の側面を展開した平面における点Pの位置について考えていく。円柱Aを側面上の直線 x=1が中心になるように展開して、座標軸をy=0 をX軸、x=1をY軸と設定したとき、Pの座標を(X,Y) とすると



【XY座標上の点P(X,Y)】

$X=\theta$

$Y=z$ −②

というように表される。

①②より θ を消去すると、

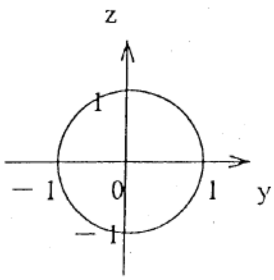
$x=\cos X$

$y=\sin X\ (-\pi\leqq X\leqq\pi)$ −③

$z=Y$

という xyz空間におけるP の座標(x,y,z) とXY平面における Pの座標 (X,Y)の関係が求まる。これらの関係式を③とする。

次にこれに突きさす円柱をBとすると、



【底面から見た円柱B】

B : y2+z2=1

と表せる。

求める穴は円柱Aと円柱B の境界の点の集合なので、ここに③の関係式を代入して、

$Y=\pm\cos X\ (-\pi\leqq X\leqq\pi)$

という穴の方程式が求まる。

これをグラフに表すとコサインカーブがかける。このうち$-\pi$からπの範囲を切り取ったものが円柱Aの展開図となる。こうして相貫体の展開図が得られるのである。

3-3.開発教材の応用・発展

この同じ円柱同士を突きさした相貫体の教材を基本とし、『突きさす円柱の大きさを変える』では『同じ大きさの円柱を突きさす』をもとにして大きさに関する条件を解除している。突きさす円柱の半径をrとし、どんな値でも対応できるようにしている。『円柱を斜めに突きさす』では、『突きさす円柱の大きさを変える』に加えて角度に関する条件も解除している。大きさの場合と同様に、突きさす円柱の角度をαとし、どんな角度でも対応できるようにしている。

そして、さらに突きさす立体を円柱から円錐へ、円錐から球へと、円柱以外の立体にまで拡張していった。このようにひとつの教材から、一般化や拡張などの方法によって教材を発展させ、展開していったものである。

4.開発した教材に対する考察

この作成した教材に関してその活用場面を探るため、相貫体の展開図は三角関数のグラフを用いて表されていること、展開図をコンピュータを用いて描いたことより、関連があると思われる「数学Ⅱ『三角関数』」、「数学C『コンピュータによる曲線の表示』」の内容の考察を行った。

その上で、この教材の高校数学の学習内容での位置づけについて考えた。

また、問題を作成していくうえでの注意点等についても考察を加え、新しい視点に立った三角関数の教材を提案をしたものである。

Ⅳ．研究の結果

新しい視点に立った教材の開発について考えてきた。結果、相貫体を素材とした高校数学の三角関数での活用が考え得る教材を作成した。また、その教材について数学Ⅱと数学C における活用場面、問題を作成していくうえでの注意点等についても考察を加え、提案したものである。

今回は相貫体を素材とした教材の開発、その活用場面について考察を行ってきたものであるが、問題を作っていくうえで「相貫体」に限らず、広い視野を持って見れば、新しい視点に立った教材の開発の素材となるものはたくさんあるはずである。それをいかに見極め、活かしていくかが今後の課題であると考える。

主要引用・参考文献

中内敏夫 (1990)「新版　教材と教具の理論　教育原論Ⅱ」,あゆみ出版

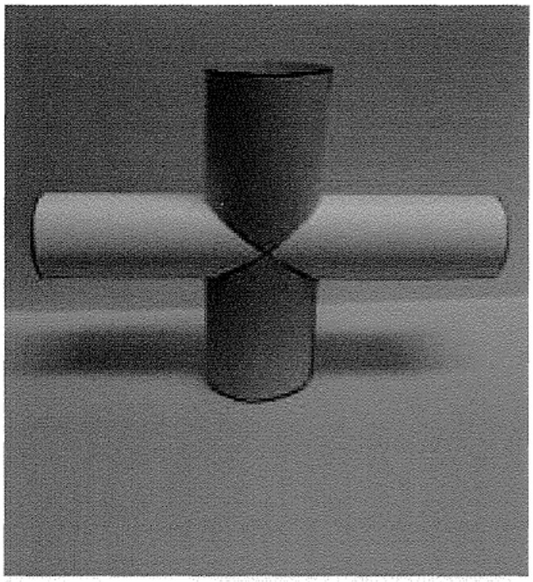
文部省(1996)「高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編」,ぎょうせい

寺田文行監修/教材探検の会編 (1997)「数学ランド・おもしろ探検」,森北出版

資　料：開発教材「相 貫 体 」

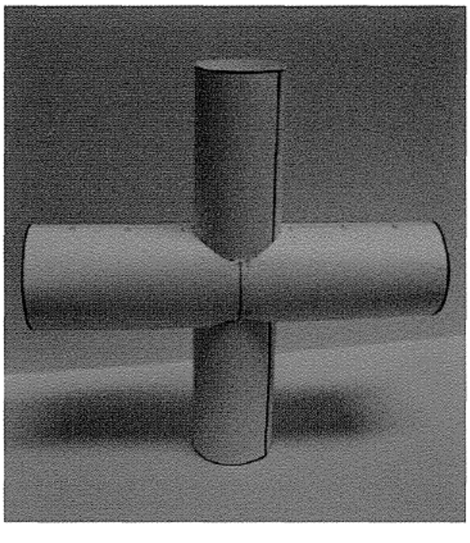
1）同じ大きさの円柱を突きさす

$y = \pm\cos x$



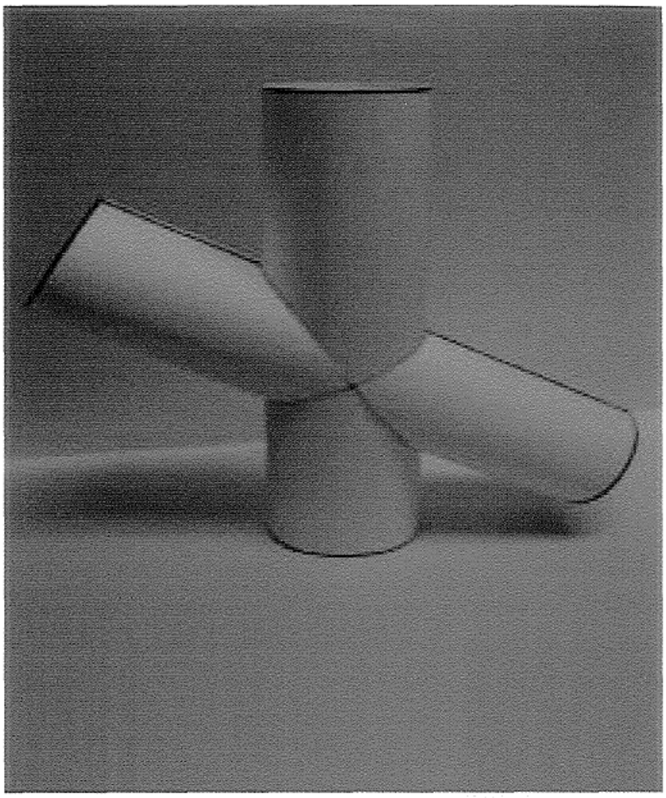
2）円柱の大きさを変える

$y = \pm\sqrt{2/3(-\sin 2x)}$



3) 円柱を斜めに突きさす

y = √3cosx　-√1/3cosx



4) 円柱に円錐を突きさす

y = ±1/2√6(5cosx+1)