

# 数学教育における実験の導入に関する研究

石原 大樹

指導教官：溝口達也

## ．研究の目的と方法

数学は、現在中学生の間で、もっとも嫌われている教科と言っても過言ではない。嫌いな教科の代名詞のようにも聞こえる。その理由として真っ先に挙げられるのが「面白くない」や「難しい」という理由である。世界的に見て日本は、数学の苦手な国ではない。むしろ成績はトップクラスである。成績が良いにもかかわらず、嫌われているのである。これは危機的な状況である。

では、子どもたちが数学を好んで学習するようになるにはどうすればよいだろうか。かつて、産業革命がおこったばかりのヨーロッパで、盛んに数学教育を変えようとする動きが見られた。イギリスのジョン・ペリーやドイツのフェリックス・クラインらによる数学教育改良運動である。ペリーはその運動を通して、それまでの純粋数学では、生徒たちは理解するのは難しいとし、日常的な生活に多く使われる実用数学を打ち出した。実用数学は、瞬く間に成果をあげていった。日本でも、ペリーやクラインに影響を受けた小倉金之助が実用数学の重要性を説いた。このような歴史的な背景があるのだが、現在の数学教育と比べて、その状況は残念ながらあまり変わっていないように思われる。もう一度、実用数学の必要性を述べていく必要があるのではないだろうか。ペリーは、遊びの中でおこなわれる実験にこそ数学の楽しさがあると述べている。ペリーの時代に成果を挙げた実用数学のもっとも根本的な活動である実験に着目し、実験を推進していくことにする。以下に研究課題を述べる。

- ・ 数学教育における実験とはなにか。
- ・ なぜ実験が必要なのか。
- ・ どのような歴史的背景から、実験は必要とされるのか。
  - ・ 直観とはなにか。
  - ・ 実験はどこに位置付けられるのか。

- ・ 実験にはどのような種類があるか。
- ・ 現物実験とはなにか。
- ・ 思考実験とはなにか。
- ・ 実験をどのように取り入れていくのか。

## ．本論文の構成

- 第1章 研究の動機・目的・方法
  - 1 - 1 研究の動機
  - 1 - 2 研究の目的・方法
- 第2章 数学教育における実験とは
  - 2 - 1 実験の条件
  - 2 - 2 観察としての実験
- 第3章 実験の必要性
  - 3 - 1 実験の必要性の歴史的考察
    - 3 - 1 - 1 数学教育改良運動
    - 3 - 1 - 2 ペリーの実験観
    - 3 - 1 - 3 小倉金之助氏の実験観
  - 3 - 2 直観を養うための実験
    - 3 - 2 - 1 生徒の数学的行動
    - 3 - 2 - 2 実験と直観の関係
  - 3 - 3 実験の位置付け
- 第4章 現物実験と思考実験
  - 4 - 1 現物実験
  - 4 - 2 思考実験
    - 4 - 2 - 1 数学以外での思考実験
    - 4 - 2 - 2 数学での思考実験
- 第5章 具体的な提案
  - 5 - 1 現行の数学教育における実験
  - 5 - 2 具体例
    - 5 - 2 - 1 重心
    - 5 - 2 - 2 一次関数
- 第6章 本研究の結論と今後の課題
  - 6 - 1 本研究から得られた結論
  - 6 - 2 今後に残された課題

引用・参考文献

( 1 ページ 40 字 × 36 行 , 34 ページ )

## ．研究の概要

## 1. 数学教育における実験とは

数学教育における実験とは、物理や化学でいう実験と概念としては同じであるが、その方法については少々異なる。実際に計算を行ったり、思考を組み立てていくことでデータがとれ、そこから何らかの仮説を立てる。得られた仮説を既知の事実から検証して、仮説の真偽を確かめる。仮説は必ずしも真になるわけではなく、偽にもなりうる。

人間は自然界に存在するものを、何らかの観察過程を通して間接的にのみ知ることができる。観察をするとき、対象及び対象から観察者への物理過程のどこかに何らかの操作を加えなければならない。まず操作があり、それに基づいた観察がおこなわれる。実験は物体に直接手を加える過程のことをいう。そして、その物体を観

察するのである。すなわち、実験とは観察過程の一部であるといえる。

観察は一連の科学的行動には欠かせない行動であり、実験の場面でも無意識のうちに観察をおこなっている。実験において仮説作りという重要な過程があるが、その場面こそ観察が重要視される場面であると考ええる。

## 2. 実験の必要性

18世紀後半に、ヨーロッパで数学教育改良運動がおこった。イギリスでこの運動をおこなったのがペリーである。純粋数学がペリーの時代の主流だったが、理解しづらいうえに抽象的で実用にはむかなかった。ペリーの打ち出した実用数学は、常識を働かせて問題を解く方法を示し、それを証明する実験的方法であったり、日常の仕事をしたりするのに使われている論理的方法であったりする。

ペリーはこのような状況に対して何かの学科を教える正しい方法は、ある種の実験作業を行うことであると考えた。子どもが学習の題材に興味を持ち、楽しく学ぶものでなければ、知的訓練をすることは難しい。したがって学校は、子どもが生まれたときから慣れ親しんでいる科学的観察や実験の学習を活用し、さらにそれを引き続き教育の中に取り入れていくべきである。まずは具体的な事実を学ばなければ、抽象的な事実は理解することができない。

小倉金之助は、人間が、人間自身の価値を見ようとするところに真の教育の意味があるとしている。数学教育について研究する場合でも、人間の生活を真によく発展させ、創造させるための問題としてこれを考える。「人」として生

きるための数学を学ぶのである。

数学教育の意義は、科学的精神の開発にある

科学的精神を学ぶには、直接に大自然から学ぶべきである。真に直観を養うことができる。直観は自然科学においても、数学においても重要になる。観察や実測を用い、自然科学に結びつけた活動、さらに生徒にとって最もよく分かりやすい活動が実験である。

小倉は、数学教育内容の核心となるべきも

のは、関数の観念であるとしている。数学上、関数の観念こそ最もよく科学的因果関係を語るものであり、最も広くかつ最も深く人間生活と交渉を有するからである。関数の観念こそ数学教育の核心である。関数の観念を徹底してこそ、数学教育は初めて有意義になる。

小倉は直観が数学教育にとって必要であるとしている。この直観を養うために、実験が最適の方法であるとする。従来の数学教育においては、あまりに論理のみが尊重されていた。自ら発見する力をつけるためには、直観の力が必要である。

直観は個人の経験に強く影響を受ける。直観と経験とはまったく異なるものであるが、直観を養成するためにもっとも有効な方法が経験にあることは疑うことができない。日常の経験から直観の力を養う。実験は直観を養う意味でも必要なのである。

数学教育において、実験は証明と係わり合いが深い。証明が演繹的に事実を展開して結論を導くのに対して、実験は帰納的に仮説を推測する。これはあくまで推測の範囲であり「仮説は真理であるらしい」としか言及することができない。しかし、実験では「真理である」と断言する必要はない。実験は証明へのステップとなる生成的な例としての役割も果たしているからである。

従来、数学教育では仮説の検証法は、数学的証明に求められている。それに対し、データに合うから正しいとするのが実験である。それは数学というよりむしろ物理や化学に近いとすることができる。それは直観的にも受け入れやすく、生徒の心理的発展に順応している。実験を導入する価値がここにある。実験は証明とはまったく正反対の働きをしながら、その根底の部分で通じ合っているのである。数学教育にとって証明は大切である。その証明につながるところに実験は位置している。

## 3. 現物実験と思考実験

現物実験とは、一般的に化学や物理で呼ばれるような、実在する物になんらかの操作を加えて、その反応からデータを得る実験のことである。数学ではなんらかの器具を用いるだけでなく、紙と鉛筆を用いて実際に計算や試行をおこなったりする。その過程から様々なデータが出てきて、そこから仮説を立てるのである。すなわち、現物実験とは、ある種の理論・法則に基づいて、現物に時間としての初期条件と、場所としての境界条件を与え、それを変化させて結果を見ることをいう。

思考実験は、現物実験に比べてあまりなじみがないため受け入れにくいところがある。思考実験とは、実験という言葉が示すように、単にあれこれと思いをめぐらすことだけではなく、思いにいろいろと条件付けて反応を見ることである。それは、自分の意思の働きかけによって想像上の状況を左右することを意味する。ある種の理論・法則に基づいて、思考に、時間としての初期条件と、場所としての境界条件をオペラントとして与え、それを変化させてその結果を見ることをいう。

思考実験と現物実験の決定的な違いは、初期条件をオペラントとして与えるさいの自由さにある。思考実験では思考の上での操作だからコスト的、時空的な制約から免れることができるのである。

思考実験とは、日常の空間ではその真偽が確かめられない科学的な事実を発見するために、考え出された実験である。なかには、宇宙空間での実験のように、思考実験でおこなわれていたことが、現物実験で見られるようになった例もある。科学技術の発達によって、このような思考実験の現物実験化は物理学ではよく見られるようになった。

また、思考実験には守らなくてはならないルールがある。実験において都合のいい状況を作り出せる一方で、ルールからはみ出したらまったく論理がかみ合わなくなってしまう。その1つ目は、ある一つの矛盾を避けるために無意味な仮説を導入することは許されないということである。2つ目は、一つの問題の新しい側面を引き立たせるために本質的でない状況を変えても差し支えないが、宇宙全体に影響を及ぼす仮説でなければならないということである。多くの場合、観察や実験はそれらが明白にした事実を突きつけて、その重みにものをいわせて理論を補強し、説得するのに使われる。ただし、事

実は無条件に事実でなく、データによって理解できる限りの事実なのである。これが通常、科学における日常的な営みである。

思考実験は、論理的な理論言語空間を作ると同時に、日常言語空間と重なっていて、両空間を強力な説得力という磁場で貫いている。単に事実を述べたり、証明することをねらいとするのではなく、競合する論敵の立論への挑戦、すなわち議論しあっている相手の中に理論を形成させようとする事なのである。

思考実験の本質は、現物実験の予備であつたり、批判的用法や発見的用法にのみあるのではない。また、単なる概念の分析的道具でもない。それ自体として自立した、論者と論敵の間の記号操作に基づいて創案される、パラドキシカルな意味空間、としての広がりこそ注目すべきである。

しばしば、ただ頭の中で考えた簡単な推測が思考実験と呼ばれることがある。それは推論には含まれるが、思考実験と呼ぶには首をかしげざるをえない。簡単な推論だけでは、思考実験と呼ぶには不十分である。ここで問題とされるのが思考実験と推論をどこで区別するかである。推論の中に思考実験が含まれていることは事実

である。思考実験とは簡単に推測できるような推論であってはいけない。あくまでも、思考による試行錯誤によって論理を組み立てながら、帰納的に事実を求めていかなければならないのである。

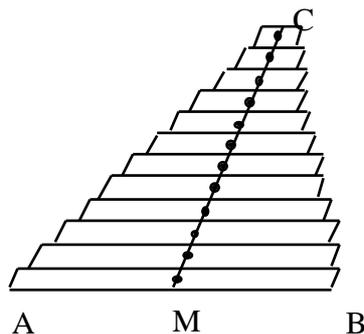
## ・研究の結果

### 1. 実験の具体例

実験を用いた具体例として重心を使う。

〔3角形の重心〕

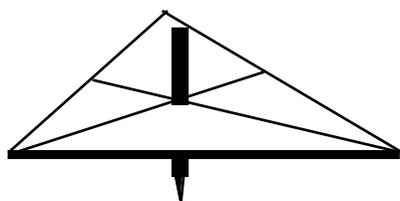
ある3角形が下図のように平行四辺形の帯でできていると考える。各帯の重心は明らかにその中点である。その中点をつなぐと頂点Cと辺ABの中点を結ぶ一直線上に並んでいること、つまり中線であることが分かる。



同様の作業を頂点Aから辺BCにむけて行っても中線がひける。中線は、各平行四辺形の重心の集まりであることより、中線の交点がこの3角形の重心であると言えそうである。(G, Polya, 1954)

確かめとして、頂点Bから辺CAにむけて中線をひいてみる。すると上で求めた重心の上を通る直線がひけるはずである。

そもそも重心とは何であるかを考えてみる。まっすぐな棒の重心と言った場合、ちょうど1点で棒がつりあう点、これが重心である。すなわち、重心とは重さがつりあう点なのである。1点でつりあうものを考えたとき、コマが思い出される。先ほど、思考実験で求めた3角形の重心の求め方で、ある厚紙から3角形を切り取り、その重心を求める。そこに支点を差し込み簡単なコマを作る。回してみると、うまく回りつづけることが予想される。

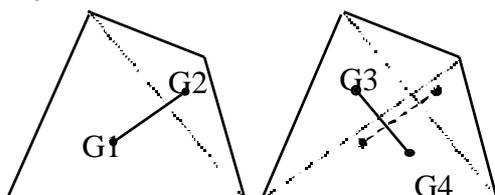


これにより重心が重さのつりあう点であることが確認されたことになる。

では、4角形でコマを作る場合、どうなるだろうか。また、5角形で作った場合はどうなるか。

#### 〔4角形の重心〕

4角形を対角線で2つの3角形に分割し、それぞれの重心を求めて、それを紐で結ぶ。紐を持ったとき、バランスよくつりあう。このことから、この重心どうしを結んだ線分上に、4角形の重心が存在すると言えそうである。次に、別の対角線で2つの3角形に分け、同様の作業を繰り返すとバランスよくつりあう線分が得られる。



2つの線分が共に重心を含むであろうことから、重心は2つの線分の交点であるという仮説が立つ。

実際に、線分の交点を支点にしたコマを作り回してみると、うまく回るはずである。以上より、線分の交点が重心であることが言えそうである。

#### 〔5角形の重心〕

5角形の重心はどう求められるだろうか。4角形の重心の求め方を参考にすると、対角線で5角形を2つの図形、すなわち3角形と4角形に分け、それぞれの重心を求めるという方法が出てきそうである。4角形のとくと同様に、重心どうしを紐で結ぶと、紐上の点でつりあうことが分かる。別の対角線でも同じように重心を結ぶ線分が得られ、線分どうしの交点が5角形の重心であるという仮説が立つ。あとはコマを作って確かめてみると重心であることが言えそうである。

この具体例では、思考実験と現物実験を組み合わせさせて実験をおこなっている。データの部分では理論を組み立てていく思考実験が使われ、既知の事実としてコマが用いられている場面は現物実験が使用されている。生徒達はこの実験を用いた授業で、直観的に重心を理解することができると考える。またそれと同時に直観は確実に養われていく。

#### 2. 今後に残された課題

本研究では、実験の具体例をいくつか取り上げているが、この他にもたくさんの例ができるはずである。どのカリキュラムが実験を活用しやすいかなど、まだまだ考える余地はあると思われる。また、現物実験、思考実験以外にも、有用な実験の種類が存在するかもしれない。

実験において、もっとも大切な部分は仮説である。自ら定理を考え出すために、仮説の作り方は、極めて重要である。しかし、今回は、仮説の作り方という点までは時間的な制約により研究することができなかった。

また、思考実験と推論の違いをなんらかの形で、線をひくことが目標としてあったが、明確に分類することができなかったことも、今後、課題として残される。

#### 主要引用・参考文献

- ・金子務.(1986). 思考実験とはなにか. 講談社.
- ・小倉金之助.(1973). 小倉金之助著作集4 数学教育の根本問題. 勁草書房.
- ・ペリーノ/クライン (1972). 世界教育学選集 数学教育改革論. 丸山哲郎 訳. 明治図書.