

# 算数教育における 理解とその指導についての一考察

加賀田 雅也

指導教官：矢部敏昭

## ・研究の目的と方法

わが国の学習指導要領には、「理解」・「技能」という言葉が多く登場する。ここで示される「理解」・「技能」とは何を差しているのだろうか。また、この要領においては、学習範囲・内容は、おおまかに規定してあるものの、そこにおける学習活動、つまり授業の方向性・内容の指導については、多くふれられていない。つまり、授業における学習活動という点については、ほとんど全面的に教師の自主性と教授技量にまかされているといえるのではなかろうか。

また、算数・数学科の授業・授業観察を通じ、いつも私が疑問におもうのは「わかったのか」という点だ。例えば三角形の面積を求める問題があり、学習者は「縦×横」の公式を用いて正解を得るとしよう、しかし、彼はなぜ「縦×横」をするのかわからない。にもかかわらず、彼は「三角形の面積の求め方はわかった」と感じるだろう。なぜなら、「正解」を得ているからだ。このように、通常、学習者は「できる」ことで「わかった」と判断しがちだろう。しかし、この「正解」は、「完全な正解」なのだろうか。「完全な正解」とは、「わかる」ことで、はじめて得られるものではないのだろうか。指導者はこの点をどのようにとらえ、学習者に何を求めていくべきなのか。

現在、算数・数学科の指導案は、しばしば画一的に書かれている。なぜなら、画一的である方が、単元と単元を結び付けた指導が行いやすく、また、児童にとっても授業の形態が受け止めやすいからであろうと考える。「算数・数学科では、どんな授業でも同じ形式の指導案によって計画できるのか」「授業の内容によって指導案の形式も変わっていくものではないのか」というのは誰もがもつ疑問点であろう。ではどのような指導案が好ましいのか、指導案とはどうあるべきなのか。このことを考えるうえで、最も重要となる授業について考えてみたい。

## ・本論文の構成

第 章 問題の所在～研究の動機～

第 章 理解についての諸側面

- 1 関係的理解と道具的理解
  - 1 - 道具的理解の特性
  - 1 - 関係的理解の特性
- 2 内的理解と外的理解

第 章 先行事例にみる「理解」の検討～学習者の反応にみられる「理解」の考察～

- 1 「比例・反比例」

《1》理解に焦点を当てた全体的な考察

《2》思考の過程と理解との関係に着目した分析・考察

- 2 「1000までのかず」

《1》理解に焦点を当てた全体的な考察

《2》思考の過程と理解との関係に着目した分析・考察

- 3 「わり算」

《1》理解に焦点を当てた全体的な考察

《2》思考の過程と理解との関係に着目した分析・考察

第 章 本研究のまとめと課題

- 1 本研究の結論
- 2 今後の課題

(1ページ40字×36行, 35ページ)

## ・研究の概要

- 1 理解についての諸側面

- 1.1 関係的理解と道具的理解

私は、今まで「理解」とは、やっていることはもちろん、その理由もどちらもわかっていて始めて成立するものであると思っていた。しかし、さまざまな授業観察・研究をするにつれ、やっていることはわかって、その理由がわからない。理由はわかるのだが、やっていることがわからないという現象の存在に気づいた。「わかる」という現象は、わかる／わからないと2分化ではすまされないものがある。

例えば、ある先生が授業で、「長方形の向かい合う辺の長さは等しいから、長方形の面積は、縦×横である。」と教えたでしょう。そして生徒に、次のような問題を出した。

(問題 1)

縦 20 cm, 横 30 cm の長方形の面積は、いくらになりますか。

(生徒の解答)

A 君  $20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$

B 君  $20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$

C 君  $20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$

(問題 2)

縦 20 cm, 横 100 mm の長方形の面積は、いくらになりますか。

(生徒の解答)

A 君  $20 \times 100 = 2000 \text{ mm}^2$

B 君  $20 \times 100 = 2000 \text{ cm}^2$

C 君  $20 \times 10 = 200 \text{ cm}^2$

2 問目で、A 君、B 君はともに不正解となる。線分の長さに対するアプローチが、なされていないのだ。しかし、2 人共「縦×横」という公式どおり、先生に言われたとおりに問題を解いた。だからこそ 1 問目は正解なのだ。つまり、彼らにおいてこの言葉の意味の範囲では、「理解」しているのである。A 君・B 君における「理解」は、「できる」が「わかっていない」理解といえようし、C 君においては、単にやり方を知っているから「できる」だけでなく、なぜその方法でよいのか「わかる」理解がなされているといえよう。イギリスのスケンプ (Skemp, R. R.) はこのような理解について、前者を「道具的理解 (instrumental understanding)」、後者を「関係的理解 (relational understanding)」と呼んで区別している。

教科書に目を向けて見ると、分数の除法についてなぜひっくり返して掛けるのかという理由についての説明は、1, 2 ページにとどまり、あとの大部分は、ひっくり返して掛けることの練習が繰り返されている。ひっくり返して掛ける理由の「理解」についてはテストすらなされない。他にも減法で「借りること」などこの手の例は多く挙げられる、すなわち教科書の大部分は「道具的数学」に捧げられ、「関係的数学」に属する部分は極めて乏しいことに気づく「わかる数学」はせいぜい「できる数学」の予備的段階とみなされ「わかればできる」と安易に受け取られがちなのである。

本来、上記に書いたような「計算技能」が学習されるためには、別に何らかの概念、性質、関係についての「理解」が必要であり、また、ある種の「技能」が習得されていなければそれらの「理解」も不可能である。

現代数学の問題点は、「技能」だけに専念することもさることながら「技能」と「理解」との関連を容易に捉えるところにあると私は考える。例えばひっくり返して掛けることの理由についての理解は教科書にみられる限りひっくり返して掛ける「技能」とはたいして関連がない。だからこそ 1, 2 ページで「理解」をかたづけても「技能」の練習によって、その単元は充分習得できる。ここでは、「理解」を丁寧にやれば「技能」がよりよく身につくといった「理解」が「技能」のための必須条件ととらえるのはむしろ不可解で、ここでの「技能」の習得は秩序あるドリルによるものであると割り切ったほうがむしろ正しいのであろう。しかしながら学習のある場面では、「技能」の習得よりも「理解」を深めることが重要な仕事となることがあり、しかも、「理解」の学習指導法は「技能」のそのように教授学的にはまだ十分に整備されていないためにしばしばおろそかにされている。

たしかに「技能」は数学教育の内容の重要な部分であり、しかも、そのできふできは簡単に評定できるので算数、数学教育では「技能訓練」にのみ多くの精力がそそがれがちである。一方「理解」は、単に「技能」のための手段としかみなされないこともしばしばある。

「技能」の習得は、決して算数、数学教育のすべてではない。数学的概念、関係の理解にも、技能の習得以上の重要な問題が託されている。たとえば、わが国で算数的見方、考え方の育成とよばれるものは、多分に「理解」に関する教育目標である。

「道具的理解」は、一般的な応用に関する少数の理論ではなく大量の規則を含み「関係的理解」と相対するものでもない。関係的理解のなかに道具的理解があるとわたしは位置づける。

つぎに、関係的理解、道具的理解それぞれの特性を考えてみたい。

#### - 1.1.1 道具的理解の特性

- ・その文脈自体においては、理解がし易い  
例えば、2 つの負の数のかけ算、分数の割り算など、関係的には理解しにくい内容のものも、「マイナスかけるマイナスはプラス」、

「分数で割るときには、ひっくり返してかける」などと、覚えやすい「規則」として理解でき、問題に対してたやすく、すばやく対応することが可能である。

- ・より速く、より信頼できる正解が得やすい  
関係的思考ほど多く知識を含んでいないだけに、正解を得やすい。生徒にとって、正解したという「結果」のもつ満足感は、学習において、大事にしていきたい。

#### - 1.1.2 関係的理解の特性

- ・新しい仕事をするのにより適している  
関係的思考では、どんな方法を使うかということだけでなく、なぜそうなるかも知ることによって、その方法を新しい問題に関係づけることが、可能になる。道具的数学では、どんな方法がどんな問題に適用できて、どんな問題には適用できないかということを経験する必要があり、新しい問題に対して、それぞれ別々な方法を学ばねばならない。
- ・記憶するのがたやすい  
内的な関連を結びつけて理解するため、一つの連結した部分として、記憶することができるし、またその方が記憶しやすい。個々の規則とともに、それらの関連をも学ぶのであるから、学ぶべきことは確かに多い。しかし、一度学んだなら、その結果はより長く継続する。
- ・関係的理解はそれ自体一つの目標となる  
賞罰の必要性は大きく減少し、とりあつかう素材に対する「動機づけ」が容易である。
- ・関係的シエマは、その質において、有機的である  
理解されたことは、生物の生長のようにひとりで発展していく。

スケンプの論文により、以上のことが、それぞれの利点として挙げられる。このなかで、道具的理解における、「その文脈において、理解しやすい」点と、関係的理解における、「新しい仕事をするのにより適している」点に注目して、私は、関係的理解は、数学技術の理解。関係的理解は、数学構造の理解と捉える。「関係的理解」は深く人間性に立脚しており、児童が将来、自己の新しい環境に適應していく際、もっとも頼みとする教育成果となりえる。したがって、算数・数学教育を単なる技術教育とせず、人間形成と捉えるならば、「関係的理解」を目指

した数学教育を行っていくのが望ましい。

#### - 2 内的理解と外的理解

日常「わかる」ということは、一つの「文脈」において「わかる」ことであると考えられる。この「文脈」という線型的な「概念」に代わり、より広範な空間的構成を意味する「構造」という「概念」におきかえて考えても、可能であろう。

「理解」を構造の理解であるとしたとき数学における「理解」とは、数学的構造の理解となりえる。構造には、極めて素朴なものからもっとも高度に洗練されたものへと、いくつかの段階が考えられ、しかもその各段階の構造がなんらかの必然的な関連をもっているものと考えられる。そして、数学の構造はもっとも洗練された形では極めて形式的なものであり、その洗練の過程を無視して、最終的な形で提示されても理解できるものではない。

我々は、外界が客観的にもつ（物理的、社会的などの）構造によって自らの精神の構造を培い、また、精神がすでにひとつの構造をもっているがゆえに、外界の事物・事象をある構造をもつものとして、とらえることができる。

そのように考えたとき構造は、純粋に客観的なものでも純粋に主観的なものでもない。主客の交互作用という形で展開される活動の形式であると解釈できる。この活動性はあるときは、心的構造として客観的理解に参画し、またあるときは、教材の客観的構造として主観的理解力の啓培に参画する。そしてこのような活動性を健全に円満に企画し実現させることが数学教育のめざすところと考えられる。

わが国では、学習指導要領に従い画一的な学習が展開されている。一定の枠を指定して行われる数学教育は、しばしばその枠内での詳細な理解だけに関心がむけられ、その枠をこえた外の世界には、ほとんど関心がもてないという特異な形態に陥ってしまう。とりわけ受験勉強とよばれる学習は、大抵こうした形態をとる。

生徒は、受験の対象となる範囲内だけの学習、とりわけ、技能の練習のみに着手する。つまり、実用的なことのみが目がいきやすいのである。

教える側においても実用のためには、一つの方式を固定してそれだけを訓練し、あまりいろいろな方法をやらせないほうが混乱がすくない。しかしながら、実用だけが数学教育の観点の全てではない。

アメリカのブラウン ( Brown, S. I. ) は、 $X$  を内的に理解するとは、 $X$  自身の内部における関連を知ることである。 $X$  を外的に理解するとは、 $X$  を一つの全体と考えて、それが他のものとどう関連しているかをみることである。 $>$  とし、このような教材の枠を決め、その内部だけで求められる理解を「内的理解」と呼び、枠外からの教材の理解を「外的理解」とよんでいる。

彼の言う、「内的理解」とは $X$ の内部構造の理解であり、「外的理解」とは $X$ の外的構造の理解である。真の認識にはこの両方の理解が必要であるのに、数学教育では、しばしば内的理解のみが重視されていると、同氏は述べている。

実際、今日のドリルを中心とした、算数・数学教育においては、間違えてもいいから、別のやり方を考えるという、視点及び観点の転換・多角的判断の促進が、ほとんどなされない。まるで、「単視点的」な人間をつくり出すことを目的とした学習がなされているようにも思える。教師は、たとえば「方程式」という名のもとに、一定の枠組みをつくり、そのなかに子どもを引き込んで、訓練させる。このことを教師は、教師の配慮と捉えているのかもしれないが、子どもを自分の枠内にとどまらせる限り、結果として子どもの論理性の発展に全く貢献していないこととなる。

理解作業は主客の相互作用としての活動性であるが、外的理解は主体の全人的な関係網を広くに利用する点で主観性が強く、内的理解は対象の内部構造に依存していた関係網に関与する点で客観性が強いといえよう。また、外的理解が既設の関係網への位置づけであるのに対して、内的理解はむしろ新しい関係網の構成であることも大きい差異であろう。さらにまた、前者は既知の関係網から出発している点で総合的と呼びうるならば、後者は未知の関係網を相手にしている点で分析とよぶことができるだろう。

したがって、ある問題が出されたとき、それが真正の問題であるならば、数多くの方向から

アプローチされることが、要求される。そのためには、問題の内部構造とともに、それまで学習した内容とどうかみあうか・自分の持っている手法との関わりはどのようなものかといった外的関連も吟味されねばならない。

子どもを単視点的な態度に陥らせないで、柔軟な視点変更を行いうるようになるためには、閉ざされた世界での問題解決を避け、外界との接点を持った学習、つまりは外的理解をもとめる学習に重点をおくことが必要である。

## ・研究の結果

教育は、学習を通じて子どもに、より多くのことを学んでほしいと願う、ここまでのことが解ればよいというものではない。道具的にしか理解していない子どもについては、何とかして関係的に理解させたいと思うことが教育活動であり、求める理解とは、外的理解でありたいというところで、私の理解の解釈は、一応落ち着いたように思う。

理解活動とは、客体としての教材を、主体として子どもが内に取り込む活動であり、教材の客観的構造と学習者の主観的構造の相互作用である。本研究では、主観的構造を取り上げ、問題解決活動から理解の状態を研究対象としてきたのだが、今後は、教材の客観的構造を研究の対象として、概念形成にかかわる理解について考えてみたい。

このことを考えるにあたりまず、なぜ今日の数学教育は道具的理解に当てられるのか、これについてもう一度、環境的要因に着目して考える必要があるだろう。

## 主要引用・参考文献

- ・ 第34回 鳥取県小学校教育研究会日野郡部会 研究大会
- ・ 平林 一榮 「数学教育の活動主義的展開」 (東洋館出版社 1987年)