# 数量関係における式化の過程に関する研究
## ―直観の機能と式化の活動―

上根　恵理子

指導教官：矢部敏昭

**Ⅰ．研究の目的と方法**

この研究の目的は，子どもたちが立式し問題解決をしていく場面で直観がどのような役割を果たしているのか，また子どもの中で式化に向けてどのような活動が行なわれているのか，または必要なのかということを定義付けしていくことである。

研究の方法としては，第Ⅱ章では，野村武衛先生の「数量に関する直観力と論理的な考え方」等の文献を基に，直観を論理と比較しながら検討していく。

第Ⅲ章では式表示の機能を川口廷先生の「算数現代化全書　(7)　式表示」等の文献を基に整理していく。

第Ⅳ章では教科書教材を基に式化の過程を分析し，式化に向けての必要であろうと思われる活動を定義する。

第Ⅴ章では，前章で定義した式化に向けての４つの活動をふまえ実際の場面では，どのように表や図などをみていけば立式することができるのかということを実践例を基に考察していった。

**Ⅱ．本論文の構成**

2　今後の課題
3　参考文献
（1ページ40字×40行，55ページ）

## Ⅲ．研究の概要

１．直観について

直観力と論理的思考力の関係について野村武衛先生は，次のように述べている。

目的をもたなければ問題にならない，その目的達成の困難が伴うと思考が行われる。目的達成のために，先へ先へと思考を進めていくのが直観（洞察）であり，正しいかどうかを確かめていくのが論理的思考である。したがって直観は**見通し的・構成的・生産的**であるが，論理的思考は，正確・明瞭をねらって行われ，**反省的であり，検討的・論証的**である。直観と論理的思考は交錯して出てきて，正しい思考は，この二つが助け合って進められる。直観のみで思考することは，勘でやることになり，論理にのみたよれば，考えは進まない。直観と論理的思考力を欠いては，正しい思考は行えない。（野村武衛「数量に関する直観力と論理的な考え方」・文部省『昭和３１年度　小学校教育指導者講座研究集録』）

また，直観の仕事を存在を認識することとする考えがある。つまり存在を認識するということは新しい情報を既知の知識との関連を見出して自分の中で整理し，分類していく作業の基礎になるものだと考えられる。つまりこのような構成的に考える基礎となる存在を認識するなどということが直観の仕事であり，そうしたことで蓄えられた知識が，また異なった問題場面に直面したとき，見通しを持って解決するための直観力となりえるのではないかと考える。

またそうして整理された知識の間をつなぐのが論理的思考であり，自分の見通しを確かにしていく活動も論理的思考である。つまり直観がなければ目的が定まらず，論理的思考は起こらないのではないかと考えられる。
つまり直観と論理のはたらきは，相反するものではなく，お互いに影響しあって，思考を深めていくものであると言える。

２．式化の過程における直観の役割

式化の過程における直観の役割をもとに式化に向けて必要な活動を見出した。

式化に向けた直観の役割りとして以下のようなことが挙げられる。

**問題場面にであったとき試行錯誤するうちに何とか関係をとらえようと予想をたてたり見当をつけたりして解決へ向けて思考を前へ前へと進めていくこと**

どのようなことかと言うと，例えば順列の問題場面で思い付くままに書き出す（試行錯誤）という段階から，表・図に表し，樹形図へと進んでいく，これは試行錯誤しそれを振り返っていくことで解決へと高まっていくと考えられる。ここから，式化に向けた活動として

①　**試行錯誤**
②　**試行錯誤の振り返り**

という２つの活動を見出した。

**問題の構造を見抜き本質に迫っていく思考**

例えば組み合わせと順列の比較をして，既習のものとの構造の違いに目を向け，対比・比較することによって問題の構造を見抜き本質に迫る思考を展開する。

またここから式化に向けた活動として

③　**対比**

という活動も見出せる。

**今までとどう違うのかまた同じなのか構成的に考える基礎になるもの**

例えば，小数の問題場面で整数の場合と対比し共通点・違いを洗い出すことで構成的に考える基礎になり，問題を捉えていくことができるのではないだろうか。

つまり具体的に言うと，リボンの１メートルあたりの値段を求める場合もし代金と長さという二数量が比例関係にある事が分かるならば，小数の除法になっても整数のときと関係が変わらないと仮定して立式することができるのではないか。

またここから式化に向けた活動として

④　**仮定と推測を構成しそれをもとに推論を展開する**

という活動も見出せる。

**・演算決定をする**

そしてこのような立式をする際には，用いられる演算を決定しなければならないそれも直観の役割であり以下のようなことである。

例えば，小数，分数の割り算の場面で，今まで整数の割り算の場面から用いてきた言葉の式

と比較しこの問題場面で除法を用いて解決するという，演算決定の過程においても直観の機能を指摘することができる。

つまりその問題場面で用いられる演算を上に出てきたような直観の役割に基づいて，構成的に考え決定することも直観の役割なのではないだろうか。

以上のことから，式化の過程における直観の役割を考え，その過程で必要な活動を見出すと，以下の通りである。

まず第一に，**①試行錯誤**である。

なぜなら私たちは，少しも試行錯誤せずに考えることなどできないからである。ある程度見通し持って考えてはいたがその見通し誤っていると分かったときに試行錯誤となるこれは１種の解決であり，その見通しではダメだとわかったので解決に向けて一歩近づいたことになる。また，

**②試行錯誤の振り返り**

を行うことにより，さらに解決へと近づいていくことが出来るのではないかと考えられる。また試行錯誤ということは保証されなくてはならない。なぜなら松原元一氏はこのように述べている『試行錯誤を経て体得した知識と経験は，その人の創造物であり，直観が働くために欠くことのできない条件であるからである。』つまり直観は課題の解決に向けて方向付けを行う役割があり，そのためによりよい直観を引き出すため試行錯誤は不可欠なものなのではないかと考えられる。そして

**③対比**

として，今までのものと対比させ共通点・違いを洗い出すことで問題の構造をとらえ，さらに

**④仮定と推測を構成し推論を展開し**

問題を構成的に考えることの基礎としていくことも重要である。そこでこのような思考をつないでいくのが直観である。

つまり式化していく上で何が重要なのかというと問題・課題と自分との間の溝を知り尽くすことである。つまり問題を観察することである。

問題を観察するとは，ただ，問題を観ることではなく問題を整理していくということである。私たちが，観察の対象とするものの多くは未経験のものではない，直面した問題自体は未知でも，その問題をよく観て分析するとその大部分は既知で，その中に未知のものが１つ含まれているのである。それらを整理していくのが観察である。言い換えると考えるとは「観察」から始まるのである。この観察がしっかりさせなければ直観は生まれてこない，なぜなら観察とは，直観が生まれるまでの間の課題の認識であると同時に，課題に含まれる諸対象を整理することであるからである。この観察の仕方がその後の思考の進行を方向づけることになる。そして観察していくことで，直観が生まれそれをもとにさらに暗示が生まれてくる，進むべき道を示してくれるのである。

### ３．子どもの具体的な様相から式化への過程

子どもの具体的な思考の様相をもとにどのような振り返りが，立式していく上で必要なのであろうか。

たとえば順列の問題では確かに子ども達は，思い付くままにあらわす様相や走る順番に番号を付ける様相などが表された。

また組み合わせの問題では，表に表し組を作る様相や，５つの物の中から２個の組を作り線で結ぶ様相が見られた。

ここで考えてみなければならないのは，図や表に表せたからといって，直ちに式化できるものではないと思われる。

つまり子ども達がさまざまに表した図や表をどのように振り返り，どのように式化に向けて，見直しをしていくかを考えるのがここの課題である。

#### ３．１ 課題意識・疑問の起こり

##### ３．１．１順列の問題における子どもの具体的な思考の様相

教科書で取り上げられている順列の問題

> ならべ方
>
> ①　あきら君，かつや君，さちお君の３人でリレーをしようとおもいます。
> ３人の走る順番を全部かきましょう。

| | | | |
|---|---|---|---|
| **様相１** | あきら | かつや | さちお |
| | かつや | さちお | あきら |
| | かつや | あきら | さちお |
| | あきら | さちお | かつや |
| | さちお | かつや | あきら |
| | さちお | あきら | かつや |

**様相２**　　あーかーさ　かーさーあ
かーあーさ　あーさーか
さーかーあ　さーあーか

**様相３**　　あーかーさ　さーあーか
あーさーか　さーかーあ
かーあーさ
かーさーあ

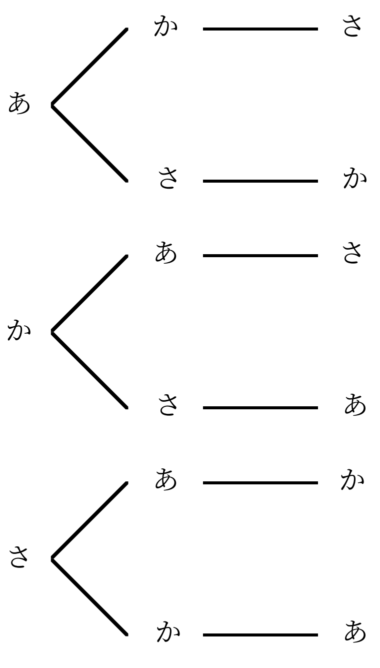
**様相４**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | あ | あ | か | か | さ | さ |
| **2** | か | さ | あ | さ | あ | か |
| **3** | さ | か | さ | あ | か | あ |

**様相５**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| あ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| か | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| さ | 3 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |

**様相６**




**様相７**　　$\mathbf{3 \times 2 = 6}$

３．１．２ 順列の問題における疑問の起こり

上記のように様相１から様相６までの解法の子どもは，様相７の式に対して，なぜそのようになるのかという疑問をもつと思われる。

具体的な疑問として，

「３はどこからきたのか？」
「２は何の２なのか？」
「３×２とはなぜ？」
「なぜ掛け算なのか」

などが挙げられる。では様相１から様相６の子どもたちに対してそれぞれの様相のどこに注目していけば，その疑問は解決されていくのか，みていきたい。

３．２　式化に向けた図や表の読み

上記のような疑問の解決，または式を立式していく上で，図・表のどの部分を読み取ることが必要なのか考えていきたい。まず疑問に現れてきた数値は何らかの形で，各様相に現れてきているはずである。そこに注目していくことはできないのか。

まず**様相１**と**２**ではランダムに書き出したものと，それを頭文字化しただけのものなので疑問に上がってきたような数値は見つけにくい，したがってこの解法で止まってしまった子どもには，別の解法を働きかけていく必要もあると考えられる。**様相３**では同じ頭文字で始まるものが２つずつ３組ある，このことから疑問にあった数値２・３を見つけることが可能で，２つずつ３組あることから２×３ということに気付くことができるのではないだろうか。同様に**様相４**でも同じ頭文字で始まるものが２個ずつ３組ある。**様相５**では同じ数字で始まるものが２個ずつ３組ある，**様相６**は様相３の変形にあたるものでもある。したがって２つに枝分かれしたものが，３組ある。つまり一つの頭文字の始まり方に対して，２つの場合の数があるということを示している。そこで整理すると，３とは同じ頭文字で始まる組の数なので，先頭にくることができる人の数だと言い換えることができる。また２は，先頭が決まったときの，それぞれの場合の数だということができる。

このような図や表の読みをした上で，もう一度**様相１・２**を振り返ってみたい

**様相１**　　あきら　かつや　さちお
かつや　さちお　あきら
かつや　あきら　さちお
あきら　さちお　かつや
さちお　かつや　あきら
さちお　あきら　かつや

**様相２**　あーかーさ　かーさーあ
かーあーさ　あーさーか
さーかーあ　さーあーか

すると離れてはいるが，同じ頭文字から始まるものが２つずつあるのがわかる。そしてその２個ずつの組は３組あることを確認することができる。

このように振り返ることで，はじめは無秩序に見えて，意味を見出せなかった，**様相１・２**に対して意味付けをすることが可能になると考えられる。つまりはじめに行った試行錯誤の段階もまったくの無駄ではなく，そこにも意味付けが可能で価値を見出すことができると考えられる。またこのようにすることで，試行錯誤を保証することができる。

## Ⅳ．研究の結果

本研究のまとめとして前節で定義した式化に向けた４つの活動が式化の過程でどのような役割を果たしているのか整理してみる。

１）試行錯誤

試行錯誤とは，問題を解決するための最初の活動であり，そこで得た知識・経験が直観を生み出すもととなる。

例えば，ここでは，様相１がそれにあたるのだが，この様相からは，求めたい答えに対しておよその見通し持ったり，さらにもっと優れたやり方はないかと新たな直観を生み出したりする役割りがあると考えられる。

２）試行錯誤の振り返り

試行錯誤の振り返りとは，ただやってみるだけの段階だった試行錯誤を振り返りさらに解決へと進んでいくことである。

例えば，様相２以下の様相は試行錯誤の段階の様相１を振り返り，もっと優れた手際のよいやり方はないかと考えたときに考え出される様相なのではないかと考えられる。つまり試行錯誤の振り返りをすることで思考が前に進むのである。

３）対比

対比とは，今までのものと対比させ共通点・相違点を洗い出すことで問題の構造を捉えていく活動と前節では定義した。

ここでは，前に進めた思考を比較し比べ，どちらがやりやすいのか，またまだ優れた考え方はないのかなど考えていくのもこの対比の活動と言えるのではないかと考える。またそしてその比較された様相の共通点を洗い出すことで，一般性を求めたり，一つの式として集約したりしていくのもこの対比の活動なのではないだろうか。

たとえば順列の問題でどの様相で解いても同じ６通りという解が求まる。ここから，どれがいちばん求めやすいのか比べたり，様相に共通性がないのか見たりしていくことができる。

具体的に言うと順列の問題で様相４と様相６は見た目が違うが，一番に走る人を決めるとその時の走る順番は２通りずつあることがわかる。様相４と様相６には，共通点があることが読み取れる。それならば様相３とではどうか，また様相５ではどうなのかと見ていくと同じ共通点がみてとれる。

そこで仮定や推測を行うことでさらに思考が深まると考えられる。

４）仮定と推測

仮定と推測とは，仮定と推測を構成し推論を展開し問題を構成的に考えることである。

ここでは，対比して出てきた共通点をもとに，一つの式に集約する際に用いられた活動と考えることができる。

つまりたとえば，様相３～６から得た共通点，ひとりの先頭を決めると，その時の場合の数は２通りということを考えたとき，先頭になりえるのは３人だから掛け算で求めることができるのではないかと仮定したりすることができる。すると３×２と立式していくことも可能になる。さらに進んでは，ほかの問題でもこの考えは使えるのではないかと考え，式を一般化したりすることができるのではないか。

逆に，表や図から立式できなかった子どもは，他の子どもや，教師から示された式に現れている数字を分析して自分の作った図・表に現れている物がないか，など仮定してみていくという活動もある。例えば，順列の問題の式　３×２＝６の３は走る人数３人の３なのではないか，または一番に走ることができる人の人数ことではないかとなどと仮定して式と図・表の関係を読み取っていくということの役割も果たしているのではないかと考えられる。

本研究では数量関係領域を取り上げたが，直観は数量関係領域の式化の過程でのみ用いられるものではなくさまざまな問題解決の場で働くものである。特に図形領域では，中学以降の論証の場面では，その図形に潜んでいる解決に必

要な図形や，補助線等を見出すことで，論理の進行のすべき道を示すものであり，直観がなければ論理的思考は行なえないと言われるほど，さらに論理的思考とのつながりが深くなる。本研究では，あまり論理的思考という側面からは，検討はしなかった，そこで今回見出した直観のはたらきが，論理的思考とどのように関係しているのか。また他の領域での，直観・論理的思考の働き，関わりはどうなのかということを今後の課題としたい。

**主要引用・参考文献**


第Ⅱ章
・大辞林　　三省堂　（インターネット検索）
・野村武衛「数量に関する直観力と論理的な考え方」・文部省『昭和３１年度　小学校教育指導者講座研究集録』
・和田義信著作・講演集④講演集(２) 考えることの教育　１９９７年
第Ⅲ章
・算数現代化全書(７)　式表示　川口　廷　金子書房　昭和４４年
・数学的な考え方を育てる『式』の指導　片桐重男　明治図書　１９９５
・算数・数学教育学　岩合　一男　福村出版　１９９０
第Ⅳ章
・新版　算数６年上
啓林館　平成１１年1月３１日
・新版　算数５年上
啓林館　平成１１年1月３１日
・現代教育１０１選　算数の見方考え方　松原元一　国土社　１９９０年
・思考の様相　算数・数学の指導事例から　松原　元一　近代新書出版　昭和４６年
第Ⅴ章
・学習指導案　「変わり方を調べて」　大牟田市立銀水小学校 原田知枝先生