

数学教育における証明の機能に関する研究

和田 達次

指導教官：溝口達也

・研究の目的と方法

数学者による証明といえば命題の証明が決まった形である証明のような厳密な証明に重点を置いていると考えられる。しかし、中学校での証明の学習はこのように決まった形の証明が暗記されるべきではないと考えられる。そこで、本研究では教室での証明の役割について教師が意識する必要があるとし、その役割を考えるうえで証明の機能に着目することが有益であると考え、次のような課題を設定する。

証明の機能の教授について考えるのに証明の機能に着目する仕方が考えられるが、そのような証明の機能を本研究ではどのように定めるか？

証明の機能が実際の中学校で扱われるような証明ではどのように働いているのか？

証明の教授においては証明の機能のどのようなことに重点を置いて行うべきか？

本研究ではこれらを解決することで、中学校における証明の教授をどのように行うべきであるのかという教授への示唆を与えることを目的とする。

そのための方法として、まず証明の機能へ着目することの意義や証明の機能の捉え方について先行研究などから考察し、証明の機能を本研究でどのように定めるかを考察する。次に現行の中学校の教科書で扱われている証明や中学校で扱われると考えられる証明を具体例として取り上げ、それらの証明で証明の機能のどの機能が働いているのかを考察する。また実際の活動において証明の機能間の因果関係に着目する仕方も考えられるので、その観点から考察を行う。

・本論文の構成

第1章 研究の動機・目的・方法

- 1 - 1 研究の動機
- 1 - 2 研究の目的
- 1 - 3 研究の方法

第2章 証明の機能

2 - 1 証明の機能とは

2 - 2 証明の機能に着目する理由

第3章 数学教育における証明の機能

3 - 1 「立証」、「説明」

「普遍妥当」ということ

「洞察を得る」ということ

3 - 2 「体系化」

数学教育での公理の厳密さとそれが定められる理由

3 - 3 「発見」

演繹的な推論と帰納的・類比的な推論による発見

3 - 4 「コミュニケーション」

第4章 証明の機能間の関係

4 - 1 証明の機能に着目する2つの観点

4 - 2 証明の機能の間の因果関係

4 - 2 - 1 「立証」と他の機能

4 - 2 - 2 「説明」と他の機能

4 - 2 - 3 「体系化」と他の機能

4 - 2 - 4 「発見」と他の機能

4 - 2 - 5 「コミュニケーション」と他の機能

第5章 本研究の結論と今後の課題

5 - 1 本研究から得られた結論

5 - 2 教授（学習）への示唆

5 - 3 今後に残された課題

引用・参考文献

資料

(1ページ41×37字，63ページ)

・研究の概要

3 - 1 証明の機能

証明の機能についてはこれまでに異なった見方からいろいろな捉え方がされてきている。しかし、本研究では中学校の数学教育での証明の教授について考えるため教授の対象となるのは数学の未成熟な子供たちである。このようなことを考慮にいれ、本研究では証明の機能として

次の5つを考える。

- 立証（命題の真に関係すること）
- 説明（なぜ命題が真であるのかということの洞察を与えること）
- 体系化（公理・定義・定理の演繹的な体系へそれぞれの結果を位置づけること）
- 発見（新しい結果の発見や発明）
- コミュニケーション（数学に関する知識の伝達）

3 - 2 中学校の数学教育における証明の機能

証明の機能が中学校の証明でどのように働いているのかについての考察は以下の通りである。

まず最初に「立証」と「説明」の機能については「立証」は証明を使って命題の妥当性を示すことである。「説明」は証明を使ってなぜ命題が妥当であるのかについて洞察を得ることで、言い換えれば命題の対象の性質を手がかりにして、命題が妥当である理由を示すことである。ここでは「妥当である」や「洞察を得る」という語が用いられており、これらの語は「立証」や「説明」の機能を考えるうえで重要であると考えられる。これらの語の意味を本研究では次のように捉えることにする。

普遍妥当である・・・子供が命題と自分の知りえる事実との間に矛盾や問題を感じなければ、その命題が子供の知り得る対象全体で有効であること

洞察を得る・・・命題全体を観察し、課題の構造上の有意味な順序で進行して、最終的に解決までいけるという過程を一つの貫とした筋道として組み立てること

これらをふまえて、中学校で扱われていることを例に取り上げた「立証」と「説明」の機能についての考察は以下の通りである。

右の図で、角の関係を使って、
 $l \parallel m, m \parallel n$ ならば、
 $l \parallel n$ であることを説明しなさい。
 (啓林館平成9年度版中学校2年教科書 p.93)

(証明1) $l \parallel m$ だから、 $a = b$ (同位角)
 $l \parallel n$ だから、 $a = c$ (同位角)

よって、 $b = c$
 したがって、同位角が等しいので $m \parallel n$

(証明2) $m \parallel n$ でないとすると、 m と n は交わる。その交点を点 P とすると、点 P を通り直線 l に平行な直線が m, n の二本引けることになる。

これは「直線外の1点を通り、その直線に平行な直線はただ1つある」という平行線の公理に矛盾する。よって、 $m \parallel n$

このことは証明として教科書で記述されていないが、実際には証明を行っていると考えられるため例として取り上げた。まず、(証明1)においては、命題を観察し、平行であるという命題の対象の平行であれば同位角は等しい(平行線の性質)という性質を手がかりにし、普遍妥当である既知の事柄(定理)を用い、それらから命題が妥当であるということが演繹的に示されている。このように、証明を使って命題が妥当である理由が示せるので、この証明では証明の機能の「説明」の機能が働いていると考えられる。

これに対して、(証明2)では、(証明1)の演繹的な推論で直接的に証明されているのとは異なり、最初に結論を否定し、それでは矛盾が生じるためこの命題が妥当であるというように背理法で間接的に示されている。つまり、なぜ命題が妥当であるのかということについては背理法によって命題が妥当であることが言えたからであり、(証明1)で演繹的な推論により直接的に証明される場合とは異なり命題が妥当かどうかということだけが主に取り上げられていると考えられる。よって、(証明2)では「立証」の機能が働いていると考えられる。

このように「立証」の機能と「説明」の機能は中学校の証明において別々に働いていると考えられる。

「体系化」の機能は証明を使って、諸命題を公理、定義、そして公理、定義から演繹的に推論した可能なかぎり多くの定理から演繹的に推論できることである。「体系化」の機能の働く証明についてここでは特に具体例として実際の証明は取り上げないが、例えば次の事柄が証明の中で用いられている場合について考える。

- ・平行線の性質(2直線が平行ならば同位角・錯角は等しい)
- ・三角形の合同条件

- ・三角形の相似条件
- ・円の弦・接線の性質

これらはユークリッド原論においては証明がされており、本来は証明が必要とされるにも関わらず、中学校では証明されず用いられている。これでは中学校の証明で「体系化」の機能が働いていないように考えられる。しかし、これらの事柄を証明するのに必要な事柄やさらにそれらを証明するのに必要な事柄というように遡っていき、より厳密な公理を用いるというような厳密さを数学者に比べ数学の未成熟な子供たちに求めることは無理であると考えられる。このこと以外に中学校で証明を学習することの目的なども考慮すると、中学校での公理の厳密さが制限される理由を次のように考えられる。

- ・中学校で証明を学習することの目的として演繹的に推論できるようになることがあるため
- ・数学者に比べ数学の未成熟な子供たちが推論の根拠に迷うことなどを避けるため
- ・数学者のような厳密な公理からの証明は数学の未成熟な子供たちに必要ではなく、それに代わるような活動を行うことで十分であるから

このように考えると中学校の証明においても子供たちにとって厳密すぎない公理などを用いることによって演繹的に推論できると考えられる。よって、公理や定義などを既習の事柄で一般に正しいと認められている事柄というように捉えることで中学校の証明において「体系化」の機能が働いていると考えられる。

「発見」の機能は証明を使って、新しい結果（命題）を発見できることである。この場合、証明の機能を使うことは、証明を見返すことを意味する。この機能についてもここでは具体例として証明は取り上げないことにする。中学校の証明において証明を見返し、その証明の中で必要な前提を特定し、それに他の前提を付け加えることでもとの命題の特殊化された命題を発見することができる。また証明の中で必要な前提を特定し、それ以外のほかの前提を外すことによってもとの命題の一般化された命題を発見することもできる。さらに、証明の「発見」の機能の働きにより発見された命題について、その命題について考え反例を見つけだし、その反例により発見された命題を精緻化することも考えられる。これらの「発見」の機能の働きにより発見された命題はもとの命題の証明によって

真が保証されることになる。このように証明の「発見」の機能の働きは中学校の証明においていろいろと考えられる。

ただし、証明の機能の働きとして証明を使って発見することの他に帰納的な推論や類比的な推論による発見というのも考えられる。これらの発見のパターンを図に表すと図1のようになる。

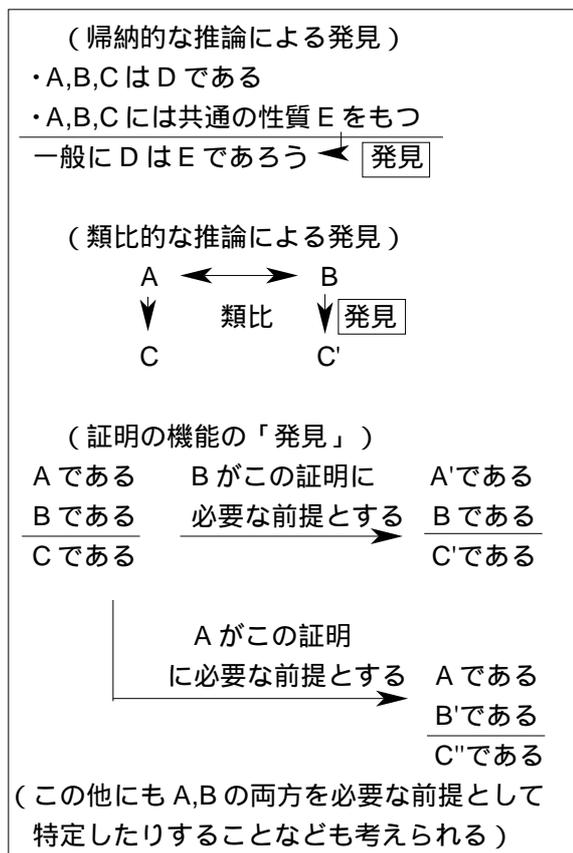


図1 それぞれの推論による発見のパターン

これらをもとにみると帰納的な推論や類比的な推論による発見ではその推論自体が発見的な推論であるのに対して、証明の機能の「発見」では演繹的な推論それ自体は発見とはならず、その推論の中で必要な前提を特定し、それに他の前提を付け加えたりして新しい命題が発見されている。それに加えて、帰納的な推論や類比的な推論では発見されたことが「～であろう」というように必ずしも確実なものではなく蓋然的であるのに対して、証明の機能の「発見」では「～である」というように論証的であるという違いもある。このように発見のパターンをもとに帰納的な推論や類比的な推論による発見の場合と証明の機能の「発見」とは異なる。

「コミュニケーション」の機能は証明をメディアに用いて何らかの効果期待して送り手から

受け手に数学に関する知識を伝達できるときに働く。「コミュニケーション」の機能については具体例として「二等辺三角形の両底角は等しい」ということについて考える。このことを示す方法は証明する以外にも二等辺三角形を真中で折り返して重ねたりするという実際の活動を行うことで示す方法もある。このように実際の活動というメディアに用いるコミュニケーションでは、この命題が成り立ちそうであるということと言えるが、一般の二等辺三角形でも必ず成り立つということはいえそうにない。つまり、送り手は受け手に対してこのような活動というメディアを通してこの命題が妥当であるだろうということは伝達できるが、なぜこの命題が妥当であるのかという理由までは伝達できないと考えられる。言い換えれば、この場合は蓋然的な推論を通して受け手に命題の妥当性を伝えていると考えられる。このときは受け手に期待する効果としてなぜ命題が妥当であるのかということを理解できることまでは期待していないと考えられる。また、この場合はなぜこの命題が妥当なのだろうという疑問を持たせることが期待される効果として考えられる。

これに対して、証明をメディアとして用いるコミュニケーションでは送り手が受け手に対してなぜ命題が妥当であるのかということまでも理解することを期待していると考えられる。それに加えて、なぜこの命題が妥当であるのかということを理解することによって証明を使つての新しい命題の発見などということも送り手が受け手に期待できることも考えられる。

このようにコミュニケーションについて2つの方法を考えたが、証明の教授においては演繹的に推論できることを目的とするので証明をメディアとして用いて数学に関する知識を伝達することに重点を置くことが必要である。しかし、証明の教授において証明の導入段階でこのような蓋然的な推論をメディアとして用いることによるコミュニケーションも考慮に入れるべきである。

3 - 3 証明の機能の間の因果関係

これまで見てきた証明の機能は全て同じ程度で数学の学習に関連があるわけではなく、教授において同じように重点が置かれるべきではないといわれている (Hanna & Jahnke, 1996)。このように証明の機能のどの機能に重点を置くべきかを考えるために証明の機能の間の因果関

係に着目して考えることにする。

例として「立証」の機能が働いている証明について考える。具体例としては、実際に教科書では証明として扱われていないが次のような命題の証明をとりあげる。

「2つの奇数の和は偶数である。」(啓林館平成9年度版中学校2年教科書 p.19)

このことについて数学的帰納法による証明は次のようになると考えられる。

(証明) 二つの奇数を $2n-1, 2n+1$ とおくと

i) $n=1$ のとき

$$2-1+2+1=4 \quad \text{よって成り立つ}$$

ii) $n=k$ のとき

$$\{2k-1\} + \{2k+1\} \\ =4k=2 \cdot 2k \quad \text{よって成り立つ}$$

iii) $n=k+1$ のとき

$$\{2(k+1)-1\} + \{2(k+1)+1\} \\ =2 \cdot 2(k+1) \quad \text{よって成り立つ}$$

したがって、 n は全ての自然数のとき成り立つ

(証明終)

「立証」の機能の働くこの証明では、命題が妥当であることはいえる。しかし、Hanna (1996) はこのような証明は定理が真であることは示したが、子どもたちになぜ真であるのかという暗示を与えないため説明する価値を少ししかもっていないと述べている。また、立証する証明と説明する証明の間の区別をすることは有用であるとも述べている。よってこのような区別をすると、この証明では「立証」の機能は働いていると考えられるが、「説明」の機能は働いていないと考えられる。

また、この証明では既に妥当なことを用いての証明ではなく、個別な場合について考えて証明がされている。つまり、公理や定義、それらから演繹的に示された命題(定理)から演繹的に推論されていないと考えられる。よってこの証明では「体系化」の機能も働いていないと考えられる。

この証明では、先にも述べたが個別な場合について考えそれらから命題が妥当であることを示している。そのため、この証明を見返してみてもこの命題の証明に必要な前提というものを特定することができない。よって、この証明に他の前提を付け加えたり、前提を取り除いたりすることができず、この証明を使つての発見はできないと考えられるので「発見」の機能も働

いていないと考えられる。

しかし、この証明を使って「コミュニケーション」の機能が働くことは考えられる。「コミュニケーション」の機能が働く場合、発信者から受信者にこの命題の妥当性を伝えるためのメディアとしてこの証明を用いることが考えられる。その場合は、証明をメディアに用いて送り手が受け手に命題の妥当性を理解することを効果として期待し伝達することになり、「コミュニケーション」の機能の働きによって受け手が命題の妥当性を理解することになるので「コミュニケーション」の機能が働くことによって「立証」の機能が働いたと考えられる。

よって、このように「立証」の機能が働くことによって他の機能が働くということは考えられないことになる。

また、ここでは「立証」の機能と他の機能について述べたが、同様にして他の機能についても考察すると図2のような結果が得られる。

・ 研究の結果

本研究の目的は中学校の証明の教授への示唆を与えることであった。このことについて考えると次のようになる。

「立証」と「説明」の機能は別々に働くと考えられた。証明の教授においてはより理解することを促すような証明を教師が探すことに時間をかけることが重要であると考えられる。そうよって「立証」の機能の働く証明を証明の学習で扱うことよりも「説明」の機能の働く証明を探すことに時間をかけ、できるだけそういった証明を扱うようにすべきであると考えられる。

「体系化」の機能の働きは既に演繹的に導かれた定理などから演繹的に推論することができることである。ここでの公理や定義については

中学校の証明の教授では教師は子供たちにあまり厳密さを求めすぎてはいけない。また、あまり妥当であることが多くなると子供たちが推論の根拠に迷うことなどが起こりやすいと考えられるので、厳密さは教師が中学生に合わせて制限しなければならない。そのように中学校で定める公理については子供たちに作図をさせたりすることで十分であり、そういった活動により認めさせていくべきであると考えられる。よって、教師はこのように注意しながら「体系化」の機能の働く証明を扱っていかなければならないと考えられる。

次に「発見」の機能について考えると、子供たちが「発見」の機能の働きにより証明を使って新しい結果を発見することはとても大事なことであるが、実際には子供たちにより証明を見返し、新しい命題を発見するというはなかなか難しいと考えられる。そのため証明の学習での教師による支援というのが必要になるであろう。また、教師は様々な「発見」の機能が働くような証明を探すことに時間をかけることも必要であると考えられる。

「コミュニケーション」の機能について考えると、証明の教授においては証明をメディアとして用いてただ命題の妥当性を理解させることを期待するのではなくて、なぜ命題が妥当であるのかという理由を理解させることやその証明を使つての発見などを期待して子供たちに伝達することが必要であろう。

また因果関係について考えれば「コミュニケーション」の機能に重点が置けることが考えられるが、「説明」の機能が働くことによって他の機能が働くということも考えられたので「説明」の機能にも重点を置くべきであると考えられる。

先に働く機能	立証	説明	体系化	発見	コミュニケーション
立証		×	×	×	
説明	×		×	×	
体系化	×				
発見	×				
コミュニケーション	×	×	×	×	

図2 証明の機能の間の因果関係

{注} この表を見ると がついていると一つの機能が働くことによって他の機能が働くことが考えられるが、どんな証明においても必ずしもこのように機能が働くということは考えられない。

これらのことをまとめると、教師としては形式的な証明について考えることよりも証明の機能が働く証明を探すことに時間をかけることが必要である。またその様な証明の機能は一つ一つ別々に働くこともあるが、一つの証明の機能が働くことによって別の証明の機能が働くというような因果関係もある。このような因果関係についても考え、どの機能が働く証明を証明の学習で扱うことが望ましいのかということについて考えていかなければならないと考えられる。よって、教師が証明の機能に着目し、証明の学習の目的に合わせ意図してそれらの証明の機能が働く証明を学習の場面で扱っていかなければならないと考えられる。

また、今後の課題は次の通りである。

- ・証明の機能に着目する仕方とは異なる着目

の仕方での証明の教授の考え方

- ・教授への示唆に基づいた証明の授業での具体的な指導法について
- ・証明の学習に対する子供の捉え方の変化
- ・中学校では証明としては扱われないが、証明がされていると考えられる事柄

主要引用・参考文献

宮崎樹夫. (1995). 学校数学における証明に関する研究-証明に至る段階に説明の水準を設定することを通して-, 博士論文(筑波大学教育学系).

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). International Handbook of Mathematics Education, 877-908, Chapter23: Proof and Proving. Kluwer Academic Publishers.