中学校数学科におけるモデル化に関する研究

竹村　康彦

指導教官：溝口達也

Ⅰ．研究の動機と目的

最近，生徒は数学を敬遠しがちである。数学というと「与えられた問題を公式などを使ってミスをしないように答えを出す」というイメージがあるからだと考えられる。そのため生徒の学習姿勢も受け身になる。しかし数学は本来はもっと自由に考えることができ，自ら積極的に取り組めば楽しさを感じられる教科である。生徒が積極的になるためには，まず数学を好きになってもらうことが，一番良い方法だと考えた。また，数学の問題が親しみやすいもの，つまり，現実の問題とどのように関わり，実際に利用できるか体感できるものであれば，なおよいと思う。

そこで，数学的モデル化に注目した。モデル化するということは，現実の問題と数学がどのように関わっているかを理解することができ，さらに作業をすることによって生徒自身が数学にふれることができるからである。

この研究の目的は，これまでに行われてきた数学的モデル化の授業の問題点を指摘し，その改善案を提示する事である。

その方法として，まず先行授業の例の中から問題があると思われる部分を抽出する。その問題点を解決するものとして数学的モデル化を新たに定義する。そして問題点を修正し，より良いものに改善する。さらにモデル化の枠組みを用いて，望ましい授業例を提示する。

Ⅱ．論文の構成

第１章　研究の動機・目的・方法
- １－１　研究の動機
- １－２　研究の目的と方法

第２章　先行研究の考察
- ２－１　考察の方法
- ２－２　「人工衛星」の授業についての考察
- ２－３　「給水タンク」の授業についての考察
- ２－４　先行研究の問題点

第３章　数学的モデル化の基本的な枠組み
- ３－１　モデルの定義
- ３－２　モデル化について
  - ３－２－１　類比・類推ついて
  - ３－２－２　数学的モデル化過程について
- ３－３　先行研究の問題点の修正

第４章　数学的モデル化を取り入れた望ましい授業例
- ４－１　授業例とその理由
- ４－２　予想される生徒の反応

第５章　研究のまとめ
- ５－１　研究のまとめ
- ５－２　教授への示唆
- ５－３　今後の課題

Ⅲ．モデル化について

モデルは，一般的には，客観的実在や科学のある一定の領域におけるもろもろの対象，性質，関係が，その同じ領域あるいはその他の領域における比較的見通しのよい構造との類比関係において，模写されたものを意味する。（哲学事典，1971）

モデル化するということはモデルを探すこと，つまり，比較的見通しのよい構造との類比関係において模写されたものを探すことといえる。

ここで，さらに詳しくモデル化について調べるために類比に注目した。

図１において，ａとａ′との間にある本質的関係が「類比」と考えられる。ここでいう本質的関係は，公理系とその演繹的な形式的構造の相似（近似）性についてである。

またａとｂの関係と対応する関係をａ′とｂ′の間に考え，既知のｂと類比的に未知のｂ′を定立することが「類推」であると考えられる。

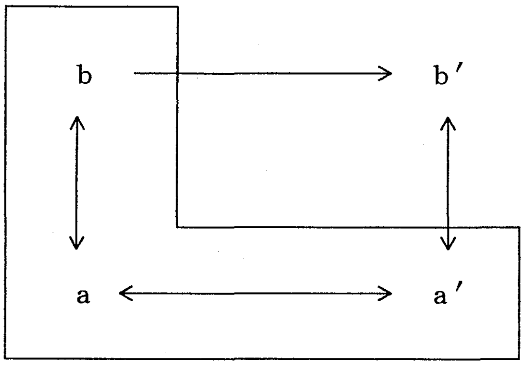


図１

この場合図１のカギ型矩形によって囲まれたａ，ａ′，ｂは既知のものでありこれから未知のもの（創造的発見の対象）ｂ′が類推されるのである。このカギ型矩形をグノーモンというから，こうした類推の構造を類推の「グノーモン的構造」とよぶ。（伊藤俊太郎．１９７５）

例

一様な四面体の重心を求めよ。という問題がでたとき，微積分学の知識がなく，物理学をほとんど知らないものにはこの問題を解くことは難しい。そこで，三角形の重心を考える。三角形の重心は，各頂点とそれに対応する辺の中点を結ぶ３つの線分が交わる点である。これをふまえて四面体の重心を考える。辺ＡＢの中点Ｍと，それに向かい合う辺ＣＤでできる三角形を作る。四面体の辺は６つあるので同様に三角形を作る。できた三角形はある１点で交わる。これが四面体の重心になる(図２参照)。

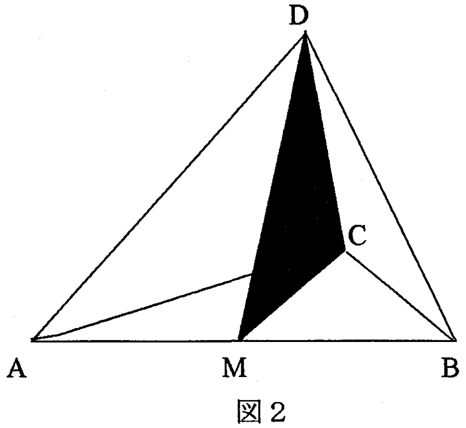


図２

このようにして三角形の重心の求め方から，四面体の重心の求め方を予測する。

また，例を前述の図１のように考えると図３のようになる。ａとａ′が「類比」の関係であることが，「類推」の前提となっていることに注意しなければならない。

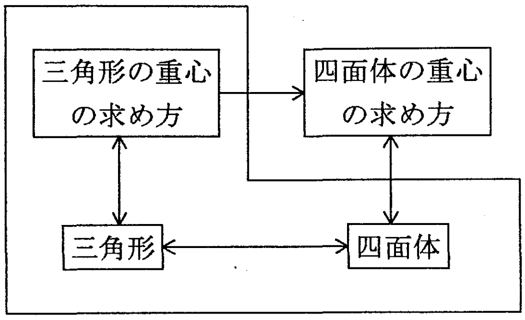


図３

Ⅳ．モデル化過程について

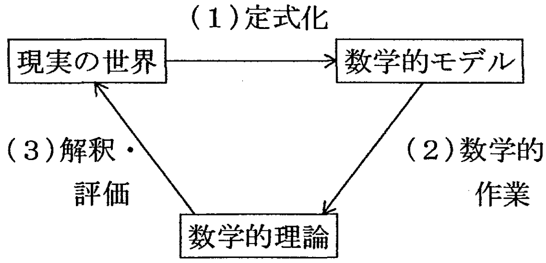
数学的モデル化過程というとき，次の４段階を踏むことになる。

まず，それまでの経験・観察をもとにして，ある事象が探求を要するという認識があるという前提の下で，

（１）その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する(定式化)。
（２）定式化した問題を解く(数学的作業)。
（３）得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価する(解釈・評価)。
（４）問題のより進んだ定式化をはかる（よりよいモデル化)。

（１）～（４）を図式的に示せば，図４のようになる。

図4で，実際は数学的モデルの改良を求めて，何回も回ることになるのである。

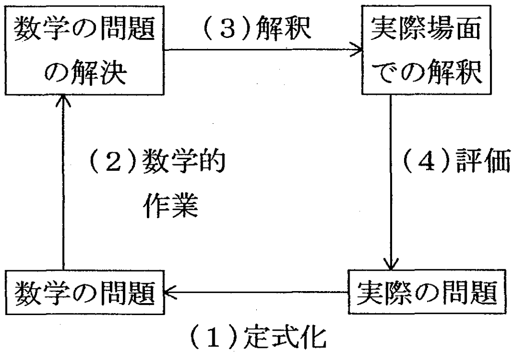


(１)~(３) を繰り返すのが
(４)よりよいモデル化

図４

これからもわかるように，数学的モデル化過程は，単に，事象に対する数学的モデルを作るということにとどまらず，それを使って作業し，評価し，いっそう改良するという全過程を含むものとして解されることは注意を要することである。（三輪辰郎．１９８３）

ここで図４をさらに詳しく分解して考えてみると下の図５のようになる。



(１)~(４)を繰り返すのが
(５)よりよいモデル化
図５

基本的には図４と変わりはない。図４で現実の世界にあたるのが，実際の問題である。そして数学的モデルにあたるのは数学の問題，数学的結論にあたるのは数学の問題の解答である。

ここで，（３）解釈・評価は別のものと考え，二つに分けることにした。（３）解釈は実際場面での有効さを考えるものであり，（４）評価は実際の問題について妥当かどうかチェックするものであると考えた。

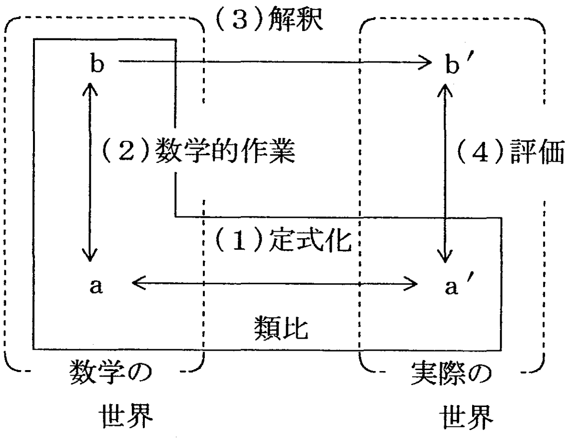
このように考えることによって，類推の例である，四面体の重心の例を図４に重ねて考えることができる。つまり，モデル化の例としてみることができるということである。

ａ：四面体を実際の問題，ａ′：三角形を数学の問題，ｂ：三角形の重心の求め方を数学の問題の解答，ｂ′：四面体の重心の求め方を実際場面での解釈とみれば，（１）定式化は類推と等しいと考えることができる。

図４，５は数学的モデル化過程を図示したもので，図１は類比関係を図示したものである。これらに何らかの関係があると考え，図１，４，５を重ねてみたところ図６のようになった。

図６のようにモデル化を考えると，数学的モデルは現実の領域から数学の領域への橋渡しをするのに役立つものだということがわかる。

モデル化のモデルをつくることで，モデル化過程がどのようなものなのかが明確になった。たとえば，数学の世界と現実の世界の橋渡しにモデル化が有効なこと，数学が現実の世界で役立つことなどである。



(１)～(４)を繰り返すのが
(５)よりよいモデル化

ａ：数学の問題　　ａ′：実際の問題
ｂ：数学の問題の解決　　ｂ′：実際場面での問題
図６

Ⅴ．教授への示唆

数学を「使う」こととは，単なる応用問題を解くことではなくて，自然や社会に起きる問題を，数学を用いて解決するために，どのように数学を使うかということを意味する。　社会に起きる問題を解決するときには，まず，その問題を定式化し，数学を用いて記述し，数学的モデルを作る。そうすることによってはじめて数学を使って処理することが可能になる。その準備ができれば，後は数学的に処理をし，その結果を現実の問題に解釈しなおせばよい。大事なことは，現実の問題の数学的モデルを作る部分になる。数学を使うことの教育とは，数学的モデルを作ることを学ぶ教育であるということができる。従って，数学的モデルを用いた学習は数学を「使う」ことの学習に役立つ。

Ⅵ．今後の課題

①（１）定式化、あるいは（３）解釈、（４）評価は，これまでの学校教育で教えることのなかった高度の技能を要求する。

② 数学的モデル化過程をカリキュラムにどのように位置付けるか、また、教材開発が進んでいるか。

③ 教員養成及び現職教育の両面において　、この方面の教師教育を十分に受けていることは期待できない。

主要参考文献

哲学事典．（１９７１）．平凡社

伊藤俊太郎．（１９７５）．想像の機構．理想Ｎｏ．５０６．

三輪辰郎．（１９８３）．数学教育におけるモデル化についての一考察．筑波数学教育研究，第２号．