証明問題における理解と解決の難しさ

ー生徒の思考の様相に着目してー

吉岡　美之

指導教官：矢部敏昭

1．研究の目的と方法

本研究の目的は、生徒の思考の様相をもとに証明問題における理解と解決の難しさを分析・考察することである。

その際、証明問題における理解と解決の難しさとは何かということを以下の２つの事柄との関わりをもとに考察するものである。

・問題に隠された数学的事実（問題の解釈）

・結論を導くための条件

また、解決の「難しさ」の要因を明確にし、証明問題における今後の指導の在り方を考えることである。

研究の方法としては、まず、Ⅱ～Ⅳ章で文献研究を行う。その中では、理解とは何かを知るために、「シェマ」や「同化と調節」、「道具的理解と関係的理解」について調べる。また、問題解決をする生徒の思考を考える上で必要な「推論の型」についても調べる。それらを理論的基礎として、Ⅴ章では証明問題における理解と解決の「難しさ」について考えるものである。本研究の目的でも挙げている２つの事柄との関わりから、「難しさ」とは何かということについて考察する。Ⅵ章では実際の生徒の思考の様相を知るために調査問題を設定し、証明ができた生徒とできなかった生徒からそれぞれ４名ずつ抽出し、インタビューを行う。証明ができた生徒とできなかった生徒をそれぞれ抽出したのは、証明問題の解決の過程における思考を比較することによって「難しさ」がより明らかになるのではないかと考えたからである。

さらに、インタビューの内容はそれぞれに対して異なる２種類の質問を準備した。それは証明ができなかった生徒はどのように考え正解に至らなかったのか、証明ができた生徒とどこが違うのかを知るためである。また、証明ができた生徒は証明問題をどのように理解し、証明を行っているのか、理解の仕方に違いが見られるのかということを知るためである。そして、その結果を記述し、それぞれの生徒の思考を分析する。Ⅶ章では分析した結果から考えられる教授法への示唆について述べ、研究のまとめとする。

2．本論文の構成

Ⅴ-2.3　難しさの境界線

Ⅵ. 調査問題の作成と結果の考察

Ⅵ-1　調査問題の作成

Ⅵ-2　調査・インタビューの実際

Ⅵ-2.1　証明ができなかった生徒

Ⅵ-2.2　証明ができた生徒

Ⅵ-3　調査結果の考察

Ⅵ-3.1　抽出児の思考の比較

Ⅵ-3.2　難しさに関する考察

Ⅶ. 本研究のまとめと課題

Ⅶ-1　教授法への示唆

Ⅶ-2　研究のまとめ

Ⅶ-2.1　まとめ

Ⅶ-2.2　今後の課題

３．研究の概要

一般的に「難しさ」とは、生徒のつまずき、証明を進める上での思考の停滞する部分（箇所）等が考えられる。しかし、それだけではなく、もっと別のところにも難しさがあるのではないかと考える。生徒の側から考えると、「難しさ」は、論理展開によって結論を導くこと（結論に結びつけること）や、与えられた問題からどのような事柄を用いるか、その事柄を見つけるために問題のとらえ直しをすること等が難しいのではないかと思われる。言い換えれば、ここでの「難しさ」は生徒がこれらの事柄を意識するしないに関わらず、数学学習において重視されるべき事柄として指摘しうるものであると考えるのでる。また、教師の側からすると、前者（結論を導くこと）の指導に対しては比較的丁寧な指導が行われているものと思われる。しかし後者（問題のとらえ直し）に対しては、着目する事柄を指摘はしても、その事柄に着目するためにはその問題をどのようにとらえ直せばよいかといったことにはあまり力を入れて指導していないのではないだろうか。つまり、証明を進める上で例えば何故△ＥＢＣや△ＤＢＣが取り上げられるのか、あるいは何故これらの三角形に着目するのかといった数学的事柄への意味づけが証明問題を考えていく上で重要となるのではないか。このように考えた場合、子どもたちが問題を解くときの「難しさ」には、①問題に隠された数学的事実（問題の解釈）、②結論を導くための条件、という２つの難しさがあげられるように思われる。

①問題に隠された数学的事実（問題の解釈）

問題に隠された数学的事実とはどういうことか。つまり、解答を導くために必要な条件は何であるかということを見つけるために必要な、問題に含まれる性質・特徴を問題のなかから見いだすことである。これを問題を解く「難しさ」の要因の一つであると考える。

例えば例題について考える。

［例題］

二等辺三角形ＡＢＣにおいて、底辺ＢＣの両端より２つの等しい辺ＡＢ，ＡＣに垂線ＣＥ，ＢＤをひくとその長さは等しい。これを証明せよ。

この問題の場合、図１のような図が考えられる。問題の証明にあたっては、△ＥＢＣと△ＤＣＢといった２つの三角形に着目すると二等辺三角形の性質・三角形の合同条件（概念のシェマ）から、判断のシェマにより、２つの三角形が合同であることを利用できる。

問題に則して２本の垂線をひくことにより、△ＡＢＣ以外に△ＥＢＣや△ＤＣＢが示される。問題の図を”二等辺三角形と２本の垂線”を表しているという見方の他に”垂線ＣＥ，ＢＤを一辺とする三角形が存在する”という見方あるいは問題の解釈が必要に思われる。つまり、この図形を幾つかの三角形の集まりという視点からとらえなおすことであり、具体的にいえば、△ＥＢＣと△ＤＣＢ（図２）や、△ＡＢＤと△ＡＣＥ（図３）を見ることができるということである。

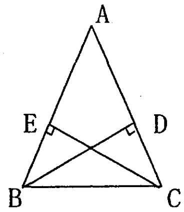


図１

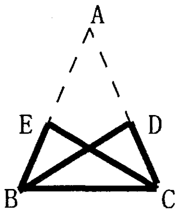


図２

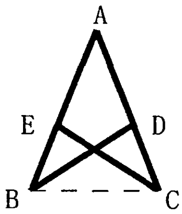


図３

②結論を導くための条件

問題のとらえなおしができたとすると次に、結論を述べるためには何が必要かまたは与えられた条件を使って何ができるかを考えなければならない。これを見つけ出すこともまた「難しさ」の要因の一つであると考える。

例題について考えると、垂線ＣＥとＢＤの長さが等しいことを示す条件として、△ＢＥＣと△ＣＤＢ、△ＡＥＣと△ＡＤＢが合同であることがいえればよい。この場合、三角形の合同に着目することが結論を導くための条件にあたる。

また、これら２つの難しさはほぼ同時に考えられるものであり、順序が逆になることもある。よって、記述だけではどちらに依存する難しさかは区別できない事柄もあり、２つの難しさの境界線をはっきりと引くことは難しいものと思われる。この例題の場合、△ＢＥＣと△ＣＤＢならば辺ＢＣが共通であること、△ＡＢＤと△ＡＣＥならば∠Ａが共通であることに着目することが境界線にある事柄である。

先に示した難しさが実際に生徒たちが問題を解くときに存在するのかを知るために調査問題を作成した。調査問題は先に挙げた例題と同じものである。３９名の生徒を対象に調査を行ったが、さらに証明ができなかった生徒（Ａ～Ｄ児）と証明ができた生徒（Ｅ～Ｈ児）を抽出しインタビューを行った。インタビューの内容は以下に示すとおりである。

【インタビューにおける質問】

《証明できなかった生徒》

Ｑ１．この問題を自分の言葉で言うとどう表現できますか？
[意図：問題の言いかえ・問題把握]

Ｑ２．何を示せばいいのですか？
[意図：課題をみつける・問題把握]
・ＢＤ＝ＣＥ

Ｑ３．何を考えたらいいのですか？
[意図：手続き的シェマ]

Ｑ４．問題から分かる条件・データは何ですか？考えられるだけ挙げてください
[意図：問題に含まれる本質的概念]

Ｑ５．（図を指して）この図の中にはどんな図形を見ることができますか？
[意図：問題のとらえなおし・数学的事実]

Ｑ６．三角形ＡＢＣ以外に三角形はありませんか？
[意図：問題のとらえなおし・数学的事実の発見]

Ｑ７．ＢＤ＝ＣＥを言うには、どんなことが言えればいいですか？
[意図：条件からの考察（合同条件）]

Ｑ８．等しいことを示すために今まで何か習わなかった？ [意図：合同条件を気づかせる]

Ｑ９．ＢＣ＝ＣＢとしていますが、これは問題の図において△ＥＢＣと△ＤＣＢという２つの三角形を考えたときに思いついたのですか、それとも、合同条件を考えたときに思いついたのですか？
[意図：難しさの境界線]

Ｑ９’．∠Ａが共通であるとしていますが、これは問題の図において△ＡＥＣと△ＡＤＢという２つの三角形を考えたときに思いついたのですか、それとも、合同条件を考えたときに思いついたのですか？
[意図：難しさの境界線]

Ｑ10．ＢＥ＝ＣＤとしていますが、これはどのようにして考えついたのですか？
[意図：数学的事実の理解]

Ｑ10’．ＢＤとＣＥの交点をＯとしたとき、「△ＯＢＣが二等辺三角形である」としたのは何故ですか？
[意図：数学的事実の理解]

Ｑ10”．「ＢＣに平行な線ＥＤ」とは、どこから出てきたのですか？何故平行であるといえるのですか？
[意図：数学的事実の理解]

Ｑ11．△ＥＢＣと△ＤＣＢで考えるとどうなりますか？ [意図：三角形の合同が言えるか]

Ｑ12．三角形の合同条件は何ですか？二等辺三角形の性質は何ですか？
[意図：概念のシェマの有無]

《証明ができた生徒》

Ｑ１．この問題を自分の言葉で言うとどう表現できますか？
[意図：問題の言いかえ・問題把握]

Ｑ２．問題から分かる条件・データは何ですか？考えられるだけ挙げてください。
[意図：問題に含まれる本質的概念]

Ｑ３．この問題の課題は何だと思いますか？
[意図：自分なりの課題をみつける]

Ｑ４．どんな見方が大切だと思いますか？何が分かればいいと思いますか？
[意図：手続き的シェマ]

Ｑ５．この問題を解くときに何か別の問題（今までにやった問題）を思い出しましたか？
[意図：問題想起の有無]

Ｑ６．この問題を解くには何が必要ですか？役に立つ定理はありますか？
[意図：概念のシェマの有無]

Ｑ７．どの三角形に着目したのですか？何故それに着目したのですか？
[意図：手続き的シェマ]

Ｑ８．ＢＣ＝ＣＢとしていますが、これは問題において△ＥＢＣと△ＤＣＢという２つの三角形に着目したときに思いついたのですか、それとも合同条件を考えたときに思い

ついたのですか？

［意図：難しさの境界線］

Q８’．∠Aが共通であるとしていますが、これは問題の図において△ＡＥＣと△ＡＤＢという２つの三角形に着目したときに思いついたのですか、それとも、合同条件を考えたときに思いついたのですか？

［意図：難しさの境界線］

（一通りで証明した生徒）

Q９．あなたは～という方法で証明していますが、いま他の方法を思いつきますか？

［意図：多様な見方］

Q 10．同じように三角形の合同条件を使って別の証明はないですか？［意図：多様な見方］

Q 11．この図形の中に他の合同な三角形は見つかりませんか？［意図：多様な見方］

（二通り以上で証明した生徒）

Q12．異なった方法はすぐに思いつきましたか？

［意図：多様な見方］

Q 13．まだ他に方法はありますか？

［意図：多様な見方］

Q 14．２つの三角形に着目したら証明はできると思いますか？［意図：証明の理解］

Q 15．この問題はできない子にとってどこが難しいと思いますか？［意図：思考の違い］

Q 16．この問題をもとにどんな問題が作れますか？［意図：問題の作りかえ］

Q 17．三角形の合同条件は何ですか？二等辺三角形の性質は何ですか？

［意図：概念のシェマの有無］

この調査の結果、問題に隠された数学的事実という難しさに関して、三角形の合同に着目できていない生徒はいなかった。生徒たちは何らかの三角形を見つけ、それを用いて証明しようとしていた。しかし、問題に含まれる性質・特徴ではない事柄を「仮定」として、証明に用いている生徒が見られた。

（証明１）

△ＥＢＣと△ＤＣＢにおいて、

△ＡＢＣは二等辺三角形より、

∠ＥＢＣ＝∠ＤＣＢ‥‥ｉ

仮定より、

∠ＢＥＣ＝∠ＣＢＤ‥‥ⅱ

仮定より、

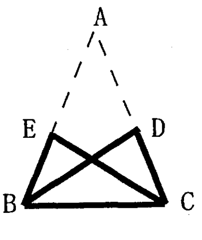
ＥＢ＝ＣＤ‥‥ⅲ

ｉ，ⅱ，ⅲより、

一辺とその両端の角が等しいので、

△ＥＣＢ≡△ＤＢＣ

よって、ＢＤ＝ＣＥ　　‖



（証明１）について考えると、△ＥＢＣと△ＤＣＢに着目し、ＥＢ＝ＣＤという事柄を仮定として用いていることである。この問題の場合、ＥＢ＝ＣＤという事柄は問題では仮定されておらず、この事柄を用いるには、問題で与えられた事柄から導かなければならない。よってこの証明を行った生徒は、問題に含まれる性質・特徴をうまく見いだせていないものととらえることができ、数学的事実という難しさは存在するといえる。

また、結論を導くための条件という難しさに関しては、全ての生徒が２つの三角形の合同に着目できていた。しかし、殆どの生徒が２つの三角形の合同を示すために合同条件を用いて証明をしようとしていたが、その中に合同条件を用いずに証明を行っている生徒が見られた。

（証明２）

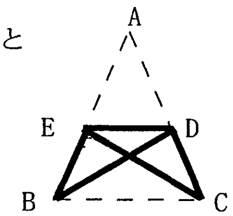
ＢＣに平行な線ＥＤをひくと

△ＥＤＣと△ＤＥＢで

高さが等しいので

△ＥＤＣ≡△ＤＥＢ

よって　ＢＤ＝ＣＥ　　‖



この生徒は、合同条件を知らずに証明を行ったのではなく、合同条件を知っていながらそれを用いずに証明を行っていた。合同条件を覚えていても、実際の証明になるとそれをどの様に用いればよいのかが分からないようであった。これは、生徒の思考の中で２つの三角形の合同を示せばよいということと、合同を示すには合同条件が必要であるということが結びついていないと考えられる。このことは与えられた条件を使って何ができるかといった結論を導くための条件に関して難しさがあるととらえることができる。

難しさの境界線に関しては、抽出児８名のうち、辺ＢＣ共通に関しては、７名∠Ａ共通に関しては５名が着目している。インタビューにおいて、それぞれどちらから導いたのかを尋ねた。結果は、表－１に示すとおりである。

表－１

	A	B	C	D	E	F	G	H
ＢＣ	条		数	数	条	共	数	数
∠A		数			数	数	数	共

数：数学的事実に依存

条：結論を導くための条件に依存

共：数学的事実と結論を導くための条件のどちらにも依存

空欄：辺ＢＣ，∠Ａについて証明で用いていないもの

∠Ｂ＝∠Ｃについては、問題より二等辺三角形ＡＢＣということから直接導かれるものなので、難しさの境界線では取り上げないこととする。辺ＢＣ共通や、∠Ａ共通に関しては証明において、どのような思考をするのかに依存すると思われたので難しさの境界線で取り上げることとする。

調査の結果、辺ＢＣ共通に関しては、数学的事実に依存するとした生徒は４名であり、結論を導くための条件に依存するとした生徒は２名であった。また、そのどちらにも依存するとした生徒は１名であった。証明ができなかった生徒（Ａ～Ｄ）に関しては数学的事実に依存するとした生徒と結論を導くための条件に依存するとした生徒は２：１であり、数学的事実に依存する生徒の方が多かった。また、証明ができた生徒（Ｅ～Ｈ）に関しても３：２（どちらにも依存するとした場合はどちらにも入れる）であり、数学的事実に依存する方が多かった。

∠Ａ共通に関しては、数学的事実に依存するとした生徒は４名であり、結論を導くための条件に依存するとした生徒はいなかった。また、そのどちらにも依存するとした生徒は１名であった。証明ができなかった生徒は、数学的事実に依存するとした生徒が１人であった。証明ができなかった生徒が少ないのは△ＡＢＤと△ＡＣＥという三角形に着目した証明を行っておらず∠Ａ共通を取り上げていないからである。証明ができた生徒についても、数学的事実に依存するするとした生徒と結論を導くための条件に依存するとした生徒は４：１（どちらにも依存するとした場合はどちらにも入れる）であり、数学的事実に依存する方が多かった。

難しさの境界線に関しては、数学的事実に依存する場合が多く、結論を導くための条件に依存する場合は少なかった。このことは証明ができた生徒と証明ができなかった生徒との間にあまり差は無いように思われた。しかし、２つの難しさのどちらにも依存する場合に関しては証明ができた生徒の思考のみに見られた。どちらの難しさからも考えられており、証明ができた生徒の方が様々な方向からの考察を同時に行っていることが分かった。難しさの境界線として取り上げた事柄は、この調査の結果において、どの難しさに依存するかは人によって異なることが分かった。よって２つの難しさの境界線をひくことは難しいと思われる。

また、これらの調査の結果より、Ⅶ章では教授法への示唆を考察する。

証明を意味する言葉には，ｄ emonstration と proof という２つの言葉がある。前者の demonstration は、「表示する」という意味に根ざしており、真なることを「外へ向けて示す」ことを意味している。つまり、証明の仕方・記述の方法といった形式を重視したものであるといえる。それに対して、後者の proof は、「調べる」という意味から出ており、「内へ」探りを入れるということを意味している。つまり、証明をしていく上で何が考えられるか、どのように導くことができるか、与えられた条件からどのようなことが考えられるか、問題をどのようにとらえ直すことができるか、また既習事項との関わりから何かいえることはないかといった問題解決における思考の仕方を重視するものである。

さらに、これまでの論証指導において教師は上述した意味における demonstration を重視しているとも指摘している。つまり、教師は正しい証明をして見せることをもって、その指導をしたと考えるのである。

しかし、本来の指導は、proof に重点を置き、生徒の理解を図るべきであると思われる。教師が demonstration を重視してきたことが証明問題の難しさの原因になっているのではないだろうか。このような考え方に立って調査結果を振り返ることから、教授法への示唆を考えるものである。

第一に、数学的事実の難しさに対してである。先でも述べたが、問題に含まれていない事柄を仮定として用いている場合である。このような間違いをする生徒は非常に多く、その殆どの生徒が、その事柄の証明は必要でないと感じているのである。直観的に分かりやすく、「正しい

と分かりきっているのに、なぜ証明しなければならないのか」と感じるからである。この場合、問題で与えられていることと、今、自分が知っている知識との違いをはっきりと押さえなければならない。そして、問題の理解あるいはとらえ直しについて「問題からは何が分かるのか」「与えられている条件は何か」「どのようにとらえることができるのか」といったことを指導すべきであると思われる。つまり、proof を重視した指導への転換が必要である。

第二に、結論を導くための条件に関する難しさである。今回の調査に関していえば合同条件を知っていながら合同条件を用いずに証明を行った生徒についてである。この生徒は２つの三角形の合同を示すために高さが等しいことを根拠として証明しようとしている。このことはある意味では２つの三角形に着目し、２つの三角形が合同であることを示そうとしていることから、「内へ」の探りを入れているととることができるが、持ち合わせている合同条件の概念と問題で与えられている事柄を結びつけるという思考がうまく働いていないものととらえることができる。このように考えたとき、やはり証明を行う思考の過程が重視されなければならないといえる。このような生徒に関しては、証明を行っていく中で、「どのように合同条件を活用していけばよいか」ということを指導する必要があると思われる。

４．研究の結論

証明問題における解決の難しさには「数学的事実に関する難しさ」と「結論を導くための条件に関する難しさ」という２つの難しさが挙げられることを指摘し、実際の生徒の思考を知るために調査を行った。その結果、それぞれの難しさは生徒が問題を解く際の思考の過程の中に見いだせると考えられる。しかし、生徒の思考の中には、どちらの難しさにも依存する事柄もあり、その境界線をはっきりと引くことは難しいといえる。

調査結果から挙げられた問題点は、生徒が証明をする際に、問題で与えられていない事柄を用いて証明する場合があり、生徒はなぜ用いてはならないのかを理解していないことである。また、合同条件を覚えていても、証明する際、どのように活用すればよいのかということが分かっていない生徒も得られた。生徒がどれだけ問題を理解し、どのように推論をしているかによって生徒の解決の様相は異なるとともに、その指導の仕方は異ならなければならないと思われる。教師は生徒が書いた証明からその思考をすべて知ることは難しいが、生徒がどのように問題をとらえ直し、また解決を進めようとしているかをとらえ、生徒の思考に的確に対応した指導方法を考えていくことが必要であると思われる。

主要引用・参考文献

R.R.スケンプ，平林一栄（監訳）.(1992). 新しい学習理論にもとづく算数教育－小学校の数学－. 東洋館出版社

小高俊夫.(1980).数学学習の基本概念（中学校 編）－数学的シェーマの形成－.東洋館出版社

中西知真紀，ほか５名.図形における論証指導について（第８次報告）－その２，証明の難しさの分析－.日本数学教育学会誌

伊藤説朗.(1993).数学教育における構成的方法に関する研究（上）.明治図書株式会社

杉山吉茂.(1986).公理的方法に基づく算数・数学の学習指導. 東洋館出版