算数・数学的活動と評価

溝口達也

教育地域科学部（数学教育学研究室）

1．　はじめに

平成10年に告示された小学校，中学校及び高等学校の学習指導要領において，算数科，あるいは数学科の目標のいずれにも，「算数的活動」あるいは「数学的活動」の語が登場する。従来からも，数学的活動については様々なアプローチで議論がされてきたところであるし，実践においても子どもの活動を重視してきたことは言うまでもない。にもかかわらず，敢えて文言として登場してきた理由はどこにあるのか。あるいは，我々は，それをどのように受け止めるべきであるか。

上記のように，これまでにも算数的活動，あるいは数学的活動と呼び得る活動は，教授学習場面において様々に行われてきているであろうし，その意味で，「何か，子どもに新しいことを期待するのか」，すなわち，「新しい『算数的活動』，あるいは『数学的活動』を子どもに期待するのか」という疑問が生じる。もちろん，これまでの算数・数学学習の中でそのような活動が十分に行われていなかったならば，その方向で改善の余地があるであろう。しかし，そのような状況だけが問題であるとは思われない。

こうした捉え方は，言わば，子どもの算数的活動，あるいは数学的活動をいかに充実したものにしていくか，という考え方を基本にしているといえる。一方，そうした算数・数学学習を支援する教師の側から，算数・数学的活動を捉える必要はないだろうか，また，あるとすれば，どのような仕方でこれを受け止めていく必要があるのであろうか。

本稿は，この算数・数学的活動を，評価の手段として位置づけることの可能性を探ることを目的とする。

2．　算数・数学的活動

上記の通り，算数・数学科に関わる新学習指導要領の最も注目される変化の１つとして，「算数的活動」あるいは「数学的活動」の用語が目標の中に加わったことが挙げられる。実際には，小学校算数科，中学校数学科の目標及び高等学校数学科の目標は，次のように述べらる。

小学校算数科の目標：

> 数量や図形についての算数的活動を通して，基礎的な知識と技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに，活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活に生かそうとする態度を育てる。

中学校数学科の目標：

> 数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。

高等学校数学科の目標：

> 数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる。

この「算数的活動」あるいは「数学的活動」について，上の各学校段階の目標を読んで，１つの疑問が生じる。それは，冒頭で述べた通り，『何か，子どもに新しいことを期待するのだろうか』，つまり，「算数的活動」あるいは「数学的活動」を新しく児童・生徒にさせるのか，ということである。

おそらく，子どもは，これまでにも「算数的活動」あるいは「数学的活動」と呼び得るものをしてきていると思われる。それゆえ，少なくとも教師のアプローチが変わらないかぎり，子どもの行動が変わることは期待され得ない。

では，教師のアプローチについて，何を，どのように変えればよいのだろうか。

このように考えるとき，なぜ，「算数的活動」あるいは「数学的活動」が，今回の改訂で，しかも，小・中・高で一斉に取り上げられたのであろうか。

１つの観点として，「算数的活動」あるいは「数学的活動」を“目的”と見るか，それとも“手段”あるいは“プロセス”と見るか，という見方ができる。

従来までも，「数学的な見方・考え方」が，小・中・高を通じて，算数・数学教育の目標として掲げられてきた。「算数的活動」あるいは「数学的活動」は，「数学的な見方・考え方」に取って代わるものであるのか，つまり，算数・数学教育の“目的”として，「算数的活動」あるいは「数学的活動」は位置づくのか。

このことについて，小学校の低学年においては，そのようなケースもあり得ると考えられる。つまり，子どもの発達の特性から考えて，「数学的な見方・考え方」よりも「算数的活動」そのものを“目的”と位置づける方が適切な場合もある。しかし，学年が進むにつれて，必ずしもそうではないと考えられる。

少なくとも，「算数的活動」あるいは「数学的活動」の名の下に，子どもが，何か体験的であったり，作業的であったりといった活動をしていればよいということは決してないと思われる。そうであれば，算数・数学教育においては，依然として「数学的な見方・考え方」が，その“目的”あるいは“目標”として置かれるわけである。

再度，なぜ，今，あるいは，今更「算数的活動」あるいは「数学的活動」か，ということが疑問となる。

「算数的活動」あるいは「数学的活動」のもう１つの捉え方の可能性として，“手段”あるいは“プロセス”としての見方が挙げられる。

“手段”というとき，いったい，何の手段であるのか。言うまでもなく，“目的”あるいは“目標”のための“手段”である。つまり，「数学的な見方・考え方」のための「算数的活動」あるいは「数学的活動」であるはずである。

では，子どもが，「数学的な見方・考え方」の実現のために，これまでと違った「算数的活動」あるいは「数学的活動」が要請されることになるのか。そうではなく，筆者は，むしろ，要請を受けるのは，教師の側であると考える。以下では，このことについて，「評価」の問題との関わりから議論したい。

3．評価

評価，あるいは評価のプロセス，とは何か。あるいは，なにをすることか。

評価とは，データ（事実，証拠）を収集し，それを解釈し，そこから，妥当な推論，あるいは命題を作り上げるプロセスであるといえる(NCTM, 1995，溝口, 1996)。

これまで，評価というと，特に学年段階が上の方に上がっていくに従って，ペーパーテストを主とした方法によって，点数という形でデータを記述し，それを評定という形の命題に仕上げていた，ということができると思われる。

様々な制約があることは十分承知したうえで，それでもなお，この現状に問題がないということはできない。

一方で，評価は，“目的”や“目標”と対をなすもの，セットとして考えられるべきものであるということができる。目標に据えておらず，適切な学習指導もないのに，評価だけが存在することはない。では，その目標とは何か。言うまでもなく，先述の，「数学的な見方・考え方」がそれである。しかし，従来，少なくとも，上述のような評価，あるいは評価のプロセスにのっとった評価が十分に行われていただろうか。すなわち，「数学的な見方・考え方」は，文字通り“見方”，“考え方”であって，それは，本来，目に見えないもの，観察不可能なものである。評価のプロセスの定義は，このことを指摘したものであるといってよい。すなわち，我々が評価しようとする事柄は，本来観察不可能なものである。その観察不可能なものに対する命題を作り上げるのであるから，その証拠となる観察可能なものに拠る必要がある。

では，そのような観察可能なものとして何が挙げられるのか。筆者は，ここに「算数的活動」あるいは「数学的活動」を位置づけたいと考える。すなわち，我々は，子どもの「数学的な見方・考え方」の達成を評価するにあたって，それは，本来観察不可能なものであり，これについての推論あるいは命題を作り上げるにあたって，観察可能な「算数的活動」あるいは「数学的活動」を捉える必要がある，ということである。

従って，これは，子どもに対して新しく要請されることではなく，教師が“目的”や“目標”

に対して，いかに子どもの活動を「算数的活動」あるいは「数学的活動」として捉え得るか，あるいは，教授・学習過程において「算数的活動」あるいは「数学的活動」をいかに仕組むことができるか，といった教師に対する要請であると考えるわけである。

従って，よく言われるように，作業や体験をさせることが，子どもに「算数的活動」あるいは「数学的活動」をさせること，といった見解・解釈とは，本稿は，立場を異とする。

ここで問題となるのは，では，観察可能なものだけが「算数的活動」あるいは「数学的活動」であるのか，ということである。Fischbein（1994）は，我々が，数学を見るにあたって，次のような２つの視点を必要とする，という。すなわち，

1）論文や高いレベルの教科書に見られるような，形式的，演繹的に厳密な知識体系としての数学

2）人間の活動としての数学

というものである。我々が，今問題にしようとしている「算数的活動」あるいは「数学的活動」は，まさに，この後者の視点に立ったものであるといえる。そうした，人間の活動である「算数的活動」あるいは「数学的活動」は，広義に見れば，必ずしも，上述のように観察可能なものばかりではない。実際，広義の数学的活動について，根本（1999）では，

ア）計算処理や図形の具体的操作など客観的に観察が可能な活動（外的行為）

イ）類推したり，振り返って考えたりするなどの内面的な活動（内的行為）

といった分類がなされる。これは，文字通り，内面的な活動と客観的に観察可能な活動を述べているわけであるが，算数・数学においては，当然のことながら，思考活動というのは重要な要素である。Fischbein も，論文の中で，そうした人間の活動としての基本的要素として，形式的，アルゴリズム的，及び直観的要素の３つをあげ，これらの相互作用を議論している。

ただ，こうしたことと，上述のことが決して矛盾するものであるというものではない。これらは，数学的活動というものを広義に捉えたときの考え方であって，我々，当然こうしたことを踏まえておく必要がある。

しかし，今問題として考えようとしているのは，実際の学習指導あるいは評価の中での「算数的活動」あるいは「数学的活動」のありかたである。つまり，確かに，広義の意味で数学的活動には観察不可能なものも含まれるが，それが，子どもの活動，あるいは行為としてどのように顕在化してくるのか，また我々はそれらが学習指導の各場面で，どのように位置づいてくるのか，ということを見据えようと，主張するのである。

従って，次に，何を「算数的活動」あるいは「数学的活動」として捉えればよいのか，という問題が生じる。

4．算数・数学的活動の場

かつて，「数学的な見方・考え方」についても，「それはどんなことか，どんなものであるか」ということで，“帰納的な考え”や“類推的な考え”等々の様々な分類がなされた。

このような分類をして，何かよいことがあるのであれば，ぜひやるべきであろうが，実際，これはあまり生産的ではない。つまり，それは，「数学的な見方・考え方」の本質を捉えていない，といえる。

「算数的活動」あるいは「数学的活動」についても同様のことがいえる。

小学校の学習指導要領解説では，「算数的活動」の分類がなされているが，果たして，これらがどの程度生産的なものであるかは疑問である。少なくとも，当然のことながら，子どもが何かを体験したり，何気なく作業をしたりすることで，算数・数学の学習としてよいわけがないことについて，誤解されないことを切望する。

どんな「算数的活動」あるいは「数学的活動」を，ということを分類するのではなく，むしろ，どんな場面で「算数的活動」あるいは「数学的活動」を展開するかを議論した方が，筆者にはより生産的であるように思われる。

杉山（1999）によれば，これまでの数学教育では，「わかる」「できる」を重視した教育が行われてきた。もちろんこれはこれで，重要なことであることは間違いない。ただ，現状は，本当に「理解」を目指したものであるかというと，正直なところ，必ずしもそうではないようにも見受けられる。言わば，より多くの情報を，必要なときに確実に引き出せる，といったことを目指していたかもしれない。これに対して，杉山（1999）は，これからの数学教育は，この２つに加えて，「みつける」「つくる」そして「つかう」ことを目指した数学教育が望まれることを主張する。

筆者は，こうした５つの場面を，教授・学習過程に適切に組み入れることで，それらの場面，場面で期待される「算数的活動」あるいは「数学的活動」を位置づけるようにしたい，と考える。そうすることで，初めて，子どもが，体験したり，実際に作業をしたりすることに意味が生じてくることになる。逆に，そのような位置づけなしには，なんら価値のないものになってしまいかねない。

すなわち，実現を意図した「数学的な見方・考え方」について，そのような見方・考え方は，所与の問題場面，あるいはその解決において，どのように顕在化することになるのか，そういうことを，教師は，学習指導にあたって検討することが要請されると考えるわけである，そして，そのような観察可能な活動と考え方とを結びつける，言わばモデルを形成し，これに基づいて評価活動が実施される必要があるだろうと，考えるわけである。

このとき，「評価」は，これまでの評価観とは大きく転換される必要がある。従来は，多くの場合，言わば，“結果の評価”であって，結果の判別が主たる目的であったかもしれない。しかし，「評価」は，そのように捉えられるべきものではない。

例えば，NCTM の「評価のスタンダード」(NCTM, 1995) では，「評価」の最大の目的は，子どもの数学的パワー（mathematical power）を発達させることである，と述べられる。そして，この目的を実現するために，評価のプロセスがあるわけであるが，「算数的活動」あるいは「数学的活動」をそうした評価のプロセスの中に位置づけるのであれば，これまでの“結果の評価”から，“過程の評価”への転換を可能にするのではないかと考える。従って，「評価」は，学習指導の最後だけに位置づけられるものではなく，学習指導過程の中で，随時行われるべきものとなる。

評価の目的としては，大きく４つが指摘される。

① 学習目標に対する子どもの進歩あるいは成長を把握すること
② 指導上の意思決定を行うこと
③ 特定の段階ごとに子どもの達成を価値評価すること
④ 指導のプログラムを評価すること

そのために，評価は，子どもの数学的知識や数学を用いる能力，数学に対する態度についての証拠を集める過程，及び多様な目的のためにそのような証拠から何らかの推論を導く過程であり，そのような推論（命題）の価値を決定する過程である，とされる。

従って，評価のプロセスとしては，およそ次のような４つの相が考えられる。すなわち，《評価の計画》，《証拠の収集》，《証拠の解釈》，《結果の利用》である。これらはある種の順序を提供するものであるが，必ずしも系列として実行されるわけではなく，相互に関連しあうものであるといえる。

《評価の計画》の相は，どんな場面で，どんな事柄を，どんな方法で評価し，そしてその結果をどのように利用するかといった４つの問題についての計画をすることが中心的な作業となる。例えば，小学校第５学年において，異分母分数の加減について学習する前に，同値分数についての学習が位置づけらる。このとき，テープを半分に折ってみたり，あるいはうまく３等分に折ってみたり，またはそれらをさらに半分に折るといった活動は，それ自体が学習の目標ではなく，そのような活動を経験することを通じて，同値分数についての概念を操作的に獲得させたいという意図がある。言い換えれば，そのような活動を通じてこそ，同値分数について操作的な概念を獲得し得る，と考えるわけである。従って，このような算数的活動を学習のどの場面に位置づけるかは自ずと決定してこよう。すなわち，評価の計画を立てることは，そのまま学習指導の計画を立てることにもつながるわけである。学習指導における教師の手だては，一連の評価プロセスの連続であるといっても過言ではない。

《証拠の収集》の相では，《評価の計画》で設定した事柄についての様々な情報を証拠として収集することが中心的な作業となる。このとき，教師は，子どもの活動を観察するための何らかの枠組みをもっていることも必要とされるかもしれない。すなわち，観察は，何らかの意味で理論負荷的 (Hanson, 1986) であって，漠然と観察するのではなく，教師自らが何を見ようとしているのかを明らかにしておくことも大事な作業であるように思われる。もちろん，実際の授業においては，思いもよらない子どもの活動が観察されることもある。それらを排除しようというのではなく，むしろ，そのときには，枠組みの修正を積極的に行うよう努めることも肝要であろう。いずれにしても，観察された情

報から，後の解釈の過程を確実なものとするためにもある程度の予測をすることが必要であろう。従来までも，個人差に応じた指導等のスタイルで行われてきた実践がこれに相当するものである。

同値分数の例の場合，テープを折るという活動がどのように数学的概念へと移行するのかをとらえる必要がある。そのためには，実際にテープを折る活動の中で，子どもがどのように実行しているかを注意深く観察することが要請されるであろう。例えば，ある子は，第１のテープを半分に折り，第２のテープは３等分に折り，第３のテープを半分に折る折り方を繰り返して４等分を作り，そして第４のテープは３等分に折り重ねたものを半分に折った。最後に４つのテープを並べて，それぞれの折れ線の位置を比較して，いくつかの分数が等しいことを理解したとする。もし，この子どもが実行した活動がまさに教師の意図した，すなわち，教師の観察しようとする枠組みの代表的なものであるならば，子どもの一連の活動は，評価のための証拠として収集されるべきものとなる。また，このことは，活動をうまく実行できなかった，あるいは活動から，教師の意図する数学的概念への移行がうまくなされなかった子どもに対しての手だてともなり得るであろう。さらに，ある子は，１つのテープを折るプロセスの中に，同値分数を発見することで，最後に比較するという活動を経ずとも教師の意図する数学的概念が理解できたとする。そのような活動が観察されるのであれば，次に先の比較をしていた子どもには，自分が折ってきたプロセスを反省的に思考させるよう促すこともより発展的な手だてとなるかと思われる。

《証拠の解釈》の相は，収集された情報（証拠）から，妥当な推論（命題）を作り上げることが中心的な作業となる。従来，収集された情報からは，子どもが，できた／できない，あるいは得点分布といった形式での結果が作成されてきたきらいがある。逆に言えば，そうした結果を作成するための情報のみが収集されてきたともいえる。こうした形式の最大の問題は，評価結果と学習指導が統合されていないことにある。この相で目指そうとする「妥当な推論」とは，まさにそうした問題を克服しようとする点にこそあるといえる。すなわち，子どもの活動が，教師の意図と照らし合わせてどうであったか，また，それによって，子どもは学習を成功裡に達成し得たか，そのための教師の指導は適切かつ十分であったか，等について収集した情報を教師の専門的判断の基に検討し，それぞれについての命題（記述）を作り上げていくというものである。そして，そこから次の学習指導へと連続するよう，必要に応じて，学習（指導）計画を修正したり，目標の再設定を行うわけである。

テープを折るという活動は，子どもが同値分数について操作的に理解することを意図したものであった。活動を経ることで，子どもは，どのような理解に達したのか。場合によっては，特定の同値分数については知ることはできたが，実際にテープを折っていない分数については，まだ理解し得ていないかもしれない。そのような情報は，授業において観察され得たか。あるいは，子どもの側から，操作を数学的に形式化しようとする試みはなされなかったか。もし，そのような要求が起こらなかったとすれば，指導上問題はなかったか，といったような点についての，教師の専門的判断が要請されることになる。さらに，そのような証拠を基にして，次時の約分・通分の学習をどのように計画するか，といった問題が浮上することになろうかと思われる。

以上述べたように，評価結果は，その時点時点で適宜利用されるものである。特に，子どもの達成を価値評価する目的についていえば，評価結果は，適切に子どもに返してあげる必要がある。評価は，開かれたプロセスである必要がある。すなわち，子どもは，学習を評価される以前に，どんなことを知らなければならないのか，そのような知識をどのように示すことが期待されているのか，評価がどのような仕方で進められるのか，といったことについて知らされるべきである。こうしたことは，《証拠の解釈》の相で作られた子どもの学習活動についての妥当な推論を，子ども自身に示してあげるプロセスの繰り返しから，徐々に子どもは身に付けていくことが期待され，また，次第に子ども自身が自己評価を行えるようになることが期待される (矢部, 1998)。また，すでに述べたように，評価結果は学習指導上の意思決定を作用するものでもある。その際，特に留意されるべきことは，子どものわずかな進歩ばかりに捕らわれて計画を設定することから，指導計画における比較的長期的な目標への，子どものあらゆる進歩の証拠を利用することを心がけたい，というこ

とである。従って，教師による継続的な評価記録は，不可欠なものであろう。

テープを折る活動から同値分数についての操作的理解を達成し得た子どもに次に期待することとして，前述の通り，約分・通分といった数学的形式化のみならず，さらに数直線の積極的な活用を期待したい。数直線上に，同値な分数をみることができるようになることで，加法，減法だけでなく，乗法，除法についても演算の仕組みを理解したり，あるいは新しい演算の仕方を自ら構成していく有用な道具として用いていくことが期待される。換言すれば，算数的活動の媒体自体を進化させていくわけである。そのように算数的活動あるいは数学的活動をとらえることで，従来の実践と研究の蓄積を生かしつつ，新しい学習指導と評価のあり方を模索することができると考えられる。

5. コミュニケーション

以上のように考えてみるとき，またさらに，もう１つの問題が生じる。それは，「算数的活動」あるいは「数学的活動」は，個人的であるか，ということである。

「活動」という表現から，時として，極めて個人的な印象を受けがちである。たしかに，そうした個人的な「算数的活動」あるいは「数学的活動」が基本に据えられることは言うまでもない。しかし，それだけで十分であるのか，ということである。もしそうであれば，「算数的活動」あるいは「数学的活動」を実現するにあたって，日々の授業において，個々別々の学習が展開され，それに終始すればよいことになる。しかし，実際にはそのようには考えない。特に，問題解決活動において，自力解決に取り組んだ後，“ 練り上げ ”と呼ばれる集団討議の時間がとられる。これは，「コミュニケーション」という視点で捉えることができると考えられるが，「コミュニケーション」は，それ自体が目的なのではなく，これが極めて数学の本性に関わるものであるからこそ重要であると考えるわけである。

数学教育の中で，コミュニケーションが問題とされるとき，およそ２つの仕方で取り上げられるとみることができる。その１つは，授業を設計したり分析したりする手段としてコミュニケーションを問題とすることである。これは，当然のことであるが，これまでコミュニケーションが行われていなかった，とするのではなく，コミュニケーションという目で授業を見直したとき，これまで見えなかったことが見えてくる，ということをねらったものである。もう１つは，子どもにコミュニケーション能力，特に，数学的コミュニケーション能力と呼び得るような力をつけてあげたい，というものである。前者は，方法としてのコミュニケーション，後者は目的としてのコミュニケーション，ということができるかと思われる。実際には，両者は区別されるものではなく，子どもにコミュニケーション能力，特に，数学的コミュニケーション能力をつけたいと思えば，日ごろの授業が，まさに数学的コミュニケーションの場となっている必要があり，またそうしたコミュニケーションの目で教材も見直す必要が出てくる。

ところで，コミュニケーションとはどんなものであるのか。簡単に，コミュニケーションとはこうである，また数学的コミュニケーションとはこうである，と定義を述べられればよいのだが，こうした努力はなされているものの，その位置をあたえられたものは実際のところまだなく，むしろ，こうした定義そのものを不毛であるとする意見さえある。というのは，そうした努力によって提出された定義が，多くの場合，あまり操作的な定義になっておらず，単に現象を解説したものに過ぎない様なものが多いことが原因の一つとしてあげられる。そこで，コミュニケーションを構成するものは何であろうか，という議論が展開されることとなる。より詳細なものを求めようとすれば，いくらでも考えられるかもしれないが，ここでは，基本的なモデルを考えてみたい。

コミュニケーションと言ったとき，いろいろな形態が考えられるが，大きくわけて，通常問題とするようなコミュニケーション（インター・パーソナル・コミュニケーション）の他に，イントラ・パーソナル・コミュニケーション（個人内コミュニケーション），マス・コミュニケーションがあげられる。ここでは，それらの詳細については省略するが，数学教育でコミュニケーションを問題とするとき，こうしたものは，あまり本質的でないと考えられる。コミュニケーション論で，一般に認められるモデルとして，コミュニケーションの《SMR モデル》と呼ばれるものがある。すなわち，送り手（**sender**），メッセージ（**message**），受け手（**receiver**）の３者からなるモデルがそれである。(江森, 1991, 1992)

発信者（送り手）—— メッセージ —— 受信者（受け手）
sender　message　receiver

コミュニケーションのSMRモデル

このモデルにおいて重要なことは，「メッセージに意味はない」ということであり，コミュニケーション論で一般に前提とされることである。この前提は，大きく２つの理由によるが，その一つは，まず，メッセージを観察可能な物理的対象とする方が，理論を展開するうえで都合がよい，というものである。もう一つは，実際に，メッセージに意味が含まれるとすると，送り手がメッセージに込める意味は，確実に受け手によって受け取られる訳で，いつ，いかなるコミュニケーションを行なおうとも，確実なコミュニケーションがとれることとなる。しかし，実際はそうではなく，メッセージに意味がないから，換言すれば，送り手は，何らかの伝えようとする意味をメッセージに込めて，受け手は，そのメッセージを介して，送り手が伝えようとしている意味を解釈するわけである。このとき，それがうまくいけば，コミュニケーションが成立し，ことさら問題が起きることはないが，多くの場合，うまくいかない，すなわち，コミュニケーション・ギャップが生じるわけである。これが，「メッセージに意味がない」とする理由である。

では，数学的コミュニケーションとは，実際，どんなものであるか。単に，メッセージとして，数学の用語，記号などを用いれば，数学的コミュニケーションと言えるか。もちろん，これも，重要な側面であることは事実であろう。しかし，それだけのことであれば，それほど今日問題とされるようなことはないであろう。むしろ，数学的コミュニケーションについて語るならば，上記のメッセージに関わって，（広義の）知識，あるいは，数学的知識の社会性，そして，数学的知識の構成の社会性こそが，真に議論されなければならない問題であると考える。なぜならば，それが，数学の本性にかかわる問題だからである。(Balacheff, 1990，溝口, 1995)

数学という学問の歴史を見てみると，その初めから，コミュニケーションということが視野に置かれていたことがわかる。どこからを数学の歴史のスタートとするかは議論の別れるところかとも思われるが，およそ認められるものとして，ユークリッドの「原論」がある。この「原論」に関して，２つのことに注目してみたい。１つは，この原論は，一見すると，幾何学について書かれているように思われるが，実際には，数論がそこでは展開されており，相当に高度な比例論や，数，特に有理数に関する議論が行われている。

では，なぜ，こんな一見してわかりにくい，少なくとも我々にはそう思えるような，記述がされているのか。これは，当時の数学的知識，アイデア等を表現するための手段の，現在の我々の目から見ての不備によるものである。我々は，数学というと，数字を用いて数を表現したり，数の関係を式で表現したりするが，そこで用いられている記号，表記法は，もっと後の時代に作られたもので，当時は，そんなものはない。だから，当時の人々のもつ表現手段を駆使して，その知識を記述したわけである。このことは，知識が社会的要請を受ける，ということを示していると見ることができる。いくら，自分にとって都合のよい表現であっても，自分にしかわからないのではまずい。より広い範囲で共有できる必要があるわけである。

２つ目は，この「原論」が，単に知識を記述することを目的としたのではなく，それらを体系的に構成しようとしたということである。

現在，数学では，当たり前のように，定義に基づき，定理を証明する，という，演繹のスタイルがとられるが，このようなやり方は，この原論で初めてとられたものである。そこでは，どこにも共通する前提として，「公理」（あるいは「公準」）をおき，それぞれの箇所で必要とされる約束として「定義」を据えて，これらに基づいて，すなわち，あらかじめ認めたものを基にして，「定理」を証明する，というスタイルがとられる。そうすることで，少なくとも，論理的に，非の打ち所のないように組み立てることができたわけである。我々にとっては，非常に当たり前のこの方法，すなわち「公理的方法」も，当時は画期的なことであった，といえる。以後，この「公理的方法」が，すべての学問のモデルとして受け入れられていくが，では，なぜ，こうした「公理的方法」をとる必要があったのか。これは，知識の社会的構成というものを目指したからであると見ることもできる。自分のお気に入りの順に，あるいは，都合のよいように知識を並べても，自分にはよいかもしれないが，一度，《相手》ということを想定した場合，そこには，自分の主張を相手のそれと対

決させていかなければならない，という構図が生じる。ユークリッドは，こうした立場に立って，では，どうしたら，自分の主張が相手に受け入れてもらえるか，と考え，この「公理的方法」にたどり着いた，と見ることもできる（そこには，大きく「無限」という問題が介在してくるのだが）。従って，その後，数学に限らず，すべての学問的知識というものは，常に社会的に構成される／あるいは，そのようなものだけが生き残っていくこととなる。

以上のことを，例えば，中学校の数学の内容で考えてみよう。「文字式」に関して，学習指導要領では「文字を用いることの意義を理解する」と述べてある。このことについて，現学習指導要領に関する指導書においては，次のように述べられている。「文字を用いるのは，それによって，数量等の関係や法則が，一般的にかつ簡潔に式に表現することができ，しかも，文字式に表現すれば，その形式的な処理により，容易に結果を得ることができるからである。」では，何のために，「一般的にかつ簡潔に式に表現する」必要があるのか。文字を用いれば，個々の数の特殊性を越えた一般性を表現することは確かである。しかし，それは，そのように見ることで初めてそうなるわけである。そのように見ること，すなわち，一般的なものとして見ることは，なぜ必要なのか。先述のユークリッド「原論」に関する議論に指摘したように，自分一人の中だけの話であれば，殊さらに一般性を問題とする必要はなく，かえって，個々の特殊なものを知ることの方が，便利であることさえある。それでもなお，一般性が要請されるのは，まさに，「相手」の存在があるからである。相手がいる以上，知識は，共有されるものとして構成されなくてはならない。そのために，一般性を必要とされる。例えば，中学校３年生の教科書に載せられている「偶数を２から順に並べ，となりあう２数の積に１を足すと，どんな数になるでしょう」という問題に対して，実際に，個々の数について確認した，という説明もあるかもしれない。しかし，偶数の列は，無限に続くわけで，本当に，どこまでいってもそうか，ということについて，もし個人の中だけの問題であれば，「少なくとも，自分が確認できる範囲で間違いなければ，不都合は生じない」と思っても特に差し支えないかもしれない。しかし，「相手」に，このことの真であることを説明しようとするときに，初めて一般性が要請され，そうした一般性を相手に伝達するために，文字というものを必要とする。すなわち，知識を社会的に構成しているわけである。

知識を社会的に構成する場合は，必然的に知識そのものも社会的なものとなる。注意しなければならないのは，知識の社会性だけを追及し，その構成の社会性を追及しないときである。以前，筆者が実際に観察した授業において (Mizoguchi, 1993)，中学校３年生の平方根の場面で「面積が 50 ㎠の正方形の１辺の長さ」を求めるといった課題に対して，ある生徒は，一生懸命電卓をたたいて，最終的に，7.0711 をもって求める数だとした。この生徒は，きりがなく続く，ということはおよそ承知しているのだが，四捨五入をして，この程度で十分だとする。授業では，その後教師によって，課題において求める数のようなものを根号 √ を用いて表記するということが知らされ，生徒はこれを受け入れるわけである。授業後にこの生徒にインタビューしてみると，それでも，7.0711 でよいが，時と場合によって根号 √ を使って表すという。なぜかといえば，そうすることが，この生徒にとって，今後学習を進めていくうえで都合がよいからである。ある意味で，教師に示されることで，この根号 √ という知識は，社会的なものとなっている。しかし，この知識は，社会的に構成されたものとはいえない。そこには，他者との対決という構図は存在しない。数学的知識は，自己のアイデアなどを相手と議論し，それによってお互いが共有できるものとして確立されるものであるといえると思われる。授業の中でも，そうしたコミュニケーションの側面に光を当て直すことで，授業の改善，あるいは，教材の見直し，といったことが進められることを期待したい。

6．具体的な検討課題

以上述べてきたことは，例えば，我々が日々実践する授業の学習指導案の中に，体現されるのではないかと考えられる。実際，学習指導及び評価の中身を変えていこうと思えば，それを記述しようとする学習指導案の形式についても，場合によっては再考の必要が出てくるかもしれない。例えば，次のような点は，そうした再考の対象として提案されるものであろう。

・従来の指導案では，自力解決の分類として，『手の付かない子』なども含めることも見られたが，「手の付かない」ことは活動で

はなく，それ以前の話であるから，これは，「算数的活動」あるいは「数学的活動」としては位置づかない。そのような子どもが何らかの活動に取り組めるような支援をした上で期待される活動が記述される必要がある。

・従来の指導案は，基本的に時系列に沿った形式がとられていたが，「算数的活動」あるいは「数学的活動」を記述しようとする場合に，必ずしも時系列に捕らわれるのではなく，むしろ，各々の活動がどのように結びつき，発展していくのかを示すほうが生産的ではないか。

・集団討議の中での「算数的活動」あるいは「数学的活動」をどのように位置づけていくのか。また，それらは，どのような様相を呈することが期待されるか，等。

現在，こうした課題について，本学附属小・中学校との共同研究を，文部省研究開発学校指定を受け，推進中である。

7．終わりに

本稿では，算数・数学的活動を，評価の手段として位置づけることの可能性を探ることが目的であった。本稿では，子どもの数学的な見方・考え方を評価するにあたって，評価のプロセスにおける証拠として，算数・数学的活動を位置づけた。このことは，ともすると，算数・数学的活動が子どもに対する新たな要請であると捉えられがちであるのにたいして，明確に教師に対する要請であることを指摘するものである。

このような主張は，しかしながら，他の算数・数学的活動についての見解を否定するものではない。算数・数学的活動に対する一つのアプローチの仕方を示したものである。

本稿で主張された事柄を実際の学習指導の改善に結びつけるためには，さらに詳細な検討が必要とされる。上記の本学附属小・中学校との共同研究と併せて，多様な実践的試みが吟味される必要がある。

参考文献

Balacheff, N. (1990). Towards a ***problèmatique*** for research on mathematics teaching. ***Journal for Research in Mathematics Education, vol.2***, no.4, pp.258-272.

江森英世. (1991). 図表現の「フィルター効果」に関する一考察. 筑波数学教育研究, 第 10 号, pp.13-23.

江森英世. (1992). コミュニケーションの分析モデルー数学学習場面のコミュニケーションに焦点を当ててー. 筑波数学教育研究, 第 11 号 A, pp.53-64.

Fischbein, E. (1994). The Interaction between the formal, the algorithms, and the intuitive components in a mathematical activity. Biehler, et al.(eds.), ***Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline***. Kluwer, pp.231-245.

Hanson, N. R. (村上陽一郎 訳). (1986). 科学的発見のパターン. 講談社.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). ***Assessment Standards for School Mathematics***. Reston: VA.

Mizoguchi, T. (1993). On shifting conviction in conceptual evolution. ***Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol.1***, pp.260-267.

溝口達也. (1995). 数学学習における認識論的障害の克服の意義ー子どもの認識論的障害との関わり方に焦点を当ててー. 筑波大学教育学系論集, 第 20 巻, 第 1 号, pp.37-52.

溝口達也. (1996). NCTM による「評価のスタンダード」. 教育科学 数学教育, No.461 ('96/4), pp.111-114.

根本 博. (1999). 数学的活動と反省的経験. 東洋館出版社.

杉山吉茂. (1999). これからの数学教育・数学教育研究のあり方. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会 (編), 新しい算数・数学教育の実践をめざして. 東洋館出版社.

矢部敏昭. (1998). 学校数学における自己評価能力の形成に関する研究ー自己評価を構成する一連の「自己評価活動」の枠組みー. 日本数学教育学会誌 算数教育, 第 80 巻, 第 8 号, pp.2-9.