

小学校における 計算指導のあり方についての一考察 —水道方式に焦点をあてて—

河村 邦行

指導教官：矢部敏昭・溝口達也

I. 研究の目的と方法

私が「水道方式」という言葉をはじめて聞いたのは3年のときの数学の講義のときであり、それまでは「水道方式などまったく聞いたことがなく、ましてやそれが数学教育に関するものとは想像さえできなかった。その講義の中では、『遠山啓氏が代表となり‘数学教育協議会（数教協）’という民間研究団体を設立し、その中で、今までの数学教育の考え方、教授の仕方、根本原理などとはまったく異なる理論を展開していたのが「水道方式」である。主な特徴としては、筆算に関しては独特の理論をもっており、指導の際にはタイルを非常によく用いる。』というようなことを聞いたのである。しかし、いったい「水道方式」とは当時の数学教育の考え方、方法とはどのように違うのであろうか、とそのときから気になっていた。そこで、今回卒業論文を書くにあたって、今まで名前さえも知らなかった「水道方式」について研究してみることにした。本論文では「水道方式」の特徴、そして計算指導、特に整数の筆算に焦点をあてて調べている。その方法としては、遠山啓編「算数に強くなる水道方式入門」（国土社）、遠山啓、銀林浩共著「水道方式による計算体系」（明治図書）をもとにした文献研究である。その際、「水道方式」の是非を問うのではなく、客観的な立場から主唱者、及びその批判者の主張を取り上げ、それらを考察していくものである。

II. 本論文の構成

1. 水道方式の概観

1.1 水道方式の特徴

- 1.1.1 タイルを使うこと
- 1.1.2 「一般から特殊へ」ということ
- 1.1.3 指導の系統

1.2 水道方式の基本的な三つの原理

- 1.2.1 基本的な三つの原理
- 1.2.2 三つの原理の分析

—加法を取り上げて—

2. 整数とその計算

—その1・加法と減法について—

2.1 整数の概念

- 2.1.1 整数と分離量
- 2.1.2 整数の概念はどのようにして生まれるか
- 2.1.3 位取りと0
- 2.1.4 位取りと記数法の指導タイル
- 2.1.5 整数の順序

2.2 加減法の計算

- 2.2.1 計算の原理（素過程について）
- 2.2.2 複合過程をどのようにして展開していくか（水源地について）
- 2.2.3 型合けについて
- 2.2.4 $(三位数) + (三位数)$
- 2.2.5 減法について

3. 整数とその計算

—その2・乗法と除法について—

3.1 乗法の計算

- 3.1.1 計算の原理
- 3.1.2 計算の筋道

3.2 除法の計算

- 3.2.1 計算の原理
- 3.2.2 $(二位数) \div (一位数)$
- 3.2.3 $(三位数) \div (一位数)$
- 3.2.4 $\div (二位数)$ の指導

4. 水道方式に対する諸批判について

—日本数学教育会誌をもとに—

- 4.1 素過程についての議論
- 4.2 素過程の「一般から特殊」についての議論
- 4.3 除法の「一般から特殊」についての議論
- 4.4 水道方式の原理についての伊藤氏の主張

III. 研究の内容

1. 水道方式の概観

1.1 水道方式の特徴

水道方式の特徴としては、次の3点が挙げられる。

- ・タイルを使うということ
- ・「一般から特殊へ」という原則にもとづいているということ
- ・指導の系統

第一の特徴はタイルを使う点である。『算数の中で難しいものの一つには位取りの原理があり、たとえば234という数字は百が2、十が3、一が4だけある、ということが子どもにはなかなか難しい』と、遠山啓氏はいつている。これを子どもにわかるよう説明するために、いろいろな工夫がなされてきた。

たとえば貨幣を使う方法である。また、計算棒を使うという方法もある。しかし、これらにはどちらにも欠陥がある、と遠山氏はいつており、これらの欠陥を直すために遠山氏が考えたものがタイルを使うという方法である。

もう一つの特徴は、「一般から特殊へ」という原則によって練習問題を配列したことである。

3けたの加法を例にとると、

$$\begin{array}{r} 234 \\ +765 \\ \hline \end{array}$$
 という型を先に練習して、

$$\begin{array}{r} 234 \\ +65 \\ \hline \end{array}$$
 のような型くずれは後まわしにしたことである。これまでは逆、「特殊から一般へ」にうつっていくのが大部分であった。水道方式では、

$$\begin{array}{r} 234 \\ +765 \\ \hline \end{array}$$
 の型をしっかりと教えておけばそれから先の型くずれも子どもが自分の力で工夫して計算できるものである、と遠山氏はいつている。

第三の特徴は、練習問題がすべて型分けされており、しかも整然と配列されているので指導が楽であることである。

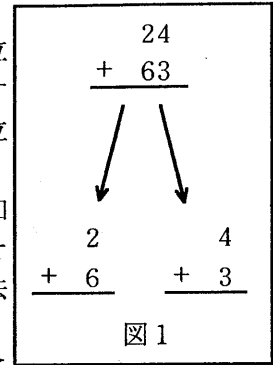
1.2 水道方式の基本的な三つの原理

水道方式は以下に挙げる三つの原理によって構成され、体系化されている。

- (1) すべての計算原理をもっとも単純な計算過程に分解し、それを素過程と名づける。
- (2) 素過程を組み合わせてもっとも一般的で典型的な複合過程を作る。
- (3) 一般的で典型的な複合過程からしだいに特殊な典型的でない複合過程に及ぼしていく(これを退化という)。

これらを二位数と二位数の加法を例にとって説明する。(1)は図1をみるとわかるように、二位

数と二位数の加法を、一位数と一位数の加法に分解することである。これは三位数の加法のときも同様で、すべて一位数と一位数の加法になおすことである。そして一位数と一位数の加法を「素過程」と呼んでいる。



(2)は、図1の矢印を逆にたどることである。ここで、「典型的」という用語に注意したい。この用語は(3)にも関連するので特にとり上げておく。

ところで、「水道方式」には、(1)、(2)、(3)を支える「根本原理」がある。それは「0(ゼロ)は特殊である」という原理である。この原理が一貫して流れているのである。「0は特殊である」に対して、0以外の一位数(1から9)を「一般」として扱っている。すなわちこのことから、

$$0 \text{ (特殊)} \longleftrightarrow 1 \sim 9 \text{ (一般)}$$

という関係を確立しようとするわけである。このような、一般—特殊、特殊—一般という関係は、0は特殊である、という原理を根底に置きながら「一般」は「典型的」、「特殊」は「典型的でない」と言いかえられて数計算の体系化に組み込まれているのである。

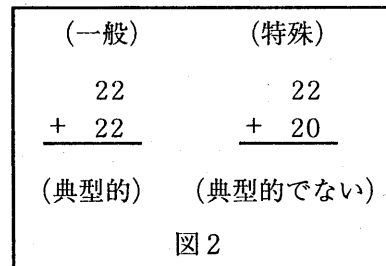


図2をみてみると、左側が0を含んでいないので「一般＝典型的」であり、右側は0を含んでいるので「特殊＝典型的でない」というわけである。0を含むかどうかは典型、非典型の見分け方なのである。したがって(3)で述べられている内容は、図2で左側から右側へ進めていくことである。その進む流れを退化と呼んでいる。

2. 整数とその計算

—その1・加法と減法について—

2.1 整数の概念

ここでは、水道方式を展開するに先立ってまず整数の概念と演算について説明をしている。

整数と分離量について、整数の概念について、位取りと0について、記数法の指導タイルについ

て、そして整数の順序について述べている。

2.2 加減法の計算

まず加法の計算の原理について述べている。

0 9

加法の素過程は+0 から+9 まで100通りあるが、それをくり上がらないもの、くり上がるもの、0を含まないもの、含むものに分けて次のように分類する。

2	2	0	0
+ 2	+ 0	+ 2	+ 0
9	9		
+ 9	+ 1		

素過程をマスターしたら複合過程にうつっていくが、水道方式では今までのような特殊から一般へという順序ではなく一般から特殊へというまったく反対の筋道で展開していく。すなわち、

$$\begin{array}{r}
 22 \\
 + 22 \\
 \hline
 44
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 22 \\
 + 20 \\
 \hline
 42
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 20 \\
 + 22 \\
 \hline
 42
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 20 \\
 + 20 \\
 \hline
 40
 \end{array}$$

$$\rightarrow
 \begin{array}{r}
 22 \\
 + 2 \\
 \hline
 24
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 2 \\
 + 22 \\
 \hline
 24
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 20 \\
 + 2 \\
 \hline
 22
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 2 \\
 + 20 \\
 \hline
 22
 \end{array}$$

という順序になる。

くり上がりのある二位数の加法も同様に展開していく。

22

+22 型はもっとも典型的な例で、すべての基本操作を含み、位も全部そろっている。この型について基本的な法則を出しておけば、あとは「0の入ったものを特殊とみる」だけですべての型に適用できる。このような型を水源地と呼ぶ。

ここで(二位数) + (二位数) に対して(二位数) + (一位数)、(一位数) + (二位数) は、二位数の10の位が0となった場合となるので退化型と呼ぶ。

次に減法の原理について述べている。

減法の素過程も100通りあり、次の6つの型に分類することができる。

9	12	10
- 2	- 9	- 9
9	2	0
- 0	- 2	- 0

あとは減法も加法とまったく同じように展開していくことができる。

3. 整数とその計算

—その2・乗法と除法について—

3.1 乗法の計算

加減の場合の方法は、そのまま乗法の場合にも適用できる。加法の場合には(一位数) + (一位数)、つまり加法の素過程がすべての加法を組み立てるもとであったが、同じように乗法では(一位数) × (一位数) がすべての乗法のもとになる。

右にある乗法は、3つの(一位数) × (一位数) の並置されたもので、もし途中でくり上がればくり上がったものを次の積に加えればよいのである。×(一位数) の場合は被乗数が何けたの数であっても同じである。

$$\begin{array}{r}
 423 \\
 \times 2 \\
 \hline
 846
 \end{array}$$

↙ ↓ ↘

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 \times 2 \\
 \hline
 8
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \\
 \times 2 \\
 \hline
 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3 \\
 \times 2 \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

その下にある×(二位数)でも、2つの×(一位数)に分解し、あとは部分積を加え合わせることで積を求めることができる。結局、乗法はすべて(一位数) × (一位数)、つまり乗法の

$$\begin{array}{r}
 32 \\
 \times 74 \\
 \hline
 \end{array}$$

↙ ↘

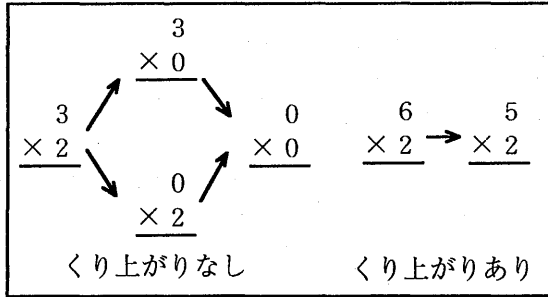
$$\begin{array}{r}
 32 \\
 \times 7 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 32 \\
 \times 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

↙ ↘ ↙ ↘

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 \times 7 \\
 \hline
 21
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \\
 \times 7 \\
 \hline
 14
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3 \\
 \times 4 \\
 \hline
 12
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \\
 \times 4 \\
 \hline
 8
 \end{array}$$

乗過程と既習の加法に分けられるわけである。

乗法の素過程は、0の段も含めると100通りある。それらをくり上がりのある、なしと、0を含む、含まないによって次の6つの類型に分けられる。



素過程をマスターしたら、まず×(一位数)から入っていくのだが、やはりこのときも一般から特殊への順序に従って指導していくのである。

3.2 除法の計算

除法では、はじめに÷(一位数)を考えていく。

右の $593 \div 2$ では、はじめに 2) 5 を考え、①まず 2 をたてる、②つぎに 2×2 を計算し、③5 から 4 を引き、④9 をおろし、以下同様に〈たてる〉〈かける〉〈ひく〉〈おろす〉の 4 つの操作をくり返していけばよいわけである。そしてその一連

$$\begin{array}{r} 296 \\ 2 \overline{) 593} \\ \underline{4} \\ 19 \\ \underline{18} \\ 13 \\ \underline{12} \\ 1 \end{array}$$

の操作は、それぞれ 2) 5, 2) 19, 2) 13 という九九の逆算による除法が基礎になっている。つまりこれらが素過程にあたるわけである。

除法の素過程は 100 通りではない。たとえば 5 で割る場合だと 5) 0 から始めて 5) 49 まで 50 通りあり、おのおのについてその数の 10 倍だけの場合が考えられるので、 $\div 1$ から $\div 9$ まで全部で 450 通りある。これを一般と特殊に分けて型分けをしていく。除法の素過程は次の 7 つの類型に分かれる。

$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \overline{) 7} \\ \underline{6} \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \overline{) 6} \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0 \\ 3 \overline{) 2} \\ \underline{0} \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0 \\ 3 \overline{) 0} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$
A型	A ₁ 型	A ₂ 型	A ₃ 型
$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \overline{) 13} \\ \underline{12} \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \overline{) 12} \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \overline{) 10} \\ \underline{9} \\ 1 \end{array}$	
B型	B ₁ 型	B ₂ 型	

以上の素過程をもとに (二位数) ÷ (一位数), (三位数) ÷ (一位数) などを考えていく。

4. 水道方式に対する諸批判について

—日本数学教育会誌をもとに—

ここでは 1962 年から 63 年にかけて日本数学教育会誌 (現在は日本数学教育学会誌) に掲載された伊藤武氏の「水道方式批判」を取り上げ、氏の主張をまとめている。

IV. 研究の結論

1. 研究のまとめ

本研究の目的は「水道方式」を学び、現在広く行われている実践的指導と対比することを通し、これからの算数指導の方向性を見いだそうとするものであった。従来のもとは全く違った理論を展開していること、またその中で教具としてタイルを使っていること、計算の筋道をつくるために「素過程」, 「複合過程」, 「退化」という 3 つの原理を作り出し、そして「一般から特殊へ」と展開されていることなど、知ることができただけでも価値のある研究であった。今現在、水道方式を伊藤氏のように批判することはできないし、かといってすべてを受け入れることもできない。しかし、これから教育現場に立ち子どもたちに算数を教えていくようになったら少しずつ自分なりの結論が見えてくると思われる。

2. 今後の課題

本研究において参考とした文献の量は少なく、少し古いものであった。また、現在水道方式が実際の現場においてどのように実践されているのかなどを観察・分析・考察していくことが今後の課題である。

主要引用・参考文献

- 遠山啓 (編). (1961). 算数に強くなる水道方式入門 上巻 整数の計算. 国土社.
- 岡部進 (著). (1981). わかる算数と遠山啓—その批判的考察—. 教育研究社.
- 遠山替, 銀林浩 (共著). (1960). 水道方式による計算体系. 明治図書.
- 伊藤武. (1962). 水道方式批判. 日本数学教育会誌, 44 (12).