

# 数学教育における論証指導の一考察

## —オリガミクスに着目して—

森田 美保

指導教官：矢部敏昭・溝口達也

### I. 研究の目的と方法

中学校で論証の指導をする目的には、

- ・証明の意味を知らせ、証明ができるようにすること。そして、公理的方法についての基礎的なことを理解させること。
- ・それを通して、論理的に考える力・批判的に考える力を伸ばすこと。

があげられる。

形式的な証明の仕方が教えられるのは中学校が初めてであるため、その指導にはいくつかの問題点がある。

(1) 証明の仕方を教え、証明をさせていれば、論理的に考える力、批判的に考える力を伸ばせると安易に考えてよいか

(2) 「証明がわからない」、[証明ができない]、[証明を誤る]生徒がかなりいて、その指導が難しい。

などがある。

このような問題点から引き起こされる生徒側の問題を考えてみると、

- ①証明の必要を感じない
- ②証明がわからない

という2つをあげることができる。

これらの問題点は、上述された問題(2)から考察される。しかし、この問題点の背景には、

(1)がある。

というのも、論証の指導をする目的を達成させるために、証明の仕方、証明をさせることに力を注いでしまい、証明の意味が十分に伝えられずにいるためである。

また、中学校における現状を考えてみると、テストで、受験でできればよいというような「できる」という点が重要視されている。そのことが、「わかる」、「必要である」と感じられない要因の1つとなってしまうのだと考える。

中学校で初めて形式的な証明の仕方が教えられる。このときに、単なる証明の仕方だけでなく、その意味や、必要性についてどれだけ生徒

に感じさせることができるかという、教師の力量が問われてくることになる。そのためには、教師自身が、それらのことに関する考え方をしっかりと持っている必要がある。

「証明ができない」原因、つまり「証明の難しさ」について次のことがあげられる。

- ①道筋を立てて正しく推論することができない
- ②証明の糸口が発見できない
- ③補助線が見つけれられない
- ④どう考えていってよいかわからない
- ⑤証明の記述ができない

生徒がこのように思ってしまう原因は、証明の指導において、教師が正しい証明をしてみせることをもって、その指導をしたと考えているということである。できあがった結果を見せるだけで、その結果が得られるまでの思考過程が示されていないために起こる。

そこで、本論文は、これらの問題を解決していくことを、基本的問題意識としながら、

「証明の難しさ」

- ②証明の糸口が発見できない

という点に焦点を当て、この点についての解決の可能性を探ることを目的とする。

「解決の糸口を発見すること」が、論証を始めるきっかけとなり、考え方を導いていく手段となると考えられることから、同時に証明の記述についても形式にこだわらない指導をしていくことで、論証がわからないということを少しでもカバーしていけるのではないかという仮説に立脚し、その方法として、「操作」を取り入れる。

上述したように、形式的な証明の方法が教えられるのは中学校が始めてである。それまで小学校では、「操作」によって観察したり、確かめたり、判断や説明の根拠としてきている。しかし、中学校になると、「操作」に基づく、ということが少なくなり、念頭において、論理的に考える、批判的に考えるということがほとんどとなる。この小学校と、中学校での違いが生徒に論証を取り組み

にくいものとしている。

特に、「オリガミクス」に注目し、上記の可能性を追求することを試みる。

## II. 本論文の構成

### 序章 論証指導の問題点

#### 序 1. 中学校における論証指導の問題点

##### 序 1.1 証明の必要を感じない

##### 序 1.2 証明の難しさ

#### 序 2. 本論文の位置づけ

### 1. 論証指導における操作活動

#### 1.1 操作の定義

#### 1.2 操作の位置づけ

#### 1.3 操作の意義

### 2. オリガミクスによる数学

#### 2.1 任意母線をもとにした線辺折り

#### 2.2 オリガミクスの定理折りによる展開

#### 2.3 オリガミクスを用いることの難しさ

### 3. 中学校図形領域における指導内容

#### 3.1 第1学年の内容の概観と体系化

#### 3.2 第2学年の内容の概観と体系化

#### 3.3 第3学年の内容の概観と体系化

### 4. 論証指導のための教材開発

#### 4.1 基本的な折り方(切り方)

##### 4.1.1 基本折り

##### 4.1.2 複合折り

#### 4.2 「折る」「切る」操作を取り入れた活動の構成

##### 4.2.1 操作によって発見を促す活動の構成

##### 4.2.2 操作によって確かさを確認する活動の構成

### 終章 総括と今後の課題

#### 終 1 総括

#### 終 2 今後の課題

## III. 研究の概要

### 1. 論証指導における操作活動

#### 1.1 「操作」の定義

「操作」(operation)は、用いられる領域によって意味内容がいろいろにとられるので、ここでは「図形」指導という枠内で考える。

『操作というのは、幾何学的認識活動を実現してゆく手段としての、個々の作業形態を指している』。

この定義をもとに、操作について私なりに定義すると、「幾何学的認識を深め、それを通し

て、論証の手だてとする活動」とする。

#### 1.2 操作の位置づけ

小学校での操作の位置づけは、「図形の性質などの確かめ」とされるのがほとんどである。この位置づけをそのまま中学校でも用いようすると限界が生じる。それは、中学校では線分や角の相等は仮定として与えられていたり、結論は証明されなければならないからである。また、小学校で取り上げられていた直接的操作や経験が、中学校では念頭操作だけになってしまうということが、中学校で図形を学習する難しさになっている。

では、「確かめる」という位置づけのほかには何かないだろうか。そこで、操作の位置づけを、「発見を促す」、「論証をする意欲を高める」、「課題の把握」などとする。

#### 1.3 操作の意義

本論文では、操作の意義を次の4点とする。

##### A. 論理的な思考力や直観力を育てる。

(数学的な考え方)

イ. 具体的段階と抽象的段階とを結びつける助けとなる。(知識・理解)

ウ. 操作すること自体が楽しく、関心・意欲を高める。(関心・意欲)

エ. 問題を把握したり、解決の見通しを立てたりする手だてとする。

### 2. オリガミクスによる数学

本章では、芳賀和夫氏の「オリガミクスによる数学授業」について考察する。

#### 2.1 任意母線をもとにした線辺折り

正方形の紙を一枚机の上に置き、任意の位置で紙を折る。このときの折り線が母線になる。他の折り線と見分けがつくようになにか印をしておく。

この母線に正方形のすべての辺を合わせて折る。その折り線どうしが交わっている交点に赤鉛筆などで印をつける。このように、「線」に「辺」を重ね合わせて紙を折ることを「線辺折り」と呼ぶ。

新たに同じ大きさの別の紙を取り出す。新しい折り紙を手にして、普通、鶴や風船や船などを作る場合、最初にどんな折り方をするだろうか。

対辺に平行に移動させてお互いに重ね合わせて折るか、遠い頂点を重ねて折るかのどちらかである。再現性のある折り方としてこの2通りしかない。今後、この縦横斜めの4本を「一次折り線 primary crease」と呼ぶことにしておく。

この2つの紙を重ね合わせてみると、線辺折りのできた交点はすべて一次折り線上にあることが分かる。

これらの交点は、角の二等分線、内心、傍心などを用いることで証明することができる。

## 2.2 オリガミクスの定理折りによる展開

オリガミクスのは、第1定理折り、第2定理折り、第3定理折りがある。どの折り方も、一辺の中点をマークすることから始まる。

まず、第1定理折りは上辺の中点マークに下辺の右(左)端頂点を重ねて折る。

次に、第2定理折りは上辺の中点マークと下辺の右(左)端頂点を結ぶように折る。

第3定理折りは、下辺の右端頂点が左辺上にくるように紙を曲げ、下から上へ左辺上を移動させる。そして、右辺が上辺の中点マークを通るときに紙を折る。

これらの定理折りをすることで、辺を分割するさまざまな点があらわれる。この分割点についての数理を探究することに面白さを感じることができる。また、第1定理折りでの発見が、第2, 3定理折りをしたときの予測につながっている。その予測の正しさ、誤りは数学を手段とすることで確かめることができる。

## 2.3 オリガミクスを用いることの難しさ

なぜ、このオリガミクスをそのまま指導に取り入れなかったのか、という難しさについて考えてみると、中学校で取り上げられていない内容を含んでいる。そのため、証明の方法を見つけにくい、などということが考えられる。

## 3. 中学校図形領域における指導内容

本章では、現行の教科書をもとに平面図形に関する指導内容を概観するとともに、必要に応じて定義、定理、証明などを追加し、体系化していくものである。教科書では取り上げられていない証明や、違っているものを追加することによって、内容を深めたり、違った考え方を引き出すことができるのではないと思う。

また、次章における教材づくりに関して「基本折り」・「複合折り」を抽象していく基礎とするものである。

## 4. 論証指導のための教材開発

本章においては、前章の指導内容をもとにそれぞれの折り方を考えていく。そのとき、「基本折り」と「複合折り」に分ける。

「基本折り」とは、図形の考察に当たり、主として構成要素に関する基本的な性質を折り紙を用いてつくる操作を指す。

「複合折り」は、基本折りをいくつか使って

形づくられていくものとする。

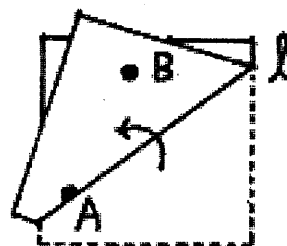
また、必要に応じて「切る」という操作も取り入れることとする。

## 4.1 基本的な折り方

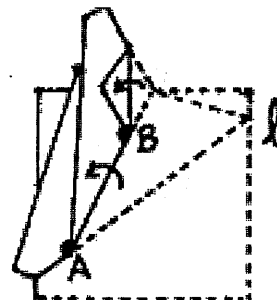
「基本折り」

・等しい長さの線分(線分AB)を折る(その1)

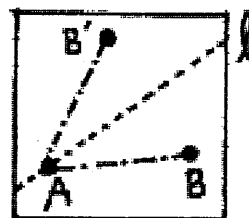
- ①2点A, Bのうち、どちらか1点を通る任意の直線 $l$ で折る。



- ②折りりあわせのまま、2点A, Bをつなぐように折る。そのとき、点Bで再び折って印をつける。この点を $B'$ とする。



- ③直線 $l$ をはさんで、線分 $AB'$ ができる。 $AB = AB'$ (線対称)

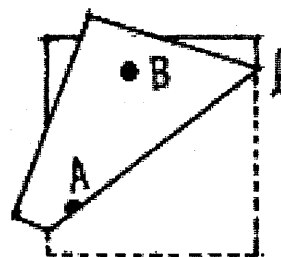


「複合折り」

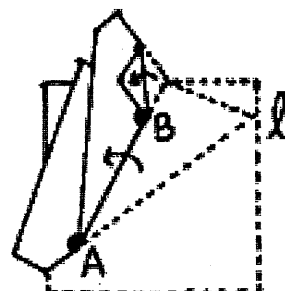
・二等辺三角形

(等しい長さの線分をとる そのI)

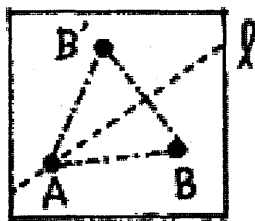
- ①2点A, Bのうち、どちらかの点を通る任意の直線 $l$ で折る。



- ②折りりあわせのまま、2点A, Bをつなぐように折る。そのとき、点Bで再び折って印をつける。その点を $B'$ とする。



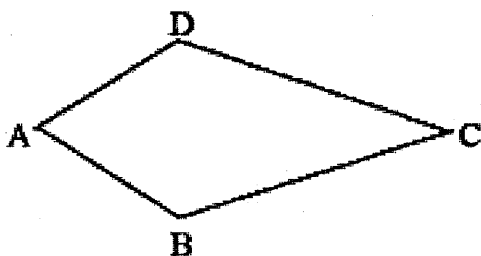
③ 直線  $l$  をはさんで、線分  $AB'$  ができる。  $AB=AB'$



④ 点 B と B' をつなぐように折ると二等辺三角形  $ABB'$  ができる。

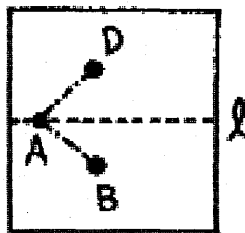
4.2 「折る」「切る」を用いた活動の構成  
「操作」によって発見を促す活動の構成  
証明 (第 2 学年教科書 104 ページ) から取り上げる。

問) 四角形  $ABCD$  で、 $AB=AD$ ,  $BC=DC$  のとき、  
 $\angle ABC = \angle ADC$  といえるでしょうか。  
これを図示すると、

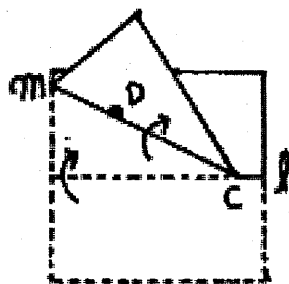


となる。教科書では、「A と C を結ぶと、」と補助線を加えることが示してある。

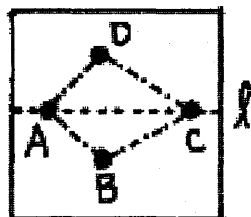
これを、「折る」という操作を用いてつくってみる。「基本折り」1, 等しい長さの線分を折る〈その1〉を用いる。



まず、2 点 A, B を決め、点 A を通る任意の直線  $l$  を折り、 $AB=AD$  となる点 D をつくる。



つぎに、点 B, D を通って直線  $l$  と交わるような直線  $m$  を折る。直線  $l$ ,  $m$  の交点が C である。



「折る」という操作によって、 $AB=AD$ ,  $BC=DC$  である四角形  $ABCD$  をつくと、補助線  $AC$  ができ、 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$  をいえばよいことがわかる。

また、仮定が  $AB=AD$ ,  $BC=DC$  であるという

問題の把握にもつながる。

#### IV. 研究の結論

本論文では、「操作」なかでも「折る」という操作に着目した。「折る」という操作だけでも、補助線などの発見を促したり、問題の把握にもつながるということが分かった。また、「基本折り」や「複合折り」をすることで、図形の性質についての知識を深めることが明らかにされた。

授業で用いる際には、すべて折り方を示してしまふのではなく、生徒に考えさせることで図形に対する認識、問題の把握につながると考える。また、授業での位置づけによって、公理を探究していくこともできる。

本論文において、今後に残された課題として次のようなことが考えられる。

- ・「オリガミクス」の、数学的な良さ、おもしろさを、中学校で取り上げる方法を考えること。
- ・他の「おりがみ」を用いて算数・数学について考察されているものも取り上げてみること。

本論文では、芳賀和夫氏の「オリガミクス」を基に、中学校図形領域の内容に対しての折り方を提唱した。同様に、「オリガミクス」を、授業に取り入れることによって、数学的なおもしろさを生徒が感じ取るという可能性もあると考える。

・「論証指導のための教材開発」において、他の折り方が考えられるかもしれないということ。本論文では、構成要素に関する基本的な性質を基に折り方を考えたが、基本折りなど、まだ追加すべきものや、折り方が他にもあるのではないかと考える。

#### 参考・引用文献

- 杉山吉茂. (1986). 公理的方法に基づく算数・数学の学習指導. 東洋館出版社.
- 学校教育研究会. (1961). 図形指導のあり方 広島大学教育学部附属小学校. 明治図書.
- 平林一栄, 広間利明. (1979). 小学校算数科・3 新しい「図形」の指導. 明治図書.
- NCTM, 井上義夫, 佐々木元太郎 (監訳). (1980). 幾何教育への新しいアプローチ. 新数社.
- 清水静海 (編). (1993). 算数授業の構想と実践一見通し・道筋・活用一. 東洋館出版社.
- 芳賀和夫. (1996). オリガミクスによる数学授業. 明治図書.
- 武藤徹. (1998). 体系が見えてくる数学読本 I (代数・幾何学) 量と図形の数学. 三省堂.
- 福森信夫 他. (1996). 新訂数学 1~3 年. 啓林館.