

# 数学教育における発展的学習指導に関する研究

## —「問題場面の構造」と「数学的構造」への着目—

吉澤 京子

指導教官：矢部敏昭・溝口達也

### I. 研究の目的と方法

算数・数学は、とりわけ問題を解決していくことを通して理解を深めていく教科である。既存の解法をみる、または知るだけでは決して自分のものにはならない。よって、自分の力で問題を解決することができなければ、「わからない」教科である反面、試行錯誤の上で解決することができれば、これほどおもしろい教科はないと思う。21世紀へ向け、「生きる力」を育てることが学校教育において重要であるとされている現在、算数・数学科においても、主体的に問題を解決する活動などを通して、子どもたちが学ぶことの楽しさや充実感を味わえるようになることを期待している。しかし残念ながら、いまだ上述のように算数・数学が「わからない」という子どもたちは多く、算数・数学に対して魅力を感じている子どもは少ないようである。

子どもが算数・数学で楽しさや充実感を味わえない原因はどこにあるのだろうか。目の前に問題があれば、私たちは何らかの方法で解決しようとするはずである。しかし、解決すべき問題を自分のものとして感じられなければどうだろう。この点にこそ、上に示した原因の一つがあるのではないかと考えられる。

本研究の目的は、子どもが問題を自分のものとして感じられ、なおかつ主体的に取り組めるようになる学習指導はどうすればよいかというところにある。そのために、以下のような方法を用いた。

まず、子どもたちが問題を解決する過程で、どういった数学的な見方・考え方をしていくのかをみるために、後述のように「問題場面の構造」に着目した教材分析を行った。そして、「オープンエンド アプローチ」による指導や「問題の発展的な扱いによる授業」をみていくことにより、問題を発展的にみることとさらに数学的な見方・考え方を広げられる可能性が見出され、いくつかの教材にあたるうち、それら

の中から「数学的構造」を見出すことができた。「発展的学習指導」は、このような「問題場面の構造」と「数学的構造」に着目した学習指導はできないか考えたとき、子どもの多様な反応を尊重した「オープンエンド アプローチ」による授業や「問題の発展的な扱いによる授業」をもとにして生まれたものである。

### II. 本論文の構成

#### 1. 発展的学習指導の意義

##### 1.1 「発展的学習指導」とは

###### 1.1.1 一連の学習活動

###### 1.1.2 「オープンエンド アプローチ」と「発展的学習指導」との違い

###### 1.1.3 「問題の発展的な扱いによる授業」と「発展的学習指導」との違い

##### 1.2 発展的学習指導を提案する背景

###### 1.2.1 「オープンエンド アプローチ」の問題点と課題

###### 1.2.2 「問題の発展的な扱いによる授業」の問題点と課題

#### 2. 発展的学習指導における構造への着目

##### 2.1 「問題場面の構造」

###### 2.1.1 「問題場面の構造」の定義

###### 2.1.2 教材分析にみる「問題場面の構造」

##### 2.2 「数学的構造」

###### 2.2.1 「数学的構造」の定義

###### 2.2.2 教材分析にみる「数学的構造」

##### 2.3 「問題場面の構造」と「数学的構造」の関わり

#### 3. 発展的学習指導を行う上での着眼点

##### 3.1 最初の問題

##### 3.2 問題の発展のさせ方

###### 3.2.1 発問の仕方

###### 3.2.2 発展的問題の作らせ方

###### 3.2.3 発展的問題の分類

###### 3.2.4 発展的問題の取り扱い

#### 4. 発展的学習指導にもとづいた教材開発

4.1 教材開発にあたって

4.2 教材開発

4.2.1 「何倍でしょう」(第3学年)

4.2.2 階段の問題(第4学年「変わり方」)

Ⅲ. 研究の概要

第1章は、「発展的学習指導」の意義として、まず一連の学習活動がどういったものであるのかを述べる。そして、それを提案する背景にある「オープンエンド アプローチ」、「問題の発展的な扱いによる授業」との違いや、それぞれに残されている問題点と課題を明らかにするものである。

第1節では、最初に以下のようなものを「発展的学習指導」と呼ぶ。

‘解決者自らが、他者から与えられるか自分で与えるかして設定した、最初の問題を発展させて新しい問題をつくり、解決しようとする一連の学習活動を中心とした指導’

そして、一連の学習活動を図1.1で表し、最初の問題 $P_0$ を多様な方法で解決し、それをもとに問題を発展させていく流れを説明する。図1.1の中にもあるように、多様な解決を考えたり問題を発展させたりする上で、「問題場面の構造」と「数学的構造」が関係しているのだが、それらについては第2章で詳しく述べる。

次に、「オープンエンド アプローチ」

「問題の発展的な扱いによる授業」との違いを述べる。

「オープンエンド アプローチ」と「発展的学習指導」は、最初に考える問題が数学的活動

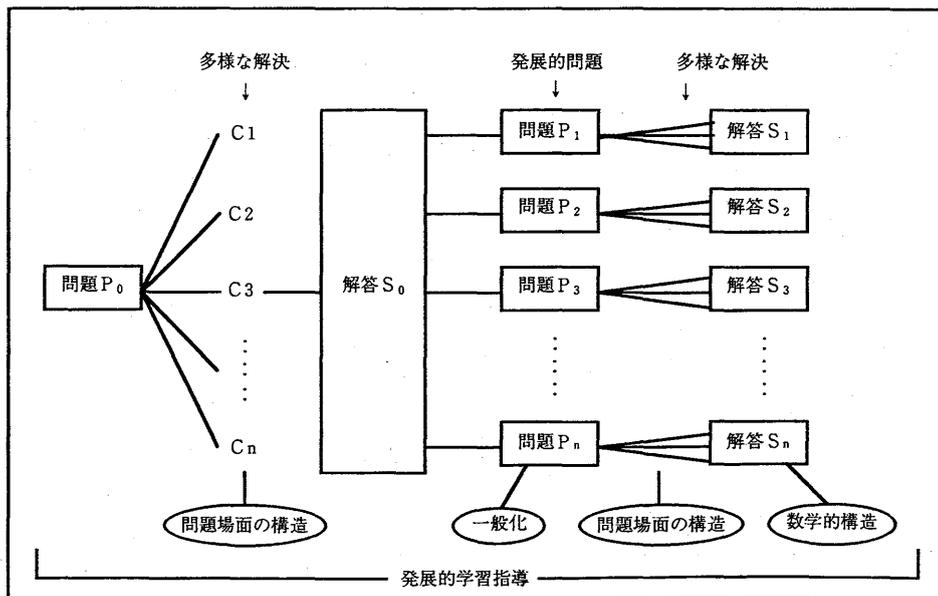
においてどの世界にあるかという点に違いがある。前者では、現実の世界の問題を解決するのに、抽象化、理想化、単純化することを通して数学の世界の問題に置き換えている。それに対して、後者では、最初から数学の世界の問題を解決することを頭に置いている。「問題の発展的な扱いによる授業」と「発展的学習指導」では、その根本において‘解決者自らが問題を発展させて解決しようとする一連の学習活動を中心とした指導’であるところは同じである。しかし、問題を発展させる段階において、前者では原問題をもとにしているのに対し、後者では最初の問題の多様な解決の中で見られる「問題場面の構造」をもとにしているところで違っている。

第2節は、前節の中で述べた「オープンエンド アプローチ」と「問題の発展的な扱いによる授業」がどのようなもので、また、どういった今後の課題を含んでいるのかを明らかにするものである。「オープンエンド アプローチ」では、‘よい’、オープンエンドの問題をいかに開発できるかということ、を、「問題の発展的な扱いによる授業」では、教師がいかに時間の余裕を生み出せるかということ、を課題としていることを述べる。

第2章は、全章で触れた「問題場面の構造」と「数学的構造」についてその定義を述べ、事例を通して具体的にそれらがどういうものであるのかを明らかにするものである。

第1節は、「問題場面の構造」についてである。その定義として、以下の市川和彦氏の定義を採用する。

「問題場面の構造とは、解決過程のある時点で、



【図 1.1】

解決者が問題場面に対して構成した構造を指し、解決者により見出された要素、関係、及び解決者により要素や関係に与えられた意味からなる。」

次に、「階段の問題」(第4学年「変わり方」)、「碁石の問題」(第4学年)、「正六角形の対角線の問題」(第6学年)という3つの教材を取り上げ、子どもたちの解決を考察し、その後、「問題場面の構造」について明確にする。

第2節は、「数学的構造」についてである。その定義として、以下のように自分なりに定義づけする。

「数学的構造とは、最初の問題を解決し、そこから問題を発展させることを通して一般化した解決をいう。」

私は、「問題場面の構造」を考察するために行った教材分析をさらに続けていくことで、「数学的構造」を定義付けすることにしている。よって、次に、前節と同じ3つの教材を取り上げ、それからさらに発展させた問題に対する子どもたちの解決を考察し、その後、「数学的構造」について明確にする。ここでは、以下の「正六角形の対角線の問題」を例に挙げる。

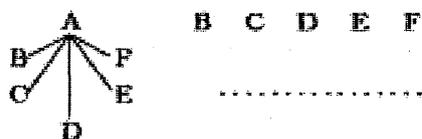
正六角形の対角線は全部で何本ありますか。



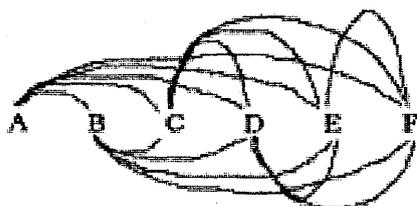
例えば、この問題の「問題場面の構造」は以下のようなものが考えられる。(A~Fは正六角形の頂点を表す)



$$3 \times 6 \div 2 = 9 \text{ (本)}$$



$$5 \times 6 \div 2 - 6 = 9 \text{ (本)}$$



$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 - 6 = 9 \text{ (本)}$$

また、最初の問題を

『正n角形の対角線は全部で何本ありますか。』というふうに一般化した問題に発展させると、この場合の「数学的構造」は以下になると考えられる。

$$\frac{(n-3) \times n}{2}$$

第3章は、「発展的学習指導」で取り上げる最初の問題としてふさわしいものはどのようなものであるのかということや、具体的な問題の発展のさせ方はどうすればよいのかということなど、「発展的学習指導」を行う上での着眼点について述べるものである。

第1節では、「発展的学習指導」において、以下の条件を含んだものが最初の問題としてふさわしいことを述べる。

- ア. 多様な見方・考え方ができ、能力の高い子どもから低い子どもまで数学的価値を含んだ反応が考えられる。
- イ. 子どもの学習段階に適切な発展性がある。
- ウ. 問題の形式が単純である。

第2節では、まず、子どもが問題を発展させるときの教師の発問の仕方や、具体的な発展的問題の作らせ方を述べる。そして、発展的問題をどういう観点で作らせればよいのかという分類を明確にし、作った問題の取り扱いなどを述べる。

ここでは、発展的問題を分類するときの5つの観点を挙げる。

- ①最初の開題の条件を変えた問題
- ②最初の問題の条件の一部を保存した問題
- ③命題の逆の問題
- ④複合した問題
- ⑤似た構造を持つ別の問題

第4章は、前章までで考察した「発展的学習指導」にもとづき、特に「問題場面の構造」と「数学的構造」に着目した教材開発をしていくものである。

まず第1節で、教材開発の進め方が以下の項目によることを示す。

- [1] 最初の問題の解決
- [2] 発展的問題
- [3] 一般化した発展的問題の解決

そして第2節で、以下の項目によって教材開発を行う。

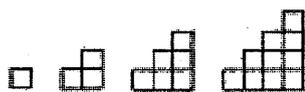
- 1) 本教材について
- 2) 教材開発

### 3) 本教材に関する考察

取り上げる教材は、小学校算数の「何倍でしょう」(第3学年)と「階段の問題」(第4学年「変わり方」)である。

ここでは、「階段の問題」を取り上げる。

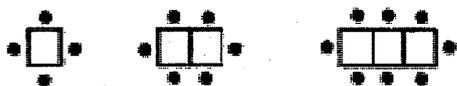
1辺の長さが1cmの正方形の紙をならべて、下のような階段の形をつくっていきます。



だんの数が8のとき、まわりの長さは何cmになるでしょう。

例えば、この問題の発展的問題を前章の中で示した5つの観点により考えてみると、以下のようなものが挙げられる。(①, ③, ④の「階段の形」とは、最初の問題のような図を表す。)

- ① 1辺の長さが1cmの正方形の紙をならべて、下のような階段の形をつくっていきます。段の数が $n$ のとき、まわりの長さは何cmになるでしょう。
- ② 1辺の長さが1cmの正方形の紙100枚をならべてできる形の最大面積を求めなさい。
- ③ 1辺の長さが1cmの正方形の紙をならべて、下のような階段の形をつくっていきます。まわりの長さが32cmになるとき、段の数はいくらになるでしょう。
- ④ 1辺の長さが1cmの正方形の紙を階段の形にならべていったものと、1辺の長さが1cmの正三角形の紙を同じように階段の形にならべていったものがあります。同じ段数のとき、まわりの長さの違いはいくらでしょう。
- ⑤ 下のように正方形のテーブルを1列にならべて、そのまわりに人が座ります。16人座るには、テーブルがいくついるでしょう。



## IV. 研究の結論

本研究から得られた結論は、以下のものである。

- ・「発展的学習指導」の中で「問題場面の構造」や「数学的構造」に着目することは、子どもたちが算数・数学に対して楽しさを感じ、主体的に問題解決に取り組むように

なるのに有効である。

- ・子ども自らが問題を発展させることによって、問題と問題のつながりを考えることができるので、「発展的学習指導」は問題を自分のものとして感じられるのに有効である。
- そして、今後に残された課題は、以下のものである。

- ・本研究においては、「一般化」ということについての吟味が不十分であり、より一層の検討を要する。
- ・本研究では、小学校算数科「D数量関係」領域の教材を主に取り上げているが、その他の領域の教材についても検討してみる必要がある。

### 主要引用・参考文献

- 島田茂.(1977). 算数・数学科のオープンエンドアプローチ：授業改善への新しい提案. みずうみ書房.
- 竹内芳男, 沢田利夫(編著).(1984). 問題から問題へ：問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善. 東洋館出版社.
- 布川和彦.(1991). 数学的問題解決過程における数学的知識の問題場面の構造への作用について. 筑波数学教育研究(10), 45-55.