

線形および非線形制御系設計のためのモデルマッチング法

山本 祥弘
鳥取大学工学部知能情報工学科

Model Matching Method for Linear and Nonlinear Control System Design

Yoshihiro YAMAMOTO
Department of Information and Knowledge Engineering, Faculty of Engineering
Tottori University, Tottori, 680-8552 Japan
E-mail: yamamoto@ike.tottori-u.ac.jp

Abstract: A new method of model matching control for linear and nonlinear discrete time systems is presented in this paper. The method is very simple and useful not only for linear but also for nonlinear systems. If there is no uncertainty like a model error, this method gives a closed loop system whose characteristic is exactly the same with the one of the desired model. To cope with the real applications, integral action is easily introduced with some other free parameters. This result is also extended for systems with time lag and multivariable systems.

Key Words: Control system design, Nonlinear system, Discrete time system, Model matching method

1. はじめに

定年退職者として「総説」の執筆を依頼された。しかし、筆者は「総説」を説くほどの大きな仕事をしてきたわけではなく、いくつかの分野でささやかな貢献をしてきたに過ぎない。そこで、この数年間での最も新しい仕事の一つを延べることで、その任にかえたい。制御系設計法の多くはシステムの数学的モデルに基づく場合が多く、従って、モデリングあるいはシステム同定の精度が制御系設計の結果に大きく影響する。しかし、システムをより正確に、あるいは応答のより広い範囲で表現するには、非線形同定法が必要となってくる。しかも、その同定結果を制御系設計に容易に用いることが出来ることが重要である。そこで、非線形問題に対する強力な武器であると言われているニューラルネットワーク (NN) の勉強を始めてみたが、その構造は階層型、学習アルゴリズムは勾配法では、たいした進展が期待できないことは明らかである。しかし幸運なことに、勾配法でなく最小2乗原理に基づく新しい学習アルゴリズムを開発することができた[1]。この結果は、その構造の若干の変形により、相互結合型NNにも適用可能である。これが後に有効となり、さらにその構造を拡張して、Double-Parasol型NNの構成に

到達した。これは、動的システムの同定により適した構造となっており、その後開発した制御系設計法であるTarget Following Control (TFC)と併せて、同定-制御の一つの方法を提案している[2]-[4]。

一方、同定法としては、フーリエ級数を有限項で打ち切った三角多項式をNNとして用いる考えに至り、これもまた別の同定-制御の方法を示している[5], [6]。

ところで制御系設計法は各種の方法が提案されているが、モデル参照型として、モデルマッチング法が古くから知られている[7]-[11]。しかし近年では、H無限大理論による最適化問題の一つと考えられているようである[12], [13]。

本報告では、かつて、筆者が提案した線形システムに対するモデルマッチング法[10]による制御信号が、より簡単に得られることを示し、さらに非線形システムにも適用可能であることを示す。

多くの制御系設計法は、ある種の数学的理論を背景にその理論が構成されていることが多く、そのための基礎勉強が必要となるが、ここで提案するモデルマッチング法は、大学初年級の知識のみで理解可能である。残る課題は、対象となるシステムのシステムモデルをいかに精度よく求めるかであるが、先に記した非線形システムに対する同

定法が有効となると考えている．もう一つは、与えられたシステム、およびそのシステムモデルに対して、どのような規範モデルを与えるかが重要であり、制御性能の成否を決定する要因となる．

本論の読者の中に、興味を持って本手法を応用し、実用に耐え得る有効なものへと格上げしていただくことを願っている．

2. パルス伝達関数

本節ではパルス伝達関数で表されるシステムを考える．すなわち、線形システムを対象とする．まず従来法の設計手順を示し、そこから提案する新しい方法が必然的に得られることを示す．

2. 1 従来法

次式で表されるスカラー線形システムを考える．

$$P(z)y(k) = R(z)u(k) \quad (1)$$

ここに $P(z)$ はシフトオペレータ z の n 次モニク多項式、 $R(z)$ は z の m 次安定多項式、 k は時間ステップを表す．ここで制御器 $u(k)$ を

$$u(k) = \frac{1}{KG(z)D(z)} \{C(z)u_d(k) + A(z)U(k) + B(z)y(k)\} \quad (2)$$

と仮定し、これを用いたシステム (1) の閉ループ系が規範モデルの特性と一致するように、 z の多項式 $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$, $G(z)$ およびスカラー K を定めることがモデルマッチング法の目的である．詳細は文献[0]を参照されたいが、結果は以下の通りである．

[設計手順]

1) 規範モデル

$$P_d(z)y_d(k) = R_d(z)u_d(k) \quad (3)$$

を定める．ただし、 $P_d(z)$, $R_d(z)$ はそれぞれ n_d 次、 m_d 次の安定多項式であり、相対次数の条件

$$n_d - m_d \geq n - m \quad (4)$$

を満たすものとする．

2) 必要ならば積分機能を設定する．

$$D(z) = (z-1)^\xi, \quad \xi = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

3) モニク安定多項式 $T(z)$ を定める．その次数は

$$\rho = 2n - n_d - m + \xi - 1 \quad (6)$$

とする．

4) 次式を満たす $Q(z)$, $S(z)$ を求める．

$$T(z)P_d(z) = Q(z)D(z)P(z) + S(z) \quad (7)$$

$$\deg Q(z) = \rho + n_d - \xi - n = n - m - 1$$

$$\deg S(z) = \rho + n_d - n + m = n + \xi - 1$$

5) 求める多項式を以下のように定める．

$$(1) \quad A(z) = A_1(z)D(z),$$

$$A_1(z) = KG(z) - Q(z)R(z) \quad (10a)$$

$$(2) \quad B(z) = -S(z) = Q(z)D(z)P(z) - T(z)P_d(z) \quad (10b)$$

$$(3) \quad C(z) = T(z)R_d(z) \quad (10c)$$

ここに、 $\deg G(z) = \deg Q(z)R(z) = n-1$ であり、さらに $\deg A_1(z) = n-2$ となるように K を定める．すなわち、 K は $R(z)$ の最高次の係数となる．

この設計手順は (2) を (1) に代入し、得られる閉ループ系のパルス伝達関数が規範モデルのそれと一致するように設計されている．求まる制御入力信号は因果律を満たす実現可能なものとなる．ところで、設計手順により得られた制御入力 (2) を逆に辿ってみる．まず (2) より

$$\{KG(z)D(z) - A(z)\}u(k) = C(z)u_d(k) + B(z)y(k)$$

(10a)₁ をもちいて

$$\{KG(z) - A_1(z)\}D(z)u(k) = C(z)u_d(k) + B(z)y(k)$$

さらに、(10a)₂, (10b), (10c) を用いて

$$Q(z)D(z)R(z)u(k) = T(z)R_d(z)u_d(k) + \{Q(z)D(z)P(z) - T(z)P_d(z)\}y(k)$$

となる．これを整理して

$$Q(z)D(z)\{P(z)y(k) - R(z)u(k)\} = T(z)\{P_d(z)y(k) - R_d(z)u_d(k)\}. \quad (11)$$

この形が新しく提案する方法を示唆している．

2. 2 提案法

システム (1) と規範モデル (3) が与えられたとき、制御の目的は、閉ループ系の特性が規範モデルのそれと一致させるように制御入力 $u(k)$ を決定することである．これと同値ではあるが、制御入力を適切に選ぶことにより、その閉ループ系が

$$P_d(z)y(k) = R_d(z)u_d(k) \quad (12)$$

となるように制御入力 $u(k)$ を求めることである．

すなわち、(1), (3) を書き換えた二つの恒等式

$$P(z)y(k) - R(z)u(k) \equiv 0$$

$$P_d(z)y(k) - R_d(z)u_d(k) \equiv 0$$

が等価であること、従って、

$$P(z)y(k) - R(z)u(k) = P_d(z)y(k) - R_d(z)u_d(k) \quad (13)$$

が成立するように $u(k)$ を求めればよい．これより、

$$R(k)u(k) = \{P(z) - P_d(z)\}y(k) + R_d(z)u_d(k) \quad (14)$$

あるいは

$$u(k) = \frac{1}{K} \left\{ \frac{A(z)}{G(z)} u(k) + \frac{B(z)}{G(z)} y(k) + \frac{C(z)}{G(z)} u_d(k) \right\} \quad (15)$$

$$A(z) = KG(z) - R(z) \quad (16a)$$

$$B(z) = P(z) - P_d(z) \quad (16b)$$

$$C(z) = R_d(z) \quad (16c)$$

が求まる. ただしこれは $n = n_d = m + 1 = m_d + 1$ の場合であり、 $\deg G(z) = n - 1$ 、 $\deg A(z) = n - 2$ とすることにより、実現可能な制御入力 (MMC) が得られる. これを一般化し、さらに補償要素の導入を可能にするためには、モニック多項式 $T(z)$, $Q(z)$, $D(z)$ を用いて

$$\begin{aligned} Q(z)D(z)\{P(z)y(k) - R(z)u(k)\} \\ = T(z)\{P_d(z)y(k) - R_d(z)u_d(k)\} \end{aligned} \quad (17)$$

と表す. これより MMC は

$$\begin{aligned} Q(z)D(z)R(z)u(k) = \{Q(z)D(z)P(z) \\ - T(z)P_d(z)\}y(k) + T(z)R_d(z)u_d(k) \end{aligned} \quad (18)$$

となる. あるいは (10) を用いて (2) のように表すことも可能である.

(例題 1) 次のような 2 次のシステムと 1 次の規範モデル

$$P(z) = z^2 + p_1z + p_2, \quad R(z) = r_1z + r_2,$$

$$P_d(z) = z + p_d, \quad R_d(z) = r_d$$

を考え、 $D(z) = z - d$ とする. このとき $T(z) = z^2$ 、 $Q(z) = 1$ とおくことができ、(18) は

$$\begin{aligned} (z-d)(r_1z+r_2)u(k) \\ = \{(z-d)(z^2+p_1z+p_2) - z^2(z+p_d)\}y(k) \\ + r_dz^2u_d(k) \\ = \{(p_1-p_d-d)z^2 + (p_2-dp_1)z - dp_2\}y(k) \\ + r_dz^2u_d(k). \end{aligned}$$

となる. これより MMC は

$$\begin{aligned} u(k) = \frac{1}{r_1} \left\{ \frac{-r_2}{z} u(k) \right. \\ + \frac{(p_1-p_d-d)z^2 + (p_2-dp_1)z - dp_2}{z(z-d)} y(k) \\ \left. + \frac{r_dz^2}{z(z-d)} u_d(k) \right\} \end{aligned}$$

と求まる. ここで、 $d=1$ が通常の積分器の導入であり、 $d=0$ が積分器なし、その中間の $0 < d < 1$ のときは、積分機能の能力の何割かの導入となる.

具体的には数値例のグラフを参照されたい.

この結果は従来法でも導出可能であるが、より簡単に導かれている. さらに $T(z)$ の次数を大きくしたり、あるいは $T(z) = z^2 + t_1z + t_2$ のように自由パラメータを増やすことは可能であるが、その役割、指針については不明であり、オブザーバ理論と同様に、安定多項式である以外の条件をつけるのは困難と予測している.

3. 差分方程式系

前節では、パルス伝達関数で表されるシステムを対象としてきたが、そのままでは非線形系に拡張することは困難であるので、システムを差分方程式で表現してみる. 線形差分方程式系はパルス伝達関数と等価であるので、前節で述べた提案するモデルマッチング法がそのまま適用されるのは当然であるが、その結果が自然に非線形系に一般化できることが特徴である.

3. 1 線形系

線形システムを

$$y(k+1) = -\sum_{j=0}^{n-1} p_j y(k-j) + \sum_{j=0}^{n-1} r_j u(k-j) \quad (19)$$

で表し、規範モデルを

$$y_d(k+1) = -\sum_{j=0}^{n_d-1} p_{dj} y_d(k-j) + \sum_{j=0}^{n_d-1} r_{dj} u_d(k-j) \quad (20)$$

とする. このとき制御の目的は、その閉ループ系が

$$y(k+1) = -\sum_{j=0}^{n_d-1} p_{dj} y(k-j) + \sum_{j=0}^{n_d-1} r_{dj} u_d(k-j) \quad (21)$$

となるように、制御入力 $u(k)$ を求めることである. 従って、前節と同様に

$$\begin{aligned} Q(z)D(z) \left\{ y(k+1) + \sum_{j=0}^{n-1} p_j y(k-j) - \sum_{j=0}^{n-1} r_j u(k-j) \right\} \\ = T(z) \left\{ y(k+1) + \sum_{j=0}^{n_d-1} p_{dj} y(k-j) \right. \\ \left. - \sum_{j=0}^{n_d-1} r_{dj} u_d(k-j) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

と置き、これから $u(k)$ を求めればよい. ここで重要なことは、(22) に $r_0 u(k)$ の項があり、従って $u(k)$

を利用可能な信号の関数として表現できることである。この場合は $r_0 \neq 0$ であればよい。 $r_0 = 0$ の場合はむだ時間を含む場合であり、下記の別の項目として延べる。結論として、MMC 入力の導出のためには、 $r_0 u(k)$ の項の存在が本質であり、その他の項は線形である理由は何もない。これから当然のごとく、次節の非線形系への拡張が可能となる。(例題 2) (例題 1) と同じ問題を扱う。すなわち、システムと規範モデルは

$$\begin{aligned} y(k+1) &= -p_1 y(k) - p_2 y(k-1) + r_1 u(k) + r_2 u(k-1) \\ y_d(k+1) &= -p_d y_d(k) + r_d u_d(k) \end{aligned}$$

とする。 $D(z) = z - d$ とするとき、 $T(z) = z$ 、 $Q(z) = 1$ とおけばよい。 $T(z)$ の次数の例題 1 との違いは、システム表現によるものである。このとき(22)は

$$(z-d)\{y(k+1) + p_1 y(k) + p_2 y(k-1) - r_1 u(k) - r_2 u(k-1)\} = z\{y(k+1) + p_d y(k) - r_d u_d(k)\}$$

となり、(例題 1) と同じ制御入力 $u(k)$ が求まる。上式で、 $zy(k+1)$ が消去されることが重要である。これにより、因果律を満たす実現可能な制御入力を求めることが可能となる。

3. 2 非線形系

ここで扱うシステムは

$$y(k+1) = ru(k) + f_k(y, u), \quad r \neq 0 \quad (23)$$

$$f_k(y, u) \equiv f(y(k), y(k-1), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots)$$

であり、右辺第一項のみが重要である。また、規範モデルは

$$y_d(k+1) = f_{d,k}(y_d, u_d) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & f_{d,k}(y_d, u_d) \\ & \equiv f(y_d(k), y_d(k-1), \dots, u_d(k), u_d(k-1), \dots) \end{aligned}$$

とする。補償を考慮しない最も簡単な場合は

$$\begin{aligned} y(k+1) - ru(k) - f_k(y, u) \\ = y(k+1) - f_{d,k}(y, u_d) \end{aligned} \quad (25)$$

より、

$$u(k) = \frac{1}{r} \{f_{d,k}(y, u_d) - f_k(y, u)\} \quad (26)$$

が MMC として求まる。これを制御入力として(23)に用いると、閉ループ系は

$$y(k+1) = f_{d,k}(y, u_d) \quad (27)$$

となっていることが容易に確かめられる。

実際への応用においては、(3)のシステム表現を正確に獲得することは困難である。代わりに、その推定値によるシステムモデル

$$y(k+1) = \hat{r}u(k) + \hat{f}_k(y, u), \quad \hat{r} \neq 0 \quad (28)$$

を利用することになり、実際の MMC は

$$u(k) = \frac{1}{\hat{r}} \{f_{d,k}(y, u_d) - \hat{f}_k(y, u)\} \quad (29)$$

となる。このとき、規範モデルとの正確な一致は期待できず、過渡特性は勿論のこと、定常特性においても偏差が発生する。そのための補償要素の導入として、

$$\begin{aligned} Q(z)D(z)\{y(k+1) - ru(k) - f_k(y, u)\} \\ = T(z)\{y(k+1) - f_{d,k}(y, u_d)\} \end{aligned} \quad (30)$$

が一つの方法である。ここに $Q(z)$ 、 $D(z)$ 、 $T(z)$ はすべてモニック多項式であり、

$$\deg Q(z)D(z) = \deg T(z) \quad (31)$$

とする。これにより y の最高次が消去され、実行可能な入力が求まる。また、 $D(z)$ は積分機能として他と区別している。これを用いた例は後記の数値例を参照されたい。

3. 2 むだ時間を含む非線形系

本稿で提案する手法は、むだ時間を含むシステムに対しても全く同じ考え方で適用可能であるが、因果律を満たす制御入力を得るために、若干の工夫が必要となる。1ステップのむだ時間を含むシステムとして

$$y(k+1) = ru(k-1) + f_k(y, u), \quad r \neq 0 \quad (32)$$

$$f_k(y, u) \equiv f(y(k), y(k-1), \dots, u(k-2), u(k-3), \dots)$$

を考える。これは

$$y(k+2) = ru(k) + f_{k+1}(y, u) \quad (33)$$

と同じである。これに提案するモデルマッチング法を適用すると、制御入力 $u(k)$ に未来の出力 $y(k+1)$ が含まれ、実行不可能となる。なぜなら

$$\begin{aligned} & f_{k+1}(y, u) \\ & \equiv f(y(k+1), y(k), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots) \end{aligned} \quad (34)$$

であり、右辺に $y(k+1)$ を含むからである。この問題を解決するために、この $y(k+1)$ に(32)を代入して、(33)の代わりに

$$y(k+2) = ru(k) + f_k(y, u) \quad (35)$$

$$f_k(y, u) \equiv f(y(k), y(k-1), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots)$$

を扱えばよい。 m ステップのむだ時間を含む場合も、システム、および規範モデルは

$$y(k+m+1) = ru(k) + f_k(y, u) \quad (36)$$

$$y_d(k+m+1) = f_{d,k}(y_d, u_d) \quad (37)$$

と表されているとして一般性を失わない。このとき MMC の設計手法は

$$\begin{aligned} Q(z)D(z)\{y(k+m+1) - ru(k) - f_k(y, u)\} \\ = T(z)\{y(k+m+1) - f_{d,k}(y, u_d)\} \end{aligned} \quad (38)$$

となるが、同じ次数のモニック多項式である $Q(z)D(z)$ と $T(z)$ は、最初の $m+1$ 項を等しくしなけ

ればならない. 例えば、

$$Q(z)D(z) = z^{m+1} + t_1 z^m + \dots + t_m z + q_{m+1} \quad (39)$$

$$T(z) = z^{m+1} + t_1 z^m + \dots + t_m z + t_{m+1} \quad (40)$$

とすることにより、因果律を満たした制御入力
が得られる. また、

$$q_{m+1} = -1 - t_1 - \dots - t_m \quad (41)$$

と選ぶことにより、

$$Q(z)D(z) = (z^m + \dots)(z-1) \quad (42)$$

となって、積分機能を持たせることができる.

(例題3) $m=1$ の場合で、 $T(z) = z^2 + t_1 z + t_2$ 、

$Q(z)D(z) = z^2 + q_1 z + q_2$ とおくと

$$\begin{aligned} ru(k) &= (q_1 - t_1)y(k+1) + (q_2 - t_2)y(k) \\ &\quad - q_1 ru(k-1) - q_2 ru(k-2) \\ &\quad - f_k(y, u) - q_1 f_{k-1}(y, u) - q_2 f_{k-2}(y, u) \\ &\quad + f_{d,k}(y, u_d) + t_1 f_{d,k-1}(y, u_d) + t_2 f_{d,k-2}(y, u_d) \end{aligned}$$

となり、 $q_1 = t_1$ が必要となる. このとき

$$\begin{aligned} ru(k) &= (q_2 - t_2)y(k) - t_1 ru(k-1) - q_2 ru(k-2) \\ &\quad - f_k(y, u) - t_1 f_{k-1}(y, u) - q_2 f_{k-2}(y, u) \\ &\quad + f_{d,k}(y, u_d) + t_1 f_{d,k-1}(y, u_d) + t_2 f_{d,k-2}(y, u_d) \end{aligned} \quad (*)$$

である. このとき、

$$q_2 = -1 - t_1$$

とすれば、積分機能を持つことを示す. そのために、 $u_d(k) \equiv 1$ のステップ応答において、閉ループ系は安定であり、すべての信号は有界なとき、その定常状態における値を

$$u(k) = u(k-1) = u(k-2) = \bar{u}, \quad y(k) = \bar{y},$$

$$f_k(y, u) = f_{k-1}(y, u) = f_{k-2}(y, u) = \bar{f},$$

$$f_{d,k}(y, u_d) = f_{d,k-1}(y, u_d) = f_{d,k-2}(y, u_d) = \bar{f}_d$$

とおくと、上の(*)から

$$\begin{aligned} (1+t_1+q_2)r\bar{u} &= (q_2-t_2)\bar{y} - (1+t_1+q_2)\bar{f} \\ &\quad + (1+t_1+t_2)\bar{f}_d \end{aligned}$$

となる. 従って、

$$q_2 = -1 - t_1$$

のときは

$$(1+t_1+t_2)\bar{y} = (1+t_1+t_2)\bar{f}_d = (1+t_1+t_2)\bar{y}_d$$

となり、 $1+t_1+t_2 \neq 0$ であれば

$$\bar{y} = \bar{y}_d$$

が成立する. すなわち、定常偏差 (オフセット) $= 0$ となり、積分機能の働きをしていることがわかる.

4. 多変数系

本稿で提案しているモデルマッチング法は多変数系にも拡張可能である. むだ時間を含まない場合は単純であるが、含む場合にはその含まれ方により、形式的な分類が必要となる.

4. 1 むだ時間を含まない場合

多変数系の非線形系を

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{R}\mathbf{u}(k) + \mathbf{f}_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (43)$$

で表す. $\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{f}_k$ は n 次元ベクトルであり、 \mathbf{R} は n 次正方行列とする. また規範モデルを

$$\mathbf{y}_d(k+1) = \mathbf{f}_{d,k}(\mathbf{y}_d, \mathbf{u}_d) \quad (44)$$

とする. \mathbf{R} が正則なとき、スカラーの場合と同様に

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{R}\mathbf{u}(k) - \mathbf{f}_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ = \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{f}_{d,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}_d) \end{aligned} \quad (45)$$

から、MMC は

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{R}^{-1} \{ \mathbf{f}_{d,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}_d) - \mathbf{f}_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \} \quad (46)$$

と求まる. これは補償要素を全く含まない場合であり、これを考慮するときは、

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(z)\mathbf{D}(z) \{ \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{R}\mathbf{u}(k) - \mathbf{f}_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \} \\ = \mathbf{T}(z) \{ \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{f}_{d,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}_d) \} \end{aligned} \quad (47)$$

から $\mathbf{u}(k)$ を求めればよい. 例えば、 $\mathbf{Q}(z) = \mathbf{I}$, $\mathbf{T}(z) = z\mathbf{I}$, $\mathbf{D}(z) = (z-d)\mathbf{I}$ のときは

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) = \mathbf{R}^{-1} \{ -\mathbf{f}_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) - d(\mathbf{y}(k) - \mathbf{R}\mathbf{u}(k-1) \\ - \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{y}, \mathbf{u})) + \mathbf{f}_{d,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}_d) \} \end{aligned} \quad (48)$$

となる. また、システムでなくシステムモデル

$$\mathbf{y}(k+1) = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{f}}_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (49)$$

で対処する場合には

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \{ -\hat{\mathbf{f}}_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) - d(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{R}}\mathbf{u}(k-1) \\ - \hat{\mathbf{f}}_{k-1}(\mathbf{y}, \mathbf{u})) + \mathbf{f}_{d,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}_d) \} \end{aligned} \quad (50)$$

が実際のMMCとなる.

4. 2 むだ時間を含む場合

行列 \mathbf{R} が正則でないときは、多変数のどれかにむだ時間を含まれることになるが、一般論での説明は冗長となるので、3変数の場合を例として述べる. すなわち、システムとして

$$\begin{aligned} y_i(k+1) = \mathbf{r}_i^T \mathbf{u}(k) + \mathbf{s}_i^T \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{t}_i^T \mathbf{u}(k-2) \\ + f_{i,k}(y, \mathbf{u}), \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (51)$$

を考える. これはまた

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{R}\mathbf{u}(k) + \mathbf{S}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{T}\mathbf{u}(k-2) \\ + \mathbf{f}_k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (52)$$

と表される. このとき、行列 \mathbf{R} のランクにより、

以下のように分類される。

[Case 1] $\text{rank}\mathbf{R} = \text{rank}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = 3$:

この場合は \mathbf{R} が正則であるので、4. 1 の結果が適用される。

[Case 2] $\text{rank}\mathbf{R} = \text{rank}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = 2$:

このとき一般性を失うことなく $\text{rank}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 2$ を仮定すると、 $\mathbf{r}_3 = c\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2$ を満たすスカラー c, d が存在する。そこで、新しい変数

$$y_4(k) = y_3(k) - cy_1(k) - dy_2(k) \quad (53)$$

を導入すると、

$$y_4(k+1) = \mathbf{q}_1^T \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{q}_2^T \mathbf{u}(k-2) + f_{4,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (54)$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{s}_3 - c\mathbf{s}_1 - d\mathbf{s}_2, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{t}_3 - c\mathbf{t}_1 - d\mathbf{t}_2,$$

$$f_{4,k} = f_{3,k} - cf_{1,k} - df_{2,k}$$

と、むだ時間を含むサブシステムが陽に現れる。すると全システム (51) は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \\ y_4(k+2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \mathbf{q}_1^T \end{pmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ \mathbf{s}_2^T \\ \mathbf{q}_2^T \end{pmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ &+ \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{u}(k-2) + \begin{pmatrix} f_{1,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ f_{2,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ f_{4,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (55)$$

あるいは、等価であるが

$$y_1(k+1) = \mathbf{R}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{S}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{T}_1 \mathbf{u}(k) + \mathbf{f}_{1,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (56)$$

と表される。ここに記号の置き換えは自明であるので、省略する。

[Case 2-1] $\text{rank}\mathbf{R}_1 = \text{rank}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{q}_1) = 3$:

このときシステムは内部に 1 ステップのむだ時間を含み、 \mathbf{R}_1 が正則であるので、[Case 1] と同様に MMC を決定することができる。

[Case 2-2] $\text{rank}\mathbf{R}_1 = \text{rank}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{q}_1) = 2$:

このとき、 $\text{rank}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 2$ を仮定しているのので、 $\mathbf{q}_1 = c_1 \mathbf{r}_1 + d_1 \mathbf{r}_2$ を満たす c_1, d_1 が存在する。すると (54) を導いたと同様に、新しい変数を導入して

$$y_5(k+1) = \mathbf{q}_3^T \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{q}_4^T \mathbf{u}(k-2) + f_{5,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (57)$$

が導かれる。これは、システムが少なくとも 2 ステップのむだ時間を含んでいることを示している。そして、 $\mathbf{u}(k)$ の係数行列が正則であれば、

[Case 2-1] と同様に MMC を決定できる。しかし、正則でなければ、再び同様な変数変換を行い、得られる $\mathbf{u}(k)$ の係数行列が正則となるまで繰り返される。

[Case 3] $\text{rank}\mathbf{R} = \text{rank}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = 1$:

この場合は、 $\mathbf{r}_2 = c\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_3 = d\mathbf{r}_1$ が成立する c, d が存在する。すると [Case 2] と同様にして、少なくとも 1 ステップのむだ時間を含むサブシステムが 2 つ存在することになる。その結果、適切な変数変換の後、全システムは

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ y_4(k+2) \\ y_5(k+2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{q}_1^T \end{pmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \mathbf{q}_2^T \end{pmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ &+ \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{u}(k-2) + \begin{pmatrix} f_{1,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ f_{4,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ f_{5,k}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (57)$$

となる。これはまた、入力変数の先頭行列のランクにより分類される。

[Case 3-1] $\text{rank}\mathbf{R}_2 = \text{rank}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = 3$:

このとき 2 つのサブシステムはそれぞれ 1 ステップのむだ時間を含み、MMC は [Case 2-1] と同様に決定できる。

[Case 3-2] $\text{rank}\mathbf{R}_2 = \text{rank}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) \leq 2$:

この場合、2 つのサブシステムの一方は 1 ステップのむだ時間を含み、他方は 2 ステップ以上である場合、あるいはともに 2 ステップ以上のむだ時間を含む場合など、[Case 2-2] と同様な議論が、得られる $\mathbf{u}(k)$ の係数行列が正則となるまで繰り返される。

[Case 4] $\text{rank}\mathbf{R} = \text{rank}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = 0$:

この場合は $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ のときであり、(52) で、 \mathbf{R} の代わりに \mathbf{S} を対象として、同じ議論が繰り返される。

5. 数値例

ここでは数値例によるシミュレーション結果を述べる。まず、システムとシステムモデルが次式によって表す。

$$y(k+1) = 0.5y(k) - 0.06y(k-1) + 0.29 \sin y(k) + 0.8(0.7u(k) - 0.4u(k-1))$$

$$\hat{y}(k+1) = 0.5y(k) - 0.06y(k-1) + 0.29 \sin y(k) + 0.7u(k) - 0.4u(k-1)$$

システムとそのモデルとはゲインの違いを与えている。また、規範モデルは

$$y_d(k+1) = 0.9y_d(k) - 0.14y_d(k-1) + 0.15u_d(k) + 0.09u_d(k-1)$$

とする。ここで、 $D(z) = z - d$ とし、 $T(z) = z^2$ 、 $Q(z) = 1$ としたときの MMC は

$$(z-d)\{y(k) - 0.5y(k-1) + 0.06y(k-2) - 0.29 \sin y(k-1) + 0.7u(k-1) - 0.4u(k-2)\} = z\{y(k) - 0.9y(k-1)$$

$$-0.14y(k-2)+0.15u_d(k-1)+0.09u_d(k-2)\}$$
 を $u(k)$ で表すことにより求まる. 実際には

$$(1-dz^{-1})\{y(k)-0.5y(k-1)+0.06y(k-2)-0.29\sin y(k-1)$$

$$+0.7u(k-1)-0.4u(k-2)\}=\{y(k)-0.9y(k-1)$$

$$-0.14y(k-2)+0.15u_d(k-1)+0.09u_d(k-2)\}$$
 から求めたほうが簡単である.

$y(0)=-0.3$ として初期値の違いを与えているが、ゲインも異なっているので、補償なしでは過渡特性は勿論のこと、定常偏差も 0 とはならない. そこで、 d の各値による違いを以下に示す. Fig.1 は $d=0$ であり、補償要素の全くない場合である. 当然、大きな定常偏差 (オフセット) が生じている. そこで、 $d=0.5, 1, 1.5$ と大きくしていった場合が Fig.2、Fig.3、Fig.4 である. $d=0.5$ では、オフセットがほぼ半減し、 $d=1$ では完全に 0 となっている. すなわち、 $D(z)=z-1$ が積分器の働きをしていることが確認できる. また、 $d=1.5$ とさらに大きくすると、システムの出カゲインが大きくなりすぎて、 $d=0$ とは逆むきのオフセットを生じている.

一般に、オフセットはなしが好ましいことは当然であるが、積分器の導入は、システムモデル誤差に対する安定領域を狭くし、いわゆるロバスト性を弱くすることになる. このオフセットの大きさと安定領域とのトレードオフを図るのが $D(z)=z-d$ であり、中間 ($0 < d < 1$) の値が意味をもってくることになる. すなわち、 $D(z)=z-d$ は積分器の積分機能に対するパワーレベルを表しているとも考えられる.

6. まとめ

本論では、筆者の最近の研究の中から、モデルマッチング法について述べた. この方法は古くから議論されていたが、線形システムおよびその周辺に対象が限られていた. しかし、本論で提案した設計法は、その手法がより簡単になっていると同時に、非線形システムにも適用可能なものである. さらに、むだ時間系、多変数系にも拡張可能であり、最も簡潔であり、一般的な設計法であると考えている. この簡単な方法が今頃になって得られたかの最大の理由は、そのシステム表現にある. 伝統的にはラプラス変換による伝達関数表現がよく知られているが、基本的に線形表現に限定される. その後は状態変数表現が活発となる. これはシステムの内部表現とその構造にも立ち入っており、数学的により厳密な理論と設計法の確立に貢献してきた. 非線形にも拡張可能であるが、

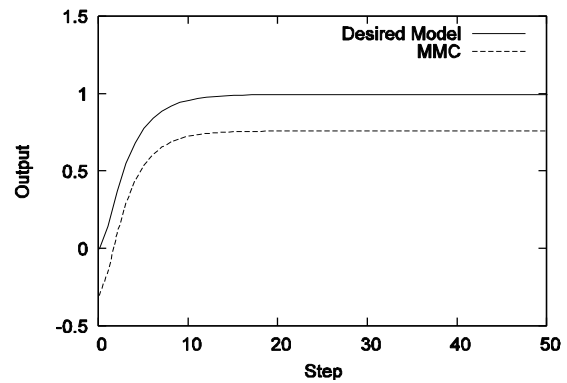


Fig.1 Step response with $d=0$

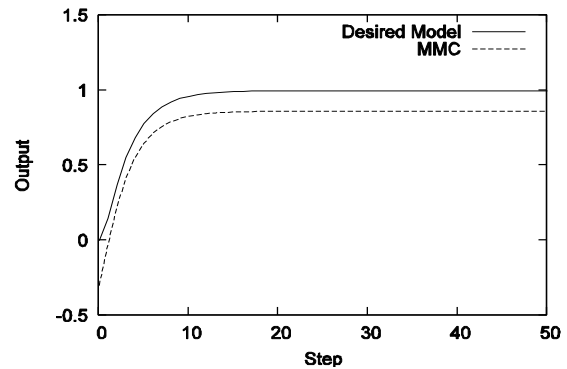


Fig.2 Step response with $d=0.5$

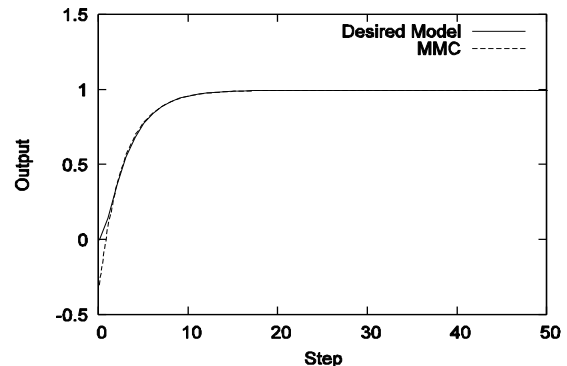


Fig.3 Step response with $d=1$

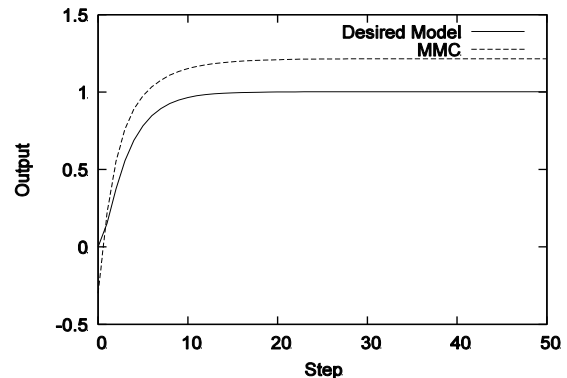


Fig.4 Step response with $d=1.5$

状態方程式、出力方程式をととも非線形の一般形にすると、線形近似以外に対処の方法がなくなってしまう。非線形への拡張を可能とする本論の手法は差分方程式を用いており、唯一、現時点の制御入力変数が線形に存在することを仮定している。この場合、状態空間法で指摘された伝達関数法の欠陥である可制御性など内部情報の不足については、差分方程式についても注意を払う必要がある。

最後に、筆者の最近の研究の中で、さらに推し進めたいものに、線形計画法に対する新しい解法の研究[14]がある。これは超平面に対する法線ベクトルに着目した方法であり、考え方は筆者の古い研究[15]と同様である。この方法を巡回セールスマン問題など各種の数理計画問題の解法として拡張することが夢であったが、どなたかが引き継いで発展させていただけることを願っている。

参考文献

- [1] Y. Yamamoto and P. N. Nikiforuk : A New Supervised Learning Algorithm for Multilayered and Interconnected Neural Networks, IEEE Tr. on Neural Networks, vol.11, no.1, pp.36-46, 2000.
- [2] Y. Yamamoto : A Double Parasols Neural Network and A Target Following Control For Nonlinear Discrete Time Systems, International Journal of Intelligent Control and Systems, vol.14, no.2, pp.173-179, 2009.
- [3] Y. Yamamoto and S. Hasegawa : A New Neural Network and its Application to Nonlinear Discrete Time System, Proc. of IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control, pp.66-70, 2009.
- [4] Y. Yamamoto : Target Following Control for Nonlinear Discrete Time Systems, Proc. of CACS International Automatic Control Conference, SaA06, 2009.
- [5] Y. Yamamoto : Trigonometric Polynomial Neural Network and its Application to Identification and Control, Proc. of the 11th International Conference on Control and Applications, 213-218, 2009.
- [6] Y. Yamamoto : Identification and Control of Nonlinear Systems using a Trigonometric Polynomial Neural Network, to appear in International Journal of Advanced Mechatronic Systems, 2010.
- [7] W. A. Wolovich : The use of state feedback for exact model matching, SIAM J. Control, vol.3, pp.512-523, 1972.
- [8] S.H.Wang and C.A.Desoer : The exact model matching of linear multivariable systems, IEEE, Tr. on AC, vol.17, pp.491-497, 1972.
- [9] K. Ichikawa : Control system design based on exact model matching techniques, Lecture Notes in Control and Information Science, 74, NewYork, Springer-Verlag, 1985.
- [10] Y. Yamamoto : Model matching and adaptive control with disturbance consideration, Tr. of SICE, vol.24, pp.100-102, 1988.
- [11] P. Colaneri and V. Kucera : The model matching problem for periodic discrete-time systems, IEEE Tr. on AC, vol.42, pp.1472-1476, 1997.
- [12] D.J.N.Limebear, et.al., On the design of robust degree of freedom controllers, Automatica, vol.29, pp.157-168, 1993.
- [13] T.Sogo:Calculation of non-causal solution for the model-matching problem and its application to preview feedforward control, Tr. of SICE, vol.42, pp.40-46, 2006.
- [14] Y. Yamamoto : A new method for solving a linear programming problem, The 49th IEEE Conference on Decision and Control, to be presented, 2010.
- [15] Y. Yamamoto, M. M. Gupta and P. N. Nikiforuk : Analysis and Synthesis of Nonlinear Systems Having Limit Surfaces with Prescribed Stability Properties, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.111, pp.49-64, 1985.

(受理 平成22年10月29日)