

衝撃波背後の状態と境界面上での状態を繋ぐ架け橋となる領域が存在しなくてはならない。この領域が接触領域 (非粘性流体の場合においては接触面と呼ばれている) なのである。接触領域は、前述の流れ場領域 (2') を、境界面から接触領域までの領域 (3) と接触領域から衝撃波までの領域 (2) とに分ける。つまり、流れ場の初期形成と同時に生成された衝撃波とそれに追隨してその背後に形成される接触領域もが、無限の時間経過後も、消滅することなく無限遠領域を伝播し続けていると考えるべきなのである。この状況を模式的に表わすとすれば Fig. 1 のようになる。衝撃波の存在

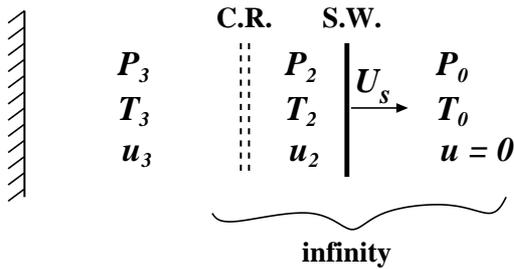


Fig. 1: A schematic view of an evaporation flow field in a half-space at infinitely large times. The shock wave (S.W.) and the contact region (C.R.) are at infinity in the order drawn. The specified conditions at infinity are that $P = P_0$, $T = T_0$ and $u = 0$.

というこれまでの認識に加えて、この接触領域の存在を考慮すれば、無限時間経過後の流れ場に対する解は一意的に決まる。ここでは、前述の半空間における蒸発流に対する擬定常解の構築を考えてみた。相変化は系の強い非平衡性に起因するため、相変化に伴うこの種の流れ問題は本来は気体論方程式 (例えば、BGK 方程式 [3]) に基づくべきである。しかし、ここで用いた支配系は Onishi *et al.* [2] によって提案された蒸発・凝縮問題に対する「流体力学的定式化」である。この流体力学的定式化は、相変化に伴うこの種の問題に対して、気体論方程式に基づく結果と同等の結果を与え、かつ、通常の流体力学的レベルで取り扱い可能としている点が大きなメリットとなっている支配系である。ここでの同じ問題を、ある静止平衡状態を初期条件とする初期値問題として、流体力学的定式化に基づいて数値シミュレーションを行ってみた。その結果と擬定常解との比較も行っている。この擬定常解は、厳密な意味での定常解ではもちろんないが、無限時間経過後の全流れ場領域を記述する解で、定常解に準じる解と考えてよいであろう。何故ならば、無限時間経過後の流れ場の様子は、凝縮相 (あるいは物体) から無限遠点の手前までの広大な領域において、時間的には最早変化しない状態となるからである。もちろん、この領域は、その内部の流れ場の一様性を保持しつつ、時間と共にいつまでも膨張し続けているのである。

2. 問題の定式化

ここでは、蒸気とその凝縮相からなる 1 次元の単一気体 2 相系を考える。気相領域を $x > 0$ 、凝縮相は平面形状をもつとしてその領域を $x < 0$ とする。 x は凝縮相界面上に原点をもつ座標である。初期に、この 2 相系は温度 T_0 で静止平衡にあり、その状態での気相の圧力および密度を、それぞれ、 P_0 および ρ_0 としておく。ある瞬間 $t = 0$ で、凝縮相の温度を急に T_W へと上昇させたとする。これによって、凝縮相界面で蒸発過程が生じ、同時に生成された衝撃波およびそれに追隨する接触領域が、それらの伝播過程を通して、気相中に非定常な流れ場を形成していく。無限時間経過後は、無限遠点を除く全領域で気体の運動は実質的には定常と見做せるような振る舞いを呈するであろう。ここでは、このような流れ場を蒸発・凝縮相問題に対する支配方程式系としての流体力学的定式化 [2] に基づいて調べる。その定式化によれば、前述のような無限時間経過後の流れ場に対して、方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u \frac{\partial T}{\partial x} &= \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

そして、凝縮相界面 ($x = 0$) と無限遠 ($x \rightarrow \infty$) での境界条件は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{P - P_W}{P_W} &= C_4^* \frac{u}{(2RT_W)^{1/2}} \\ \frac{T - T_W}{T_W} &= d_4^* \frac{u}{(2RT_W)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad \text{at } x = 0 \quad (2)$$

および

$$\left. \begin{aligned} P &\longrightarrow P_0 \\ T &\longrightarrow T_0 \\ u &\longrightarrow U_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 $C_4^* = -2.132039$ 、 $d_4^* = -0.446749$ で、そして、 u 、 P 、 T は、それぞれ、気体の速度、圧力、温度である。 ν は気体の動粘性係数、 κ は温度拡散係数で、共に、一定としておく。(2) 式における T_W は凝縮相の温度、 P_W はその温度に対する飽和蒸気圧力で、これら 2 つは次の Clapeyron-Clausius の関係式

$$\frac{P_W}{P_0} = \exp \left\{ -\Gamma \left(\frac{T_0}{T_W} - 1 \right) \right\}, \quad \Gamma \equiv \frac{h_L}{RT_0} \quad (4)$$

で結ばれている。ここで、 h_L は単位質量当たりの潜熱で、 Γ は $\Gamma \equiv h_L/(RT_0)$ で定義される無次元パラメーター (潜熱パラメーターと呼ばれている) である。

比 T_W/T_0 とその飽和蒸気圧力比 P_W/P_0 に対して

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_3}{P_0} &= \frac{P_W}{P_0} \left\{ 1 + C_4^* \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{T_0}{T_W} \right)^{1/2} \frac{U_3}{c_0} \right\} \\ \frac{P_3}{P_0} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_s^2 - 1) \\ \frac{U_3}{c_0} &= \frac{2}{\gamma+1} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

を得る。上の (13) 式の第 3 番目の関係式から、 M_s を U_3/c_0 でもって

$$M_s = \frac{\gamma+1}{4} \frac{U_3}{c_0} + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} \right)^2 \left(\frac{U_3}{c_0} \right)^2 + 1} \quad (14a)$$

あるいは

$$M_s = \tilde{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 1} \quad \text{with} \quad \tilde{\alpha} \equiv \frac{\gamma+1}{4} \frac{U_3}{c_0} \quad (14b)$$

のように表わし、(13) 式の第 1 と第 2 の関係式に代入して、それらの同等性を考慮すれば、 $\tilde{\alpha}$ に対する次の代数方程式

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} 2\tilde{\alpha} \left(\tilde{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 1} \right) \\ = \frac{P_W}{P_0} \left\{ 1 + C_4^* \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} \frac{4}{\gamma+1} \left(\frac{T_0}{T_W} \right)^{1/2} \tilde{\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。これより、与えられた T_W/T_0 と Γ (あるいは、 P_W/P_0) に対して、 $\tilde{\alpha}$ すなわち U_3/c_0 が一意的に決まる。この U_3/c_0 の値でもって、(8)、(11) および (12) 式より、所望のその他の諸量 P_3 、 T_3 、 U_3 、 $P_2 (= P_3)$ 、 T_2 、 $U_2 (= U_3)$ および M_s の値が一意的に決まることになる。結局、ここでの問題の無限時間経過後 ($t/\tau_0 \rightarrow \infty$) の流れ場に対する 擬定常解 は

$$\left. \begin{aligned} u &= U_3 \\ P &= P_3 \\ T &= U_3 \end{aligned} \right\} \quad \text{for} \quad 0 \leq \frac{x}{L} \leq \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} \frac{U_3}{c_0} \frac{t}{\tau_0} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= U_2 \\ P &= P_2 \\ T &= T_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{for} \quad \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} \frac{U_3}{c_0} \frac{t}{\tau_0} \leq \frac{x}{L} \leq \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} \frac{U_s}{c_0} \frac{t}{\tau_0} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 \\ P &= P_0 \\ T &= T_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{for} \quad \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} \frac{U_s}{c_0} \frac{t}{\tau_0} \leq \frac{x}{L} \quad (18)$$

で与えられることになる。ここで、 L は $L \equiv (\sqrt{\pi}/2) l_0$ で定義される長さのスケールで、 τ_0 は $\tau_0 \equiv L/(2RT_0)^{1/2} = l_0/(8RT_0/\pi)^{1/2}$ で定義された時間スケールである。 l_0 は無限遠の状態 (あるいは、ある初

Table 1: Results obtained for the values of $P_3 (= P_2)$, $U_3 (= U_2)$, T_3 , T_2 and $M_s \equiv U_s/c_0$ for various given values of T_W/T_0 with $\Gamma \equiv h_L/(RT_0) = 11$.

T_W/T_0	P_W/P_0	P_3/P_0	U_3/c_0	T_3/T_0	T_2/T_0	M_s
1.01	1.115	1.051	0.030	0.998	1.020	1.020
1.02	1.241	1.101	0.058	0.996	1.039	1.040
1.03	1.378	1.151	0.086	0.995	1.058	1.059
1.04	1.527	1.201	0.112	0.994	1.076	1.077
1.05	1.688	1.250	0.137	0.993	1.094	1.095
1.06	1.864	1.298	0.160	0.993	1.110	1.113
1.08	2.259	1.392	0.205	0.993	1.143	1.146
1.10	2.718	1.482	0.245	0.995	1.172	1.177

期状態としてもよい) における気体分子の平均自由行路で、その定義は $l_0 = (\mu_0/P_0) (8RT_0/\pi)^{1/2}$ で与えられる。したがって、長さのスケール L は気体分子の平均自由行路の程度となっており、時間スケール τ_0 は分子間の衝突に要する時間の程度となっている。ついでながら、 $l_0 \sim 0.1 \mu\text{m}$ で、 $c_0 \sim 300 \text{m/s}$ 程度であれば、 $\tau_0 \sim 0.3 \times 10^{-3} \mu\text{s}$ 程度の極めて小さい値となる。以上の解に加えて、 M_s の値より、衝撃波の伝播スピードも $U_s = M_s c_0$ として決まる。衝撃波はこの伝播スピード U_s で、無限遠をさらに無限遠へといつまでも伝播し続けているのである。接触領域は、全体として、流れと共にそのスピード $U_3 (= U_2)$ でゆっくりと無限遠へ向け、拡散によってその領域を広げつつ、動き続ける。さて、一例ではあるが、(16) – (18) 式における諸量の値を表にしたものを Table 1 に載せた。代数方程式 (15) を単に数値的に解いて得たものである。例えば、 $T_W/T_0 = 1.03$ 、 $\Gamma = 11$ ($P_W/P_0 = 1.378$) の場合の流れ場では、無限時間経過後でも衝撃波は無限遠を $U_s = 1.059 c_0$ なるスピードで伝播し続けていることが分かる。このときの流れ場および接触領域の速さは $u = 0.086 c_0$ 程度となっている (次節の Figs. 2 と 3 も併せて参照)。

4. 数値シミュレーション解析

擬定常解のチェックのため、この問題を、ある一様な初期条件から出発する初期値問題として、流体力学的定式化 [2] に基づき、シミュレーション解析を行い、形成された流れ場の時間的推移過程を追ってみた。具体的には、初期条件として、(3) で指定した無限遠での条件と同じものをとってある。この初期値問題に対しては、支配系としての流体力学的定式化は、本来の形である非定常な圧縮性 Navier-Stokes 方程式と気体論解析から導かれた凝縮相界面での適切な条件 [4] から成る。この適切な条件とは (2) 式と同じものである。この流れ場における流体力学的諸量は、次の無次元特性パラメーター

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_W}{T_0} & \quad (\text{凝縮相界面温度比}) \\ \Gamma & \quad (\text{潜熱パラメーター}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

