

## ヒット現象の数理モデルとマーケティング・サイエンス

石井 晃・吉田 就彦<sup>\*1</sup>・新垣 久史<sup>\*1</sup>・山崎 富美<sup>\*2</sup>

鳥取大学工学部応用数理工学科・

<sup>\*1</sup>デジタルハリウッド大学大学院・<sup>\*2</sup>テクノラティジャパン

Mathematical model for hit phenomena and marketing science

Akira ISHII, Narihiko YOSHIDA<sup>\*1</sup>, Hisafumi ARAKAKI<sup>\*1</sup> and Fumi YAMAZAKI<sup>\*2</sup>

Department of Applied Mathematics and Physics, Faculty of Engineering

Tottori University, Tottori, 680-8552 Japan

E-mail: ishii@damp.tottori-u.ac.jp

<sup>\*1</sup>Digital Hollywood University, Tokyo, 120-0000 Japan

<sup>\*2</sup>TechnoratiJapan, Osaka, 545-0000 Japan

**Abstract:** Mathematical model of hit phenomena is presented as time-dependent non-linear, non-equilibrium phenomena. The derived equation include the marketing share model and the Bass model. The indirect communication as rumor or popularity plays an important role in hit phenomena. The decay of rumor is also studied using our hit equation and the decay length is only two days.

**Key Words:** Hit, Entertainment, Marketing, Econophysics

### 1. はじめに

経済現象の中で特にエンタテインメント産業と呼ばれる分野を数理的に扱うモデルを構築して、『大ヒット曲』などが生まれるヒット現象[1]を数理的な側面から捉えてこれを実験検証することを目的とする。これが成功すればマーケティングに有効な手法を与えるはずである。

いわゆる大ヒットなどのヒット現象は売れる商品が売れない商品に対して桁違いに売れるという点で特異である。その商品自体の魅力が10倍程度しか違わないとしても、その売り上げは、ヒット曲で言えば数千枚から百万枚までの違いとなる。このことは、売り上げがその商品自体の魅力に対して非線形的に決まるということを示唆する。

また、ヒット現象は時間に依存した現象で、発売後（封切り後）短時間で盛り上がり、そして減衰していくのが特徴である。そのため、通常の経済現象の基本である需要と供給の均衡が見られない。需要と供給が均衡するのは、発売から数年経ってほとんど売れなくなった頃である。その意味では均衡はあるとも言えるが、少なくとも興味あるものではない。つまり、ヒット現象とはきわめて時間に敏感に依存した非平衡経済現象である。

また、エンタテインメント産業にはある種の特長がある。それぞれの商品の個別性である。例えば中島美嘉のCDを買いに行った人が、そのCDが品切れで、店員の薦められるままに浜崎あゆみや倅田来未を買うことはまずない。しかし、例えばこれがHDDレコーダなら、松下が品切れで東芝を買う人などは、珍しくないであろう。その意味で、エンタテインメント産業ではマーケティングシェアというものが存在しない。CDやダウンロードの売り上げで、ソニーミュージックとA V E Xが激しいシェア争いを展開するという話は聞いたこともない。そもそも、それぞれの曲が次々に現れては短時間で売り上げが終わって消えていく繰り返しで、シェアなど存在しない、あるいは時々刻々のシェアは存在しても、あまり意味はない。

さらに普通の経済活動と大きく違うのは価格である。日本の音楽産業の場合、CDにしるダウンロードにしる一曲ごと（あるいは一枚ごと）の販売価格は決まっていて、それぞれの曲ごとに需要と供給のバランスから価格が決定されることはない。しかも、一曲ごとの単価がきわめて安いので、少なくとも一ヶ月に数曲購入する程度であれば、あまり価格は気にせずに購入するのが普通である。

従って、売り上げ等の分析において、価格はまったく役割を演じない。

このように、CDなどのヒット現象は、経済現象としてはいくつかの特異な特徴のある現象と言える。本論文では、以前に発表した石井・吉田(2005)の論文[2]で提出されたヒット現象の数理モデルの方程式を基礎とし、この式をマーケティングサイエンスの中で位置づけることと、ヒット現象の減衰あるいは収束を取り入れることを行う。また、最後に論文[2]で導入された平均場近似といえる「均等近似」から踏み出して、シミュレーションを行う。

## 2. 数理モデル

### 2. 1 消費者個人の視点でのモデル化

まず、最も単純な場合から考えていく。ある商品が店頭で並んでいるとする。今考えている社会の人口がN人であるとして、それらの人で1日にその店に行く人の割合を $R_{shop}$ 、さらに店に入った人の中でその商品を実際に購入する人の割合を店へ訪れるごとに $R_{fb}$ とし、一人が一つ商品を購入したとすると、1日に商品が売れる数は

$$R_{fb} R_{shop} N \quad (1)$$

である。時間の単位が1日であるとすれば、 $\Delta t$ の時間で商品が売れる数 $\Delta I$ は

$$\Delta I = R_{fb} R_{shop} N \Delta t \quad (2)$$

となる。直接購入された商品の数ではなく、“購入意欲(Purchase-Intention)”という量を考える。発売初日の販売数が発売日までの購入意欲の総和と考え、発売日以降は購入意欲がそのまま実販売数と仮定したのが図1であり、このように発売初日に販売数が集中する場合も購入意欲としては発売日以前から少しずつ盛り上がっていく連続量と考える。

インターネット経由の場合店に行く必要がない。着目するWebへのアクセス数は以前にそこを見ていたアクセス数に比例すると考え、前日のアクセス数のC倍だけ翌日にアクセスがあると考えると

$$\Delta I_i(t) = C_i I_i(t) \Delta t \quad (3)$$

がインターネットアクセスでの基本的な購入意欲の増加項であろう。

消費者に商品の購入やWebへのアクセスを誘う場合、TV、雑誌、街頭などを利用した宣伝行為は、数理的に見ればいわば外場を加える働きを

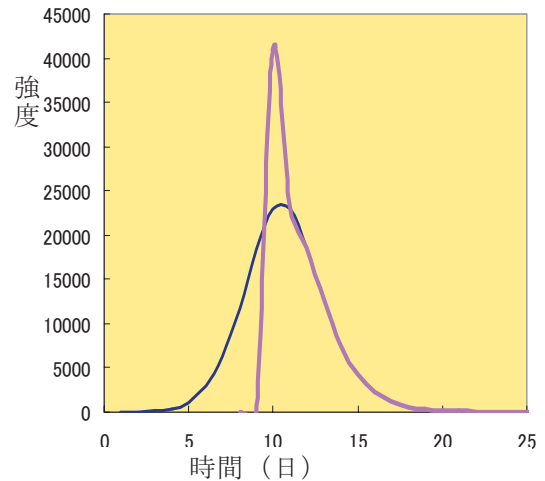


図1 購入意欲と売り上げの関係  
購入意欲(黒)と売り上げ(ピンク)の時間的推移を表す。t=9が発売日に相当する。

することである。商品の販売であれば、ある宣伝で1日あたり確実にA個売れるとすると、その宣伝による時間 $\Delta t$ あたりの販売数は

$$\Delta I = A \Delta t \quad (4)$$

である。個人の視点であれば、この $\Delta I$ は小数であり、これが累積して1になった時に購入すると考えれば同じモデルが適用できる。

商品の購入、あるいはWebアクセスの増加は、口コミや評価記事等さまざまな媒体でのポジティブな評判が消費者に届き、それが購入を促す働きをする。そして、そのような購入を促がす働きが各エージェント相互に働き合うことで、商品の購入が加速する。つまり、そのような『評判』の効果を取り入れるのが、ヒット現象のような爆発的な購入現象のメカニズムを解明するには不可欠なのである。前節で導入した個人視点でモデル化した方程式は、このような評判をモデル化して方程式に取り入れるのに好都合な形式になっている。

評判の効果は大きく3つに大別できると考えられる。それは以下の3つである。

1. 購入した人本人から聞いた情報で買う
2. 購入した人同士のコミュニケーションを参考に買って買う
3. 売れているという評判で買う

この3つのそれぞれが、時間 $\Delta t$ あたりにどのような効果を購入意欲に与えるかをモデル化する必要がある。

## 2.2 購入意欲の3要素

購入意欲は、宣伝・プロモーションと、購入した人から勧められる直接コミュニケーション、そして、世の中の“もつばらの噂・評判”として影響を受けて購入する間接コミュニケーションの3つの影響に分けられると考えられる。このうち、宣伝・プロモーションは外場  $A(t)$  として扱う。

次に直接コミュニケーションである。購入した人からの情報は、当然ながらそれまでに購入した人数に比例する。 $i$  番目の人が  $j$  番目の人から情報を聞いて購入する気になる確率を  $D_{ij}$  と定義すると、購入した人自身からの情報によって  $i$  番目の人が購入する割合は

$$\sum_{j \neq i}^N D_{ij} I_j(t) \quad (5)$$

とおけるであろう。

次は間接コミュニケーションである。間接コミュニケーションでは、購入した人同士の情報は購入した人で作る対の数に比例する。購入した人同士の情報交換は、口コミの場合もあれば、ブログやネットの掲示板への書き込みなどでなされると思われ、その情報量の総数が問題となる。そこで、その購入した人同士の情報交換によって影響されて購入する確率は

$$\sum_j \sum_k P_{ijk} I_j(t) I_k(t) \quad (6)$$

で定義できるであろう。ここで  $j, k$  は  $i$  を含まない。係数  $P_{ijk}$  はその商品に対する評価であり、購入した人に評判がよいほど、この係数は大きな値となる。逆に購入した人に評判が悪い場合、この係数は負となる。

## 2.3 ヒット現象の方程式

これら3つの評判の項を含めると、一人一人の個人による商品の購入量の時間変化を表す微分方程式は次のようになると考えられる。[2]

$$\begin{aligned} \frac{dI_i(t)}{dt} = & R_{fb} R_{shop} + A(t) + \sum_{j \neq i}^N D_{ij} I_j(t) \\ & + \sum_j \sum_k P_{ijk} I_j(t) I_k(t) \end{aligned} \quad (7)$$

この式を平均場近似（均等近似）を仮定して変形すると、以下のようなになる。すべての人間が均等な購入意欲を持つと近似し、平均された一人の購

入意欲を  $I(t)$  と表そう。

$$I(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_j(t) \quad (8)$$

さらに係数  $D_{ij}$ 、 $P_{ij}$  も一人一人の個人に依存せず全て同じ値  $D$ 、 $P$  を持つと近似すれば、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N D_{ij} I_j &= D \sum_{j=1}^N I_j(t) \\ &= (N-1)DI(t) \\ &= C_d I(t) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N P_{jk} I_j(t) I_k(t) &= P \sum_{j=1}^N I_j(t) \sum_{k=1}^N I_k(t) \\ &= (N-1)(N-2)PI^2(t) \\ &= C_p I^2(t) \end{aligned} \quad (10)$$

と簡単化できる。この均等近似においてヒット現象の方程式は次のように近似することが出来る。

$$\frac{dI(t)}{dt} = R_{fb} R_{shop} + A(t) + C_d I(t) + C_p I^2(t) \quad (11)$$

全ての人が同じ動向をすると仮定しているの、かなり粗い近似ではあるが、モデルとして宣伝の効果や評判の効果がどのような働きをするのかを具体的に見ていくのには十分であろう。この方程式を用いたいくつかの計算例については文献[2]を見られたい。また、図1はこの(11)式の数値解を用いて説明している。

## 3. マーケティング・サイエンスとの関係

宣伝とそれによる売り上げの関係は、マーケティングサイエンスの分野で既に多くの研究がなされている。時間依存のマーケティング理論は多くはないのだけれど、それらの代表的なものと、本研究で提示しているヒットの方程式との関連を示そう。ここではいわゆるマーケティングシェアのモデルと、口コミを扱う古典的なモデルと位置づけられている Bass モデルを取り上げる。

### 3.1 マーケティングシェアモデルとの関係

マーケティング・シェアとは、あるブランド  $i$  の売り上げが、その市場全体に占める割合を意味

する。各ブランドの売り上げを  $Q_i$ 、その市場全体の売り上げを  $Q = \sum_i Q_i$  とすると、マーケティング・シェア  $S_i$  は、

$$S_i = \frac{Q_i}{Q} \quad (12)$$

よく用いられる仮定として、売り上げはマーケティング努力  $M_i$  に比例するとする。すると、

$$Q_i = kM_i \quad (13)$$

なので、マーケティング・シェアはマーケティング努力によって決まることになる。

$$S_i = \frac{M_i}{\sum_i M_i} \quad (14)$$

ヒット現象においては、時々刻々の売り上げを問題にしたいので、上のマーケティング・シェアを時々刻々のマーケティング・シェアに拡張して、以下のように考えよう。

$$s_i(t) = \frac{q_i(t)}{q(t)} \quad (15)$$

ここで、全ブランド（市場）の時々刻々の売り上げを  $q(t) = \sum_i q_i(t)$  とする。その日のブランド  $i$  へ

の購入意欲を  $\Delta I_i(t)$  とし、その日その日の購入意欲がそのまま購入、即ち売り上げに結びつくとする、

$$q_i(t) = \Delta I_i(t) \quad (16)$$

となるであろう。以下、ヒット現象の方程式を競合する複数ブランドの場合に拡張して考える。

ここで  $j$  番目の人の製品  $i$  への購入意欲を  $I_{ij}(t)$  とする。複数ブランド競合の場合に拡張したヒット現象の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dI_{ij}(t)}{dt} = & k_{ij} M_{ij}(t) + \sum_{\ell} D_{ij\ell} I_{i\ell}(t) \\ & + \sum_{\ell} \sum_m P_{ij\ell m} I_{i\ell}(t) I_{im}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

となる。その日その日の差分で考えると、これは次のように書ける。

$$\begin{aligned} \Delta I_{ij}(t) = & k_{ij} M_{ij}(t) \Delta t + \sum_{\ell} D_{ij\ell} I_{i\ell}(t) \Delta t \\ & + \sum_{\ell} \sum_m P_{ij\ell m} I_{i\ell}(t) I_{im}(t) \Delta t \end{aligned} \quad (18)$$

そこで、購入意欲で表した、時々刻々のマーケティング・シェアは

$$s_i(t) = \frac{\sum_j \Delta I_{ij}(t)}{\sum_i \sum_j \Delta I_{ij}(t)} \quad (19)$$

となる。もし、購入意欲がマーケティング努力だけで決まるとすると、

$$\Delta I_{ij}(t) = k_{ij} M_{ij}(t) \Delta t \quad (20)$$

となるから、これを代入すると、時々刻々のマーケティング・シェアは次のようになる。

$$s_i(t) = \frac{\sum_j \Delta I_{ij}(t)}{\sum_i \sum_j \Delta I_{ij}(t)} = \frac{\sum_j k_{ij} M_{ij}(t)}{\sum_i \sum_j k_{ij} M_{ij}(t)} \quad (21)$$

これにより、ヒット現象の方程式で宣伝の項だけを残した

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = R_{fb} R_{shop} + A(t) \quad (22)$$

からマーケティング・シェアの式を導出出来ることがわかった。従って、ヒット現象の方程式は、マーケティング・シェアの考えを含んでいることがわかった。

### 3. 2 Bass モデルとの関係

Bass モデル[3-5]とは古くからマーケティングの分野で知られている、口コミの効果を表すと言われているモデルである。ここで、宣伝・店頭販売の項を一つにまとめて、ヒット現象の方程式を次のように書こう。

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = A_i + \sum_j D_{ij} I_j(t) + \sum \sum P_{ijk} I_j(t) I_k(t) \quad (23)$$

全体の人数を  $m$  とし、平均の購入意欲を考える。

$$\langle I(t) \rangle = \frac{1}{m} \sum_i I_i(t) \quad (24)$$

着目している製品が買われた量を  $N$  とすると、こ

これは購入意欲と全体の人数から次のように書ける。

$$\sum_i I_i(t) = m \langle I(t) \rangle = N(t) \quad (25)$$

宣伝は、買ってない人にだけ伝わるとすると、

$$\begin{aligned} \sum_i A_i &= a(m - N(t)) \\ &= \sum_i a \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、和は買ってない人だけで取る。

ヒット現象の方程式で、直接口コミの項

$$\sum_i \sum_j D_{ij} I_j \quad \text{は係数 } D_{ij} \text{ が買ってない人と買った人}$$

に関わる係数だけが  $D_{ij}=d$  で、他の場合（買った人同士、買ってない人同士）にはゼロになると考える。すると、買った人については既に購入意欲は満たされてしまっていると、 $I_j = 0$  とす

ると、以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j D_{ij} I_j &= (m - N(t))N(t)d \langle I \rangle \\ &= (m - N(t))N(t)b \end{aligned} \quad (27)$$

従って、ヒット現象の方程式を  $i$  について和を取って

$$\frac{d \sum_i I_i(t)}{dt} = \sum_i \left[ A_i + \sum_j D_{ij} I_j(t) + \sum_j \sum_k P_{ijk} I_j(t) I_k(t) \right] \quad (28)$$

とすれば、この方程式は以上の議論を代入して

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= a(m - N(t)) + (m - N(t))N(t)b \\ &\quad + \sum_i \sum_j \sum_k P_{ijk} I_j I_k \end{aligned} \quad (29)$$

ここで  $P_{ijk}=0$  と間接コミュニケーションを無視すれば、以前から知られている Bass モデルの式となる。

#### 4. ヒットの収束

先の石井・吉田の論文[2]ではヒットが起こる初期過程のみを考え、ヒットがやがて収束することは扱っていなかった。ここでは噂・評判に時間的な減衰を採り入れ、ヒットの収束を議論できるよ

うにヒット現象の方程式を拡張することを考えよう。

噂・評判の項は2次の項で与えられている。この項の意味は、 $i$  の人と  $j$  の人がブログ上で噂のやりとりをする様子を第三者が影響を受けることである。ここで、第三者が影響を受けるのは現時点での書き込みだけではなく、過去に遡っての書き込み全てであるはずである。そこで、過去の書き込み（噂）にも影響されているとすると、次のような積分形で表されるはずである。

$$\int_t^0 I_i(t+\tau) I_j(t+\tau) d\tau \quad (30)$$

しかし、この形のままで、遠くの過去に遡ればどのどん項の値が大きくなってしまふ。しかし、実際には遠くの過去に遡れば遡るほど影響が薄れていくと考えられ、これを指数関数型の減衰で考えたと、

$$\frac{1}{t} \int_t^0 I_i(t+\tau) I_j(t+\tau) e^{\alpha\tau} d\tau \quad (31)$$

であろう。ここで規格化は  $\frac{1}{t}$  で与えているが、実

際は指数関数的減衰で、無限の過去からの寄与はない。そこで規格化定数を決めるため、

$$\int_t^0 e^{\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (32)$$

と計算すれば、規格化定数はだいたい  $\alpha$  でいいだろう。従って、過去の噂まで遡って影響をうける様子は次のように表現できる。

$$\alpha \int_t^0 I_i(t+\tau) I_j(t+\tau) e^{\alpha\tau} d\tau \quad (33)$$

さらに、その噂の元が時刻  $t=0$  で始まっているとすると、ここから時刻が経過するごとに影響は薄れていくと考えられ、その分でやはり指数関数型の減衰因子を考えるのが自然であろう。そこで、この因子を  $e^{-\alpha t}$  とし、噂による影響は

$$\alpha e^{-\alpha t} \int_t^0 I_i(t+\tau) I_j(t+\tau) e^{\alpha\tau} d\tau \quad (34)$$

という項になると考えられる。

この項の時間的変化を見積もるため、簡単に  $I_i(t) = I_j(t) = I_0$  と定数に置いてしまうと、ここで

考えている噂の効果の時間的減衰に影響された時間的変動だけが抽出できて、

$$\alpha I_0^2 e^{-\alpha t} \int_t^0 e^{\alpha \tau} d\tau = I_0^2 e^{-\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (35)$$

この式を検証し減衰定数  $\alpha$  を決めるため、ブログ検索エンジンを開発した米国テクノラティ社の日本法人テクノラティジャパンの協力で時系列で日本中のブログの書き込みの9割以上を対象に平成17年9月に閉幕した「愛・地球博」と平成17年7月～9月期に話題となったTVドラマ「女王の教室」という言葉をキーワードに書き込みの時間的変化を追った。その結果を図に示す。「愛・地球博」で実測データのピークが閉幕日に相当し、その前にあるピークは閉幕の前の週の週末に対応する。また、「女王の教室」の実測データのピークは最終回の放送日であり、その前にあるピークは前の週の放送日である。ブログ検索による実測データは式とよく一致し、噂・評判の減衰時間定数  $\alpha=0.5$ 、つまり2日間で噂や評判はほぼ減衰することがわかった。

以上から噂・評判の時間的な減衰を扱う項では基本的に減衰因子は、時間の単位を1日として

$$e^{-0.5t} \quad (36)$$

と結論づけられる。

以上のように時間的減衰を採り入れたヒット現象の方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dI_i(t)}{dt} &= A(t) + \sum_{j \neq i}^N D_{ij} I_j(t) \\ &+ \alpha e^{-\alpha t} \sum_j \sum_k P_{jk} \int_t^0 I_j(t+\tau) I_k(t+\tau) e^{\alpha \tau} d\tau \end{aligned} \quad (37)$$

これを差分方程式に直すと

$$\begin{aligned} \Delta I(t + \Delta t) &= A(t) + C_d I(t) \\ &+ C_p \alpha e^{-\alpha t} \sum_{n=-\frac{t}{\Delta t}}^0 I^2(t - n\Delta t) e^{-\alpha n\Delta t} \end{aligned} \quad (38)$$

この方程式の解が図1に示した購入意欲の曲線である。このように、このモデルだと急激に立ち上がり、ゆっくり減衰する左右非対称のピーク曲線が得られ、これは実際のブログ測定データと一致する。

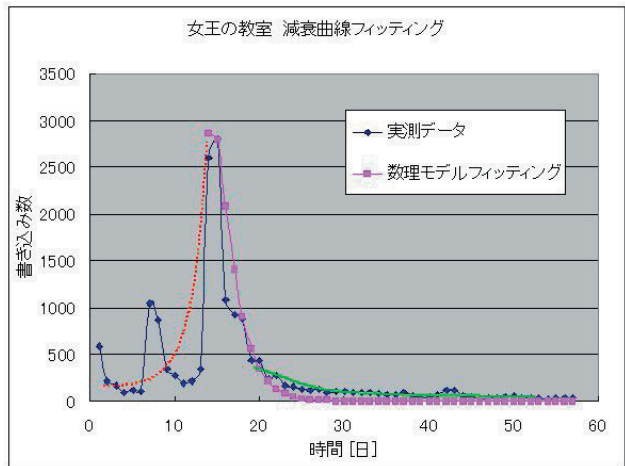
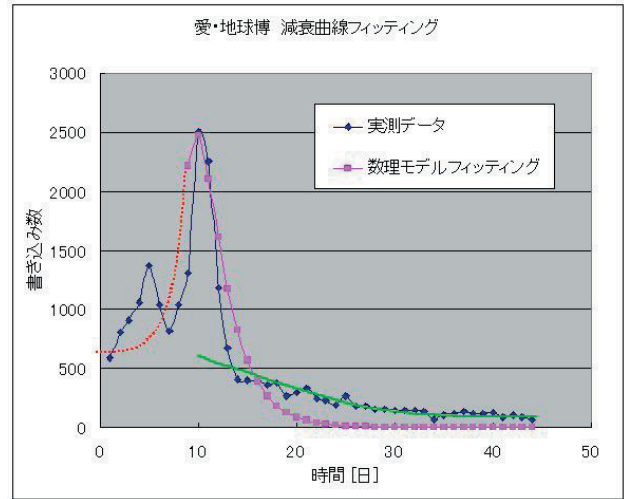


図2 「愛・地球博」最終日付近とTVドラマ「女王の教室」最終回付近のブログ書き込み数の実測と理論計算

### 5. 考察

減衰が2日間と短いことから、ヒット現象の数理モデルの手法で売り上げデータの分析を行うには、週単位の売り上げデータではなく、1日単位の売り上げデータが必須となることがわかる。Bassモデルは口コミや宣伝を扱うモデルとして1969年に提唱されながら、当初は実データを説明するのにうまくいかなかった経緯があるが、それは1日単位のような時間間隔の短いデータで分析することが当時ははなかつたことが主因とも考えらる。

減衰を入れた計算は、ブログの実測とよく合い、各係数をどう決めるかはこれからの問題として、本研究で提案しているヒット現象の数理モデル自

体は、ヒット現象をよく説明しうるモデルになっていることが示されたと言える。

本研究と同じように、売り上げの時間的推移が重要であると指摘した研究も、ハリウッドの映画について現れてきている[6]ので、本研究で提示しているヒット現象の方程式で売り上げの時間的推移を解析し、各係数を決めていくことから、売り上げ予測やヒットの可能性の予測に役立つモデルになっていくことが期待される。

## 6. まとめ

本研究では、ヒット現象を説明する数理モデルとして連立非線形方程式を提示した。その方程式は従来のマーケティング・サイエンスで知られている理論であるマーケティング・シェアモデルや Bass モデルを内包していることが示された。また、噂・評判の時間的減衰を採り入れることからヒットの立ち上がりから収束までを計算で示すことが出来るようになった。ブログの書き込み数の解析から、噂・評判は2日間で減衰することがわかった。

## 参考文献

- [1] 吉田就彦「ヒット学～コンテンツ・ビジネスに学ぶ6つのヒット法則」(ダイヤモンド社、2005)
- [2] 石井晃、吉田就彦、鳥取大学工学部研究報告 36 (2005) 71
- [3] Bass, Frank M., "A New Product Growth for Model Consumer Durables," *Management Science*, Jan. 1969, Vol. 15, No.5; pp.215-227.
- [4] Bass, Frank M., "Product Policy: The Relationship Between Diffusion Rates, Experience Curves, and Demand Elasticities for Consumer Durable Technological Innovations," *The Journal of Business (pre-1986)*, Jul. 1980, Vol. 53, Iss. 3; pp. 115-167.
- [5] Bass, Frank M., Trichy V. Krishnan and Dipak C. Jain, "Why the Bass Model Fits without Decision Variables," *Marketing Science*, Summer 1994, Vol. 13, Iss. 3; pp.203-223.
- [6] Sitabhra Sinha and Raj Kumar Pan, "Blackbusters, Bombs and Sleepers: The income

distribution of movies" cond-mat/0504198

(受理 平成 18 年 11 月 30 日)

