

# 不確定性を伴う制御系の特性根の存在領域 とその簡単な図的判定法

奥山 佳史・陳 鴻・竹森 史暁

知能情報工学科

(1994年9月1日受理)

Characteristic Root Area of Control Systems with Uncertainties  
and its Simple Graphical Criteria

by

Yoshifumi OKUYAMA, Hong CHEN and Fumiaki TAKEMORI

Department of Information and Knowledge Engineering

(Received September 1, 1994)

This paper presents graphical criteria to obtain the area containing characteristic roots of control systems with plant and/or controller uncertainties. We have already reported a method and an algorithm for calculating the boundary curve representing the upper bound of the absolute values of frequency responses for the uncertain and unpredictable sections. However, from a viewpoint of robust control system design, the graphical representation of such curves is not always convenient to apply.

In this paper, we propose a method of defining a sufficient condition for the characteristic root area using simple graphical criteria: the intersection or the union of a half plane partitioned by circles or lines. Some numerical examples are given to verify these criteria.

**Key words :** Characteristic root area, Rouché's theorem, Uncertainty, Robustness, Sensitivity function.

## 1 はじめに

制御対象あるいはコントローラに不確定性、あるいは“未確定部”を伴う制御系の特性根の存在領域については、不確定部の周波数特性の絶対値の上限に対する境界曲線の計算法をさきに提案した<sup>[1]</sup>。しかし、ロバスト制御系の設計という観点に立つとき、それは必ずしもわかりやすい表示法ではない。この論文では、特性根の存在領域を数値計算によらずに、おおよそでも求めることを考え<sup>[2]</sup>、円と直線による領域の分割、そしてそれらの交わり（積集合）と併合（和集合）による存在領域の決定法、すなわち簡便な図的判定法について記す。

## 2 還送差と感度関数

Fig.1に示すように制御対象  $G(s)$  に不確定部  $\Delta G(s)$ 、あるいは Fig.2のような補償器（コントローラ） $C(s)$  に未確定部  $\Delta C(s)$  を伴う制御系について考える。この論文では図に示すように、それらの不確定性は他のループからの干渉などによる加法的摂動であるとしているが、 $\Delta G(s) = \alpha(s)G(s)$  あるいは  $\Delta C(s) = \beta(s)C(s)$  ( $\alpha(s), \beta(s)$  はそれぞれの不確定部) と置くことにより、明らかに乗法的摂動の問題として処理することもできる。

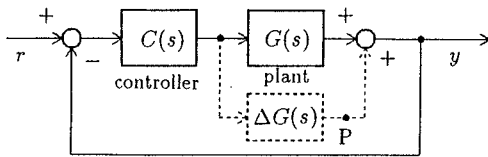


Fig.1 Control system with plant uncertainty.

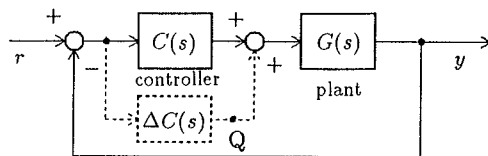


Fig.1 Control system with controller uncertainty.

Fig.1 の制御系の特性方程式は

$$1 + [G(s) + \Delta G(s)]C(s) = 0. \quad (1)$$

いま、 $1 + G(s)C(s) \neq 0$  である、すなわち公称系の零点以外の  $s = \sigma + j\omega$  を考えるものとすれば、

$$1 + \frac{\Delta G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} = 0 \quad (2)$$

である。このとき、(2) 式の左辺は不確定経路、たとえば点 P から見た還送差 (return difference) となっている。

閉ループ特性  $W(s) = Y(s)/R(s)$  に対する感度関数は、明らかに

$$S_G^W(s) = \left( \frac{\partial W}{\partial G} \right) \cdot \frac{G}{W} = \frac{1}{1 + G(s)C(s)} \quad (3)$$

であるから、(2) 式は

$$1 + \Delta G(s)C(s)S_G^W(s) = 0 \quad (4)$$

と書き表すこともできる。

一方、Fig.2 の制御系の特性方程式は

$$1 + G(s)[C(s) + \Delta C(s)] = 0. \quad (5)$$

同様に、公称系の零点以外の領域を考えるとすれば、

$$1 + \frac{\Delta C(s)G(s)}{1 + G(s)C(s)} = 0. \quad (6)$$

この式の左辺は点 Q から見た還送差となっている。同じく感度関数表現では

$$1 + \Delta C(s)G(s)S_C^W(s) = 0 \quad (7)$$

となる。

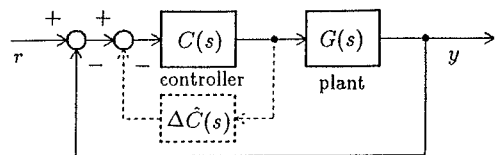


Fig.3 Control system with controller uncertainty by feedback connection.

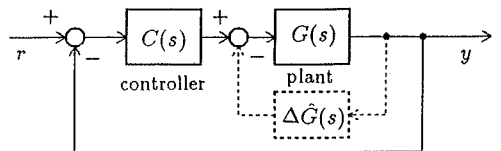


Fig.4 Control system with plant uncertainty by feedback connection.

なお、Fig.3 に示すように不確定経路がフィードバックで入る場合には、明らかに特性方程式は

$$1 + \frac{G(s)C(s)}{1 + \Delta \hat{C}(s)C(s)} = 0 \quad (8)$$

そして

$$1 + [G(s) + \Delta \hat{C}(s)]C(s) = 0 \quad (9)$$

であるから、特性根に関しては Fig.1 の制御系とまったく同じ問題となる。同様に Fig.4 の制御系については、Fig.2 の場合に相当することになる。

### 3 特性根の存在領域

(2) 式について考えるならば、

$$F(s) = \frac{1 + G(s)C(s)}{C(s)} = -\Delta G(s) \quad (10)$$

この  $F(s)$  は感度関数との掛け合わせの逆数であるから、ロバスト性を表すものと見なしうる。(10) 式の零点は (3) 式の極、すなわち公称閉ループ系の極である。いま、それらの零点を囲む  $s$  平面上のある閉曲線 (Jordan 曲線)  $\Gamma$  上において、ある適当な正定数  $\rho$  に対して

$$|F(s)| = \frac{|1 + G(s)C(s)|}{|C(s)|} > \rho \geq |\Delta G(s)| \quad (11)$$

を満たすならば、(1),(2) 式においても  $\Gamma$  内における零点の数は不変であることを容易に示すことができる (これは Rouché の定理としても知られている)。

この (11) 式は二つの不等式から成り立っている。右側の不等式は要素変化  $\Delta G(s)$  あるいは不確定性についての“情報”をどの程度得ているかに関係し面倒な問題である。そこで、まず左側の不等式によって定まる  $s$  平面上の領域 (すなわち、(1),(2) 式の特性根の存在しない領域) について検討する。

(10) 式の左辺が極・零点をもって

$$F(s) = \frac{1 + G(s)C(s)}{C(s)} = \frac{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}{(s - q_1)(s - q_2) \cdots (s - q_m)} \quad (12)$$

と表せるものとする。実際の制御問題においては、これらの極・零点の中には制御系の動特性に対して支配的な (大きな影響を及ぼす) ものと、それにあまり影響を及ぼさないものがある。後の根の存在領域の検討においてはそれらを区別して扱うが、ここでは、まずその一般論について述べる。

わかりやすいように、実数平面  $(\sigma, \omega) \in \mathbb{R}^2$ , ( $s = \sigma + j\omega$ ) で考え、次のような記号上の約束をする。

$$a_i(\sigma, \omega) = |s - p_i|, \quad b_j(\sigma, \omega) = |s - q_j|$$

すると、(11) 式の左側の不等式は

$$F(\sigma, \omega) = |F(s)| = \frac{a_1(\sigma, \omega)a_2(\sigma, \omega) \cdots a_n(\sigma, \omega)}{b_1(\sigma, \omega)b_2(\sigma, \omega) \cdots b_m(\sigma, \omega)} > \rho \quad (13)$$

となる。適当な  $\rho > 0$  を与えることによって、この (13) 式の境界を計算することができるが、その計算法についてはすでに報告した<sup>[1]</sup>。

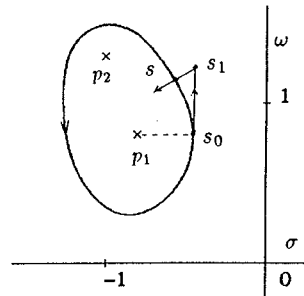


Fig.5 Calculation of contour (Jordan curve).

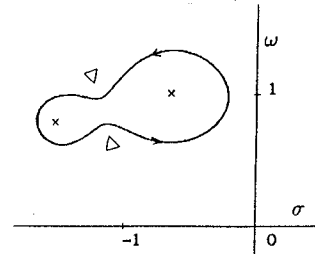


Fig.6 Ill-conditioned Jordan curve.

Fig.5 に示すように、点  $s_0$  から接線方向 ( $\nabla F$  に直交する方向) に適当な大きさ進み、点  $s_1$  から今度は  $-\nabla F$  方向に進んで Newton 法に基づいて根  $s$  の軌跡を求めるのである。その計算は容易であるが、ある特異な曲線となる場合、たとえば Fig.6 に示すような二つの閉曲線に分離しかけるような部分 ( $\Delta$  印) のところでは収束しにくくなることがある。そこで、この論文ではロバストな制御系の設計に当たって必要とされる、特性根の存在領域を数値計算によらずに (おおよそでも) 求めることについて、次の節で考察する。

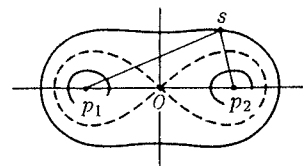


Fig.7 Cassini's oval (Sugaku-Jiten, Iwanami<sup>[3]</sup>).

なお、(12) 式の最も簡単な場合、

$$a_1(\sigma, \omega)a_2(\sigma, \omega) = |s - p_1| \cdot |s - p_2| > \rho \quad (14)$$

の境界は、2 定点  $p_1, p_2$  からの距離の積が一定である点の軌跡で Fig.7 に示すような Cassini の卵形曲線となる。破線のような結節点  $O$  をもつ場合、それは Bernoulli の lemniscate となる。(13) 式の境界は、したがってそれらの一般化と考えることができる。

## 4 円と直線による領域決定

### 4.1 領域の定義

いま、次のような領域を定義する。

$$A_i = \{(\sigma, \omega) \mid a_i(\sigma, \omega) > \rho_i\}, \quad (15)$$

$$B_j = \{(\sigma, \omega) \mid b_j(\sigma, \omega) < 1/\rho_j\}, \quad (16)$$

$$C_{ij} = \{(\sigma, \omega) \mid a_i(\sigma, \omega)/b_j(\sigma, \omega) > \rho_{ij}\}. \quad (17)$$

ただし、 $i \in I, j \in J$

$$I = \{1, 2, \dots, n\}, J = \{1, 2, \dots, m\}. \quad (18)$$

明らかに、 $A_i$  は

$$a_i^2(\sigma, \omega) = (\sigma - \alpha_i)^2 + (\omega - \beta_i)^2 > \rho_i^2 \quad (19)$$

より、中心  $p_i = \alpha_i + j\beta_i$ 、半径  $\rho_i$  の円の外側である。一方、 $B_j$  は、

$$b_j^2(\sigma, \omega) = (\sigma - \gamma_j)^2 + (\omega - \delta_j)^2 < 1/\rho_j^2 \quad (20)$$

より、中心  $q_j = \gamma_j + j\delta_j$ 、半径  $1/\rho_j$  の円の内側であることがわかる。

(17) 式で表される領域は少し面倒であるが、

$$\frac{(\sigma - \alpha_i)^2 + (\omega - \beta_i)^2}{(\sigma - \gamma_j)^2 + (\omega - \delta_j)^2} > \rho_{ij}^2 \quad (21)$$

より、その境界は

$$(1 - \rho_{ij}^2)\sigma^2 - 2(\alpha_i - \rho_{ij}^2\gamma_j)\sigma + \alpha_i^2 - \rho_{ij}^2\gamma_j^2 + (1 - \rho_{ij}^2)\omega^2 - 2(\beta_i - \rho_{ij}^2\delta_j)\omega + \beta_i^2 - \rho_{ij}^2\delta_j^2 = 0 \quad (22)$$

と表されるから、 $\rho_{ij} \neq 1$  については、

$$\left(\sigma - \frac{\alpha_i - \rho_{ij}^2\gamma_j}{1 - \rho_{ij}^2}\right)^2 + \left(\omega - \frac{\beta_i - \rho_{ij}^2\delta_j}{1 - \rho_{ij}^2}\right)^2$$

$$= \frac{[(\alpha_i - \gamma_j)^2 + (\beta_i - \delta_j)^2]\rho_{ij}^2}{(1 - \rho_{ij}^2)^2} \quad (23)$$

なる円となるので、 $C_{ij}$  は  $\rho_{ij} < 1$  でその円の的外側、 $\rho_{ij} > 1$  でその円のの内側となる。

一方、 $\rho_{ij} = 1$  については、(22) 式より容易に

$$\omega = -\frac{\alpha_i - \gamma_j}{\beta_i - \delta_j} \cdot \sigma + \frac{1}{2(\beta_i - \delta_j)}(\alpha_i^2 + \beta_i^2 - \gamma_j^2 - \delta_j^2) \quad (24)$$

なる直線となることがわかる。よって、 $C_{ij}$  はこの直線によって分けられる領域のうち、 $F(s)$  の極  $q_j$  を含む側である。

Fig.8 に領域  $C_{ij}$  の例として、

$$a(\sigma, \omega) = |s + 2 - 2j|,$$

$$b(\sigma, \omega) = |s + 1 + 0.5j|,$$

$\rho = 0.2 \sim 0.8$  の場合、さらに  $\rho = 1.2 \sim 2.0$  の場合の円による領域分割と、 $\rho = 1.0$  の場合の直線による領域分割の例を示す。

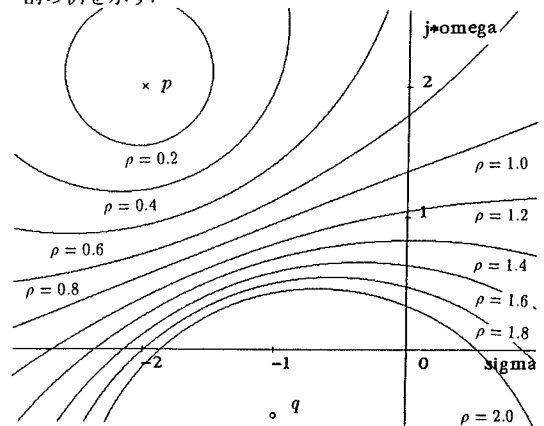


Fig.8 Numerical examples.

### 4.2 特性根の存在条件：十分条件

これらの円と直線で定められる半平面  $A_i, B_j, C_{ij}$  をもとに、特性根の存在領域その十分条件についてのいくつかの性質を示す。

いま、(13) 式を満たす真の領域を  $A$ 、すなわち

$$A = \{(\sigma, \omega) \mid F(\sigma, \omega) > \rho\} \quad (25)$$

と書く。すると、(13) 式が分子項  $a_i(\sigma, \omega), i \in I$  のみで表される制御系においては、次の性質を満足する。

補題 1

$$\prod_{i \in I} \rho_i = \rho \quad (26)$$

となる任意の正値  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  に対して

$$(\sigma, \omega) \in \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow (\sigma, \omega) \in A \quad (27)$$

が成立する。

$A_i, B_j, C_{ij}$  そして  $A$  の補集合をそれぞれ、 $\bar{A}_i, \bar{B}_j, \bar{C}_{ij}, \bar{A}$  と記すならば、補題1の対偶として次の「系」を得る。

系 1 同じく、(26)式を満たす  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  に対して

$$(\sigma, \omega) \in \bar{A} \Rightarrow (\sigma, \omega) \in \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \quad (28)$$

が成立する。

(13)式が分母項  $b_j(\sigma, \omega)$  のみで表される制御系においては、次のようになる。

補題 2

$$\prod_{j \in J} \rho_j = \rho \quad (29)$$

となる任意の正値  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$  に対して

$$(\sigma, \omega) \in \bigcap_{j \in J} B_j \Rightarrow (\sigma, \omega) \in A \quad (30)$$

が成立する。そして、補題2の対偶として次の「系」を得る。

系 2 同じく、(29)式を満たす  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$  に対して

$$(\sigma, \omega) \in \bar{A} \Rightarrow (\sigma, \omega) \in \bigcup_{j \in J} \bar{B}_j \quad (31)$$

が成立する。

分子項  $a_i(\sigma, \omega)$ 、分母項  $b_j(\sigma, \omega)$  両方が存在する場合についても、これらを同時に満足する領域を求めればよいのであるが、真の領域  $A$  により近いものを得るため、(17)式の  $C_{ij}$  のように分子・分母項の対を考え、その領域を定める。

いま、 $n \geq m$  として  $I = 1, 2, \dots, m$  に対する置換 (permutation)

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j(1) & j(2) & \dots & j(m) \end{pmatrix} \quad j \in P, \quad P: \text{置換全体} \quad (32)$$

を考えるならば、より一般的な結果として次の定理1を得る。

定理 1

$$\prod_{i \in I} \rho_{ij(i)} = \rho \quad (33)$$

となる任意の  $\rho_{1j(1)}, \rho_{2j(2)}, \dots, \rho_{nj(n)}$  に対して

$$(\sigma, \omega) \in \bigcup_{j \in P} \left( \bigcap_{i \in I} C_{ij(i)} \right) \Rightarrow (\sigma, \omega) \in A \quad (34)$$

が成立する (ただし、 $m < i \leq n$  については  $\rho_{ij(i)} = \rho_i$ 、そして  $C_{ij} = A_i$  とする)。

証明 補題1、補題2より明かである。□

そして、この対偶として de Morgan の法則により次の定理2を得る。

定理 2 同じく、(33)式を満たす  $\rho_{1j(1)}, \rho_{2j(2)}, \dots, \rho_{nj(n)}$  に対して

$$(\sigma, \omega) \in \bar{A} \Rightarrow (\sigma, \omega) \in \bigcap_{j \in P} \left( \bigcup_{i \in I} \bar{C}_{ij(i)} \right) \quad (35)$$

が成立する (同じく、 $m < i \leq n$  については  $\rho_{ij(i)} = \rho_i$ 、そして  $\bar{C}_{ij} = \bar{A}_i$  とする)。

5 適用例

5.1 例 1

Fig.9 は

$$F(s) = s^2 + 2s + 2 = (s + 1 - j)(s + 1 + j) \quad (36)$$

の場合の真の領域  $A$  と補題1に基づく領域との関係を示したものである。  $\rho_1 = \rho_2 = 1.414$ 、 $\rho = \rho_1 \rho_2 = 2.0$  のときの領域をとくに斜線で記してある ( $\bar{A}$  は Cassini の卵形である)。

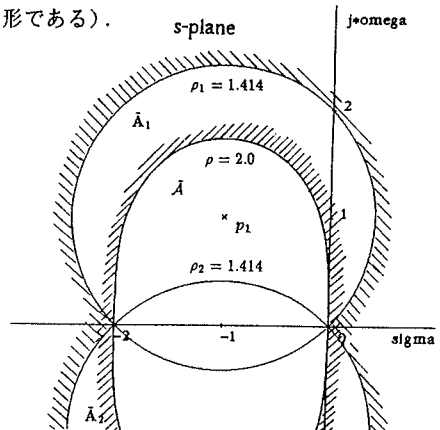


Fig.9 Area of characteristic root (example 1).

5.2 例2

Fig.10は

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s + 2}, \quad (n = 2, m = 1), \quad (37)$$

$\rho = 1.0$  の場合について、真の領域  $\bar{A}$  と定理1に基づく領域との関係を示したものである。この例は  $\frac{1}{s+2}$  なるプラントに対して積分補償を行った場合に相当する。

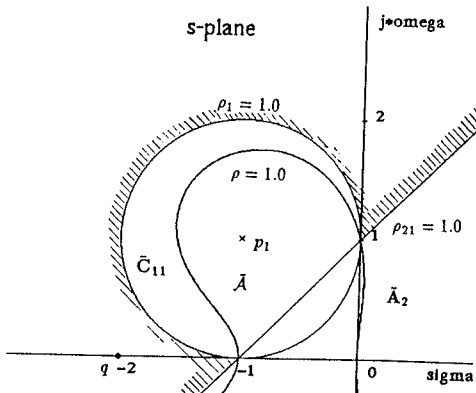


Fig.10 Area of characteristic root (example 2).

5.3 例3

Fig.11は、

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s(s + 2)}, \quad (n = m = 2), \quad (38)$$

$\rho = 0.6$  の場合について、定理1、定理2に基づく領域を示したものである。対応する  $\rho_{11} = 0.6$  の円と  $\rho_{22} = 1.0$  の直線、 $\rho_{12} = 0.6$  の円と  $\rho_{21} = 1.0$  の直線がいずれも交わっていないので、求める領域  $\bar{A}$  は2つの円領域  $C_{11}$ 、 $C_{12}$  の交わりの中に含まれることになる。

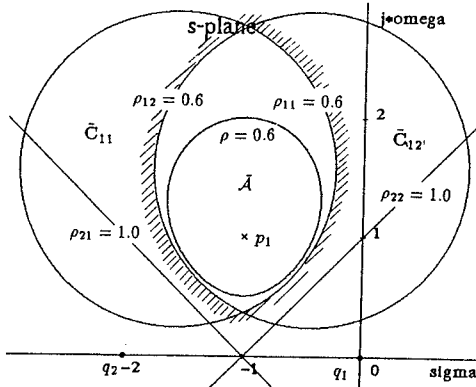


Fig.11 Area of characteristic root (example 3).

5.4 例4

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s(s + 2.5)}, \quad (n = m = 2), \quad (39)$$

同じく  $\rho = 0.6$  の場合について、定理1、定理2に基づく領域を示したものである。この場合  $\rho_{11} = 0.6$  の円と  $\rho_{22} = 1.0$  の直線が交わっているため、 $C_{11} \cap C_{12}$  は閉じた領域とはならない。

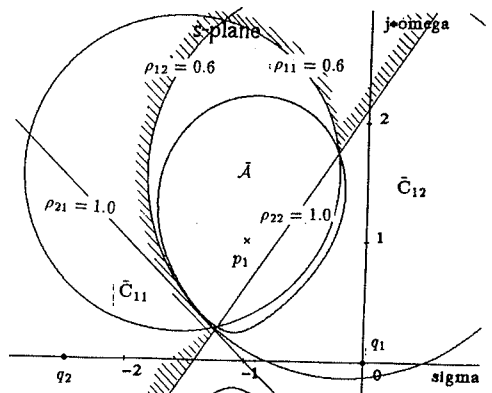


Fig.12 Area of characteristic root (example 4).

6 おわりに

不確定性を伴う制御系のロバストな制御系設計を目指して、特性根の存在領域を数値計算によらずに、円と直線というわかりやすい領域分割法により判定する技法について提示した。実際の制御系の設計に応用するにあたっては、次数の高い系の場合、また  $\Delta G(s)$  の極など不確定な要素が多い場合には、それらのあまり支配的でない根を一括して、ある一つの円の外側ということで処理することも可能と思われる。たとえば、 $\bar{p}_1$ 、 $\bar{p}_2$  がそのような根であるとすれば、中心  $(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)/2$ 、半径  $\rho + |\bar{p}_1 - \bar{p}_2|/2$  の円の外側を考えるなどして、支配的でない根によって定まる領域を逐次単純化し、制御系設計を行うことが考えられる。

参考文献

- [1] 奥山ほか：第10回制御理論シンポジウム資料，103/106 (1981)
- [2] 奥山ほか：第13回制御理論シンポジウム資料，75/78 (1984)
- [3] 日本数学会編：数学辞典，第2版（岩波書店），p.440 (1968)