

# 指定した円板内に存在する特性根の数の 判定法とその制御系設計への応用

奥山 佳史・竹森 史暁

知能情報工学科

(1993年9月1日受理)

A Condition for the Number of Characteristic Roots Existing on a Specified Disc  
and its Applications to Control System Design

by

Yoshifumi OKUYAMA and Fumiaki TAKEMORI

Department of Information and Knowledge Engineering

(Received September 1, 1993)

In this paper, we derive a criterion for the number of characteristic roots on a specified disc in the complex  $s$ -plane. The criterion is originated from the principle of the argument in complex variable theories. First, the equation of a circle in the  $s$ -plane is substituted into the characteristic polynomial. The division algorithm is applied to the numerator polynomial with complex coefficients which is obtained in this way. Then, it is driven by using the extended Sturm's theorem that the number of sign changes of these coefficients equals to the number of characteristic roots on the disc.

The criterion is applied to the design of feedback control systems. A method of parametrization of a proper stable compensator that holds characteristic roots on the specified discs (the permissible regions of poles) is discussed. The robustness of control systems with plant uncertainty is also investigated. Finally, simple numerical examples are given to illustrate these results.

Key words : principle of the argument, division algorithm, Sturm's theorem, control system design, robustness.

### 1. まえがき

フィードバック制御系の近代的な設計法は、2次形式評価関数を最小化するという考え方に基づく、最適制御理論による線形レギュレータの構成が一般的であった。そのような制御系の設計問題に関連して、オブザーバ、カルマンフィルタなど、状態の観測・推定理論が開発され、フィードバック制御系、広く動的システムの設計理論体系は完結されたとされる。さらに、そのような設計論は、結局、極（特性根）配置の問題に、あるいは多項式表現によるモデルマッチング問題に帰着するという点で、その面からの研究も多数発表されている<sup>[1]</sup>。

しかるに、この種の理論において常に忘れがちなのは、数式モデルと現実のそれとのギャップである。いいかえるならば、数式モデルにおける不確定性（表現を変えれば非線形特性）をいかに取り扱うかである。一般に動的システムにおいては、その特性が周波数に依存することから旧来の伝達関数、複素関数論に基づく展開が不可欠となる。とくに安定性の保証のもとでの伝達関数上での制御系設計の必要性から、Hardy 空間とくに伝達関数の上限に注目する  $H_\infty$  制御理論がロバスト（強靱）な制御系の設計に有効であるとされ<sup>[2]</sup>、いくつかの適用例も発表されている。

この論文は、このような制御系設計論の現状と問題点を踏まえ、近代的制御理論と不確定性を考慮するロバスト制御理論の接点という意味で、特性根（極、零点）の配置の問題における許容度について記したものである。すなわち、特性根が複素平面上の指定した領域（円板内）に入るための特性多項式の係数間の条件、その数の判定法についての結果を示すとともに、その不確定性を伴う制御系の設計への応用について述べている。

### 2. 基礎となる理論（偏角の原理）

問題とする特性多項式

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad (2.1)$$

について、いま、Fig.1に示すような  $s$  平面上の円板内にその特性根が  $\mu$  個存在する場合を考える。すると、中心  $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ 、半径  $r_i$  ( $i=1, 2, \dots, \nu$ ) の円上を反時計方向（角度正の方向）に一回転する軌跡(contour)の

式は、

$$s = r_i e^{j\theta} + p_i \quad (2.2)$$

$$(\theta: -\pi \rightarrow \pi)$$

で与えられる。この円内に特性根が  $\mu$  個存在すれば、特性多項式(2.1)の一巡軌跡に対する偏角の変化は、 $2\mu\pi$ となるはずである。

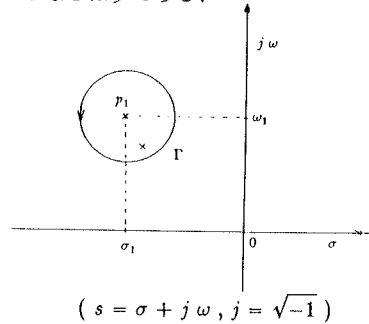


Fig.1 Characteristic roots and a circle contour.

ここで、次のような変数変換を行う。

$$\alpha = \tan(\theta/2) \quad (2.3)$$

明らかに

$$\theta = -\pi; \alpha = -\infty$$

$$\theta = 0; \alpha = 0$$

$$\theta = +\pi; \alpha = +\infty$$

の対応関係がある。さらに、

$$e^{j\theta} = \frac{\cos(\theta/2) + j \sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2) - j \sin(\theta/2)} = \frac{1 + j\alpha}{1 - j\alpha} \quad (2.4)$$

と書けるから、問題は特性多項式(1)に

$$s = r_i \frac{1 + j\alpha}{1 - j\alpha} + \sigma_i + j\omega_i \quad (2.5)$$

を代入したとき、 $\alpha: -\infty \rightarrow +\infty$  に対し、偏角の変化が  $2\mu\pi$  となるための条件を定めることとなる。

なおこの条件は、 $s = \sigma + j\omega$  に対し特性多項式(1)を実数部と虚数部に分け、

$$F(s) = P(\sigma, \omega) + j Q(\sigma, \omega) \quad (2.6)$$

と置いて考えるならば、 $P/Q$ （あるいは  $-Q/P$ ）のゼロをよぎる符号変化数が  $-2\mu$  であることと等価である。ここで、符号変化数とは負から正への符号変化があった場合に 1、正から負への符号変化があった場合には  $-1$  と数え、その和をとったものである。

(2.5)式は

$$s = \frac{u + v\alpha}{1 - j\alpha} \quad (2.7)$$

ただし,

$$\begin{aligned} u &= r_i + \sigma_i + j\omega_i \\ v &= \omega_i + j(r_i - \sigma_i) \end{aligned}$$

と書けるから, 特性多項式(2.1)に(2.5)すなわち(2.7)式を代入すると, 変数  $s$  についての多項式  $F(s)$  より変数  $\alpha$  についての複素係数の分子多項式

$$\Phi(j\alpha) = (1 - j\alpha)^n F(j\alpha) \quad (2.8)$$

が得られる。(2.6)式と同様, それを実数部と虚数部に分けて表現するならば,

$$\Phi(j\alpha) = P(\alpha) + j Q(\alpha) \quad (2.9)$$

ここで,

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= a_{0,0}\alpha^n + a_{0,1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_{0,n-1}\alpha + a_{0,n} \\ Q(\alpha) &= b_{0,0}\alpha^n + b_{0,1}\alpha^{n-1} + \cdots + b_{0,n-1}\alpha + b_{0,n} \end{aligned}$$

である。ただし, さきの偏角の変化  $2\mu\pi$  は, この  $\Phi(j\alpha)$  については, 明らかに  $(1 - j\alpha)^n$  の偏角の変化分  $-n\pi$  を加え合わせることににより,  $(2\mu - n)\pi$  となることがわかる。  $P/Q$  (あるいは  $-Q/P$ ) についていうならば,  $\alpha: -\infty \rightarrow +\infty$  に対するゼロをよぎる符号変化数は, したがって  $n - 2\mu$  である。

### 3. Sturm の定理による判定

ここで,

$$f_0(\alpha) = P(\alpha) \quad (3.1)$$

$$f_1(\alpha) = Q(\alpha)$$

とおき,  $P(\alpha)/Q(\alpha) = f_0(\alpha)/f_1(\alpha)$  に関して, 次のような連除法

$$\begin{aligned} f_0(\alpha) &= f_1(\alpha)q_1(\alpha) - f_2(\alpha) \\ f_1(\alpha) &= f_2(\alpha)q_2(\alpha) - f_3(\alpha) \\ \cdots & \\ \cdots & \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$f_{2n-2}(\alpha) = f_{2n-1}(\alpha)q_{2n-1}(\alpha) - f_{2n}(\alpha)$$

を適用する。

$f_0(\alpha), f_1(\alpha)$  が  $\alpha$  について  $n$  次で互いに素であれば,  $f_2(\alpha), f_3(\alpha), \cdots, f_{2n}$  はすべて存在し,

$$f_{2h}(\alpha), f_{2h+1}(\alpha) \quad (h=0, 1, \cdots, n-1)$$

は  $\alpha$  について  $n-h$  次の多項式,  $f_{2n}$  はゼロでない定数となる。すなわち,  $f_2(\alpha), f_3(\alpha), \cdots, f_{2n}$  は

$$\begin{aligned} f_2(\alpha) &= a_{1,1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_{1,n} \\ f_3(\alpha) &= b_{1,1}\alpha^{n-1} + \cdots + b_{1,n} \\ \cdots & \end{aligned} \quad (3.3)$$

...

$$f_{2n-2}(\alpha) = a_{n-1,n-1}\alpha + a_{n-1,n}$$

$$f_{2n-1}(\alpha) = b_{n-1,n-1}\alpha + b_{n-1,n}$$

$$f_{2n} = a_{n,n}$$

と表される。

いま,  $f_0(\alpha)/f_1(\alpha)$  の  $\alpha: \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$  に対するゼロをよぎる符号変化数を  $N(\alpha_1, \alpha_2)$ , そして数列

$$f_0(\alpha), f_1(\alpha), \cdots, f_{2n}$$

の符号変化の回数を  $V(\alpha)$  と記すならば, 拡張された Sturm の定理<sup>[3][4]</sup>より

$$N(\alpha_1, \alpha_2) = V(\alpha_1) - V(\alpha_2) \quad (3.4)$$

と書けることが知られている。ここでは,

$$N(-\infty, +\infty) = n - 2\mu$$

がその条件であるから, 明らかに

$$V(-\infty) - V(+\infty) = n - 2\mu \quad (3.5)$$

となる。

ところで, (2.9), (3.1), (3.3) 式より

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{f_0(\alpha)}{f_1(\alpha)} = \frac{a_{0,0}}{b_{0,0}}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{f_1(\alpha)}{|\alpha|f_2(\alpha)} = -\frac{b_{0,0}}{a_{1,1}}$$

...

...

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{f_{2n-1}(\alpha)}{|\alpha|f_{2n}(\alpha)} = -\frac{b_{n-1,n-1}}{a_{n,n}}$$

(3.6)

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{f_0(\alpha)}{f_1(\alpha)} = \frac{a_{0,0}}{b_{0,0}}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{f_1(\alpha)}{|\alpha|f_2(\alpha)} = \frac{b_{0,0}}{a_{1,1}}$$

...

...

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{f_{2n-1}(\alpha)}{|\alpha|f_{2n}(\alpha)} = \frac{b_{n-1,n-1}}{a_{n,n}}$$

と書かれるから, (3.5) 式の条件は, これらの比のうち偶数番目 (異なった次数の多項式に対する比) が負となるかどうか注目すればよい。

いま,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{f_1(\alpha)}{|\alpha|f_2(\alpha)}, \cdots, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{f_{2n-1}(\alpha)}{|\alpha|f_{2n}(\alpha)}$$

について考える。これらのうち負となるものの個数を

$N$ , 正となるものの個数を  $P$  とおけば, (3.5)式より

$$P - N = n - 2\mu \quad (3.7)$$

しかるに,  $P + N = n$  であるから, これらより

$$N = \mu \quad (3.8)$$

を得る. 以上の結果を定理の形でまとめると, 次のようになる.

【定理】 (判定アルゴリズム)

特性方程式

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (3.9)$$

中心  $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ , 半径  $r_i$  の円板, すなわち

$$s = r_i \frac{1 + j\alpha}{1 - j\alpha} + \sigma_i + j\omega_i$$

( $\alpha: -\infty \rightarrow +\infty$ )

の中に  $\mu$  個存在するための必要十分条件は,  $F(s)$  を (3.8)式により変数  $\alpha$  について書き換えた分子多項式

$$\Phi(j\alpha) = (1 - j\alpha)^n F(j\alpha) \\ = (a_{0,0} + jb_{0,0})\alpha^n + \cdots + (a_{n,n} + jb_{n,n}) \quad (3.10)$$

について, 係数比

$$\frac{b_{0,0}}{a_{1,1}}, \frac{b_{1,1}}{a_{2,2}}, \dots, \frac{b_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \quad (3.11)$$

ただし,

$$a_{1,p} = a_{0,0} \left[ \frac{b_{0,p}}{b_{0,0}} \right] - a_{0,p}, \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

$$b_{1,p} = b_{0,0} \left[ \frac{a_{1,p+1}}{a_{1,1}} \right] - b_{0,p}, \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

...

...

$$a_{q,p} = a_{q-1,q-1} \left[ \frac{b_{q-1,p}}{b_{q-1,q-1}} \right] - a_{q-1,p}, \quad (p = q, \dots, n)$$

$$b_{q,p} = b_{q-1,q-1} \left[ \frac{a_{q,p+1}}{a_{q,q}} \right] - b_{q-1,p}, \quad (p = q, \dots, n)$$

...

...

$$a_{n,n} = a_{n-1,n-1} \left[ \frac{b_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}} \right] - a_{n-1,n}$$

(ただし,  $a_{q,n+1} = 0$ )

を順に計算したとき, それらのうちで負となるものの数が  $\mu$  個であることである.

(証明) (17)式の誘導の過程より明かである.  $\square$

この定理の適用にあたっては, さきに記したように

$f_0(\alpha), f_1(\alpha)$  は  $\alpha$  について  $n$  次多項式でなければならない. 少なくとも (2.7)式における  $v$  が純虚数でない, すなわち,  $\omega_i \neq 0$  であることが必要である. ただし, このことがこの定理の一般性を失わせることにはならない.  $\omega_i = 0$  を指定したい場合, 完全にゼロではなく, 誤差として許される程度の微小量を与え計算すればよいからである. このことに注意するならば, 定理において示された判定法, そのアルゴリズムは容易に計算機上に置き換えることができる.

なおそこでの (3.10)式の係数の計算は, (2.7)式より

$$\Phi(j\alpha) = \sum_{k=0}^n a_k (u + v\alpha)^{n-k} (1 - j\alpha)^k \quad (3.13)$$

であるから, それぞれ展開して

$$\sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^{n-k} \sum_{l=0}^k a_k \binom{n-k}{n-k-h} \binom{k}{l} (-j)^l u^h v^{n-k-h} \alpha^{n-k-h+l}$$

さらに,  $m = k + h + l$  と置くことにより

$$\sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=k-m}^{n-m} a_k \binom{n-k}{n-m-l} \binom{k}{l} (-j)^l u^{m-k+l} v^{n-m-l} \alpha^{n-m}$$

よって,

$$a_{0,m} + jb_{0,m} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=k-m}^{n-m} a_k \binom{n-k}{n-m-l} \binom{k}{l} (-j)^l u^{m-k+l} v^{n-m-l} \quad (3.14)$$

で与えられる[5].

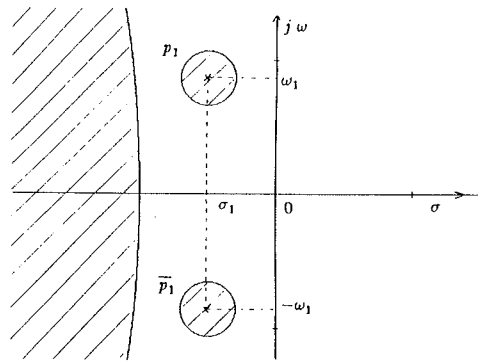


Fig.2 The specified discs.

#### 4. 制御系設計への応用

フィードバック制御系の設計は閉ループ系の特性たとえば極を指定し, それに基づいて必然的にコントローラが定まると考えるか, コントローラを修正して行

き、所要の閉ループ特性になるように調整することをよしとするかは、意見の分かれるところであるが、この両者の妥協はありえないか、というのがこの論文のもう一つの視点でもある。

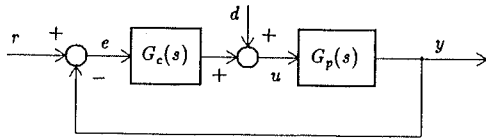


Fig.3 Feedback control system.

ところで、仮に極指定から出発するにしても、厳密にその値でなければならぬということはいずれである。そこでここでは、 $s$  平面上の円板でそれを指定することを考える。たとえば、Fig.2のようである。

簡単のために問題をFig.3に示すような1入力-1出力系とし、プラント(制御対象)  $G_p$  とコントローラ  $G_c$  を分子・分母多項式

$$G_p = \frac{N_p}{D_p}, \quad G_c = \frac{N_c}{D_c} \quad (4.1)$$

で表現して考える。ただし、 $G_p$  は真にプロパー ( $m_p = \theta(N_p)$ ,  $n_p = \theta(D_p)$ ,  $m_p < n_p$ )、 $G_c$  はプロパー ( $m_c = \theta(N_c)$ ,  $n_c = \theta(D_c)$ ,  $m_c \leq n_c$ )。明らかに特性多項式は

$$F(s) = N_p N_c + D_p D_c \quad (4.2)$$

これは  $n(n = n_p + n_c)$  次でありモニックであるとするれば、

$$F(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) \quad (4.3)$$

となる。

いま、極  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) を指定、すなわち  $F(s)$  を指定すれば、コントローラは

$$N_p X + D_p Y = F \quad (4.4)$$

となる適当な  $X = N_{c0}$ ,  $Y = D_{c0}$  をまず定め、次に

$$N_p X + D_p Y = 0 \quad (4.5)$$

を満たす  $X = \Delta N_{c0}$ ,  $Y = \Delta D_{c0}$  をもって、

$$N_c = N_{c0} + \Delta N_{c0}, \quad D_c = D_{c0} + \Delta D_{c0} \quad (4.6)$$

と設計することになる。

これらの考え方は、多項式だけではなく一般に安定な有理関数にもあてはまる。たとえば、 $\Delta N_{c0}$ ,  $\Delta D_{c0}$  が適当な極をもつ安定な有理関数でもよい(その場合系の次数が上がるが、結局、 $F(s)$  とその極の集合和に

より極を指定したことになる)。ただし、このような手続きで定めた(4.5),(4.6)式に基づくコントローラは必ずしもプロパーにならない。また、プロパーになるように定めると、積分特性  $D_c$  (低周波域における低感度特性) が不十分となり、その改善のためにコントローラの次数を必要以上に増大させることになる<sup>[2]</sup>。

そこでこの論文では、特性多項式  $F(s)$  に不確定項  $\Delta F$  を考慮し、(4.5)式に対し

$$N_p X + D_p Y = \Delta F \quad (4.7)$$

となる、 $X = \Delta N_{c1}$ ,  $Y = \Delta D_{c1}$  をもって

$$N_c = N_{c0} + \Delta N_{c1}, \quad D_c = D_{c0} + \Delta D_{c1} \quad (4.8)$$

とおき、コントローラを設計する<sup>[6]</sup>。特性根が少なくともさきの円板内に入り、指定された過渡特性に準ずるような制御系を実現しようとするのである。たとえば、 $k$  を任意の実数として  $X = k D_p$  と選べば、 $H$  を適当な安定多項式、 $\epsilon$  を正数として

$$Y = -k N_p + \epsilon H \quad (4.9)$$

と記すことができる。ただし、この場合  $\Delta F = \epsilon D_p H$  である。

このようにして得られた、プロパーでしかも要求する積分特性をもつコントローラ(4.8)式によって構成された閉ループ系の極が、指定した極  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) を中心とした半径  $r_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) の許された円板の中に入っているかどうかの判定については、次の三つの方法が考えられる。(a)特性根の直接の数値解法、(b)円軌跡の写像が原点をまわる回数を直接カウントする方法、そして(c)さきの定理の判定アルゴリズムによる方法である。しかるに、等根、近接した根などのある高次系、さらに制御系設計においてパラメータ修正量を見積りたいような場合には、本論文のような特性多項式の係数の連除による手法もそれなりに有効であると考えられる。なお、この(b),(c)の間の関係は、明らかに、安定判別におけるNyquistとRouth-Hurwitzのそれに相当する。

## 5. 簡単な数値例

ここで、指定する公称系の極が

$$p_1, p_2 = -0.5 \pm j 0.866, \quad p_3 = -2$$

特性多項式が  $k$  を任意の実数として、

$$F(s) = k (s^3 + 3s^2 + 3s + 2) \quad (5.1)$$

と書ける場合について、さきの定理の制御系設計への適用例をいくつか示す。

(例1) 制御対象が

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 4s} \quad (5.2)$$

すなわち、 $N_p=1$ 、 $D_p=s^2+4s$ の場合、(4.4)式より、 $N_{c0}=7s+2$ 、 $D_{c0}=s-1$ でコントローラは不安定となる。そこで、(4.7)式に基づいて

$$\Delta N_{c1} = -s^2 - 4s, \Delta D_{c1} = 1 + \epsilon s^2 \quad (5.3)$$

と選べば、

$$N_c = -s^2 + 3s + 2, D_c = s + \epsilon s^2 \quad (5.4)$$

であり、 $\epsilon > 0$ ならば安定なコントローラとなる。このとき、特性多項式は

$$\begin{aligned} F^*(s) &= F(s) + \Delta F(s) \\ &= s^3 + 3s^2 + 3s + 2 + \epsilon(s^4 + 4s^3) \end{aligned} \quad (5.5)$$

となる。いま、 $\epsilon=0.2$ とすると、半径  $r_1, r_2=0.3$ の円内の根は不変であり、他は半径9、中心(-10,0)の円内にあることをさきの定理より容易に判定することができる。もともと、この例はコントローラが右半面ゼロをもつ非最小位相系となるので、制御系としては必ずしも望ましい応答とはなっていないことに注意したい。

(例2) (例1)とは逆に、対象が不安定系

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 - s} \quad (5.6)$$

すなわち、 $N_p=1$ 、 $D_p=s^2-s$ の場合を考える。明らかに(4.4)式より、 $N_{c0}=7s+2$ 、 $D_{c0}=s+4$ である。そこで、(4.7)式において

$$\Delta N_{c1} = 2s^2 - 2s, \Delta D_{c1} = -2 + \epsilon s^2 \quad (5.7)$$

と選べば、

$$N_c = 2s^2 + 5s + 2, D_c = s + 2 + \epsilon s^2 \quad (5.8)$$

であり、コントローラの積分性が向上したと考えることができる。このとき、特性多項式は

$$F(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 2 + \epsilon(s^4 - s^3) \quad (5.9)$$

となる。 $\epsilon=0.2$ とすると、半径  $r_1, r_2=0.2$ の円内の根は不変であり、他は半径9、中心(-10,0)の円内にあることを(例1)と同様にして判定することができる。

(例3) 最後に、対象が非最小位相系

$$G_p(s) = \frac{1-s}{s^2+s} \quad (5.10)$$

となる  $N_p=1-s$ 、 $D_p=s^2+s$ の場合について考える。明らかに、 $k=2$ に対し、 $N_{c0}=3s+4$ 、 $D_{c0}=2s+7$ である。

そこで、(4.7)式において

$$\Delta N_{c1} = 3s^2 + 3s, \Delta D_{c1} = -3 + 3s + \epsilon s^2 \quad (5.11)$$

と選べば、

$$N_c = 3s^2 + 6s + 4, D_c = 5s + 4 + \epsilon s^2 \quad (5.12)$$

であり、コントローラの積分性は向上したことになる。このとき、特性多項式は

$$F(s) = 2s^3 + 6s^2 + 6s + 4 + \epsilon(s^4 + s^3) \quad (5.13)$$

となる。この場合  $\epsilon=0.4$ でも、(例2)と同じ円板条件を満たしている。

## 6. あとがき

この論文では、極配置の問題における許容度という意味で、特性根(極)が複素平面上の指定した円板内に入るための特性多項式の係数間の条件、その数を判定するアルゴリズムを示すとともに、不確定性を伴う制御系の設計への応用について記した。

数値例において示した制御系は低次のものであるが、さらに制御対象の次数に不確定性、たとえば

$D_p^* = D_p(1 + \tau s)$ 、 $\tau > 0$ となるような場合について、特性根が円板内に保持されるかどうか、そのロバスト性についての検討も行ってみたい。

さきに記したように、本論文のような特性多項式の係数の連除による判定法は、等根、近接した根などのある高次系、さらに制御系設計においてパラメータ修正量を見積りたいような場合に有効であると思われる。実際に、ここに示した判定アルゴリズムは高次、たとえば20次の特性多項式についても判定できるようプログラムされ、ワークステーション上において短時間でその数が出力されるようになっている。

## 参考文献

- [1] W. Wolovich : Linear Multivariable Control, Springer-Verlag (1974)
- [2] M. Vidyasagar : Control System Synthesis : A Factorization Approach, MIT Press (1985)
- [3] 高木貞治：代数学講義，共立出版，改訂版(1965)
- [4] 藤原松三郎：代数学(第一巻)，内田老鶴圃(1928)
- [5] 奥山佳史ほか：第8回制御理論シンポジウム資料，9/12(1979)
- [6] 奥山佳史：第32回自動制御連合講演会(1989)