TLSMによる連続および離散時間系の適応アルゴリズム

山本　祥弘

知能情報工学科

(1991年9月1日受理)

Continuous and Discrete time Adaptive Algorithms by the Truncated Least Squares Method

by

Yoshihiro YAMAMOTO

Department of Information and Knowledge Engineering

(Received September1 , 1991)

Adaptive algorithms for continuous systems by the Truncated Least Squares Method (TLSM) are presented. TLSM is a method based on the data for the last fixed interval. The result is presented in a most general form and some well known versions are also derived as special cases of the main result.

It is also shown that the discretization of the continuous algorithms lead to adaptive algorithms of discrete systems. In deriving these algorithms, it is shown that some notices are required to discretize a differential of a inverse function and an integral function.

The algorithms derived by the TLSM have excellent properties and are applicable for systems with time varying parameters.

Key words : adaptive algorithm,Parameter estimation, truncated least squares method, Continuous algorithm, discmete algorithm, discretization

1．はじめに

未知パラメータにたいする適応推定法はすでに多くの文献[3)-6)]に示されているが、それらは未知パラメータが固定またはゆるやかな変動を仮定しており、時変パラメータにたいしては適用できない。しかし、適応推定法の最も適応的な働きは、未知パラメータの任意の変動にたいする追従性である。一方、適応制御においても任意の規範入力にたいする追従特性を達成するためには、固定系、時変系いずれにおいても推定パラメータの真値への収束が必要である。

本論で提案するＴＬＳＭ(Truncated Least Squares Method)とは、過去指定した有限時間のデータにもとずく方法であり、突変する未知パラメータにたいしても有効である。この方法による離散時間系の適応アルゴリズムはすでに発表しているが[1),2)]、本論では同じ方法を連続時間系に応用した結果を述べる。その導出は最も一般的な評価にたいして示され、得られるアルゴリズムはその特殊な場合としてすでに知られている結果を含んでいることがわかる。

次に、連続時間系の結果を離散化することにより、離散時間系にたいする適応アルゴリズムを導出する。ただし、単純に離散化するだけでは正しい結果が得られなくそのための離散化について検討する。従来、連続系と離散系にたいしてそれぞれ別個に議論されていた適応アルゴリズムが、ここに示す離散化によって本質的には同一のものであることがわかる。

2．問題の設定とアルゴリズムの導出

本論で考察するシステムは

$$y(t)=\theta^T v(t) \tag{1}$$

で表されるｎ次元未知パラメータベクトルθに関して線形なシステムとする。ここに、$v(t)$はシステムの入出力あるいはそれらの適当なフィルタを通過した信号等よりなる既知信号ベクトルとする。θを求めるための評価としては、

$$J(t,\ \theta)=\int_{t-t_M}^{t} f(t,s)\,\{y(s)-\theta^T v(s)\}^2 ds \tag{2}$$

を考える。ここにt_Mは評価として考慮すべき期間を表し、$f(t,s)$はその重み関数であり、以下の条件を満たすものとする。

$$f(t,s)\geqq 0,\quad \frac{d}{dt}f(t,s)=h(t)f(t,s). \tag{3}$$

(2)式を最小とするθの推定値は

$$\frac{\partial J}{\partial \theta}=2\int_{t-t_M}^{t} f(t,s)\,\{y(s)-\theta^T v(s)\}\,v(s)ds=0 \tag{4}$$

を満たすことが必要であり、正規方程式として

$$\int_{t-t_M}^{t} f(t,s)v(s)v(s)^T ds\cdot\hat{\theta}(t)=\int_{t-t_M}^{t} f(t,s)v(s)y(s)ds \tag{5}$$

を得る。この両辺をｔで微分すると

$$\begin{aligned}&\int_{t-t_M}^{t} f(t,s)v(s)v(s)^T ds\cdot\dot{\hat{\theta}}(t)\\&\quad+\{f(t,t)v(t)v(t)^T\\&\quad-f(t,t-t_M)v(t-t_M)v(t-t_M)^T\}\,\hat{\theta}(t)\\&+h(t)\int_{t-t_M}^{t} f(t,s)v(s)v(s)^T ds\cdot\hat{\theta}(t)\\&=f(t,t)v(t)y(t)\\&\quad-f(t,t-t_M)v(t-t_M)y(t-t_M)\\&\quad+h(t)\int_{t-t_M}^{t} f(t,s)v(s)y(s)ds.\end{aligned} \tag{6}$$

ここで両辺最後の項は，正規方程式(5)式の関係より消去されるので、

$$\begin{aligned}&\int_{t-t_M}^{t} f(t,s)v(s)v(s)^T ds\cdot\dot{\hat{\theta}}(t)\\&=f(t,t)v(t)\,\{y(t)-v(t)^T\hat{\theta}(t)\}\\&\quad-f(t,t-t_M)v(t-t_M)\,\{y(t-t_M)-v(t-t_M)^T\hat{\theta}(t)\}\end{aligned} \tag{7}$$

が求まる。ここで

$$R(t\,;\,t_M)=Q(t\,;\,t_M)^{-1}=\int_{t-t_M}^{t} f(t,s)v(s)v(s)^T ds \tag{8}$$

とおくと

$$\dot{\hat{\theta}}(t)=Q(t\,;\,t_M)\,\{f(t,t)v(t)e(t)-f(t,t-t_M)v(t-t_M)e_M(t)\} \tag{9}$$

$$e(t)=y(t)-v(t)^T\hat{\theta}(t)$$

$$e_M(t)=y(t-t_M)-v(t-t_M)^T\hat{\theta}(t) \tag{10}$$

一方，(8)式両辺ｔで微分して

$$\dot{Q}(t\,;\,t_M)^{-1}=f(t,t)v(t)v(t)^T$$

$$-f(t,t-t_M)v(t-t_M)v(t-t_M)^T + h(t)Q(t;t_M)^{-1} \quad (11)$$

さらに逆行列の微分に関する公式より

$$\dot{R}(t;t_M)^{-1}=\dot{Q}(t;t_M)$$

$$=-Q(t;t_M)\dot{Q}(t;t_M)^{-1}Q(t;t_M)$$
$$=-h(t)Q(t;t_M)-Q(t;t_M)\{f(t,t)\cdot v(t)v(t)^T-f(t,t-t_M)v(t-t_M)\cdot v(t-t_M)^T\}Q(t;t_M) \quad (12)$$

となる。以上より，TLSMによる連続系の適応アルゴリズムは次のようになる。

《適応アルゴリズム1》

$$\dot{\hat{\theta}}(t)=Q(t;t_M)\{f(t,t)v(t)e(t)-f(t,t-t_M)v(t-t_M)e_M(t)\} \quad (13)$$

$$\dot{Q}(t;t_M)=-h(t)Q(t;t_M)-Q(t;t_M)\cdot\{f(t,t)v(t)v(t)^T-f(t,t-t_M)\cdot v(t-t_M)v(t-t_M)^T\}Q(t;t_M) \quad (14)$$

$$e(t)=y(t)-v(t)^T\hat{\theta}(t)$$

$$e_M(t)=y(t-t_M)-v(t-t_M)^T\hat{\theta}(t) \quad (15)$$

この《適応アルゴリズム1》において $t_M \to \infty$ ，従って $v(t-t_M)=0$とすると，

《適応アルゴリズム1'》

$$\dot{\hat{\theta}}(t)=f(t,t)Q(t;\infty)v(t)e(t) \quad (16)$$

$$\dot{Q}(t;\infty)=-h(t)Q(t;\infty)-f(t,t)\cdot Q(t;\infty)v(t)v(t)^TQ(t;\infty) \quad (17)$$

$$e(t)=y(t)-v(t)^T\hat{\theta}(t) \quad (18)$$

となる。以下では重み関数$f(t,s)$のよく知られた場合について具体的に記す。まず，$f(t,s)=1$とすると

《適応アルゴリズム2》

$$\dot{\hat{\theta}}(t)=Q(t;t_M)\{v(t)e(t)-v(t-t_M)e_M(t)\} \quad (19)$$

$$\dot{Q}(t;t_M)=-Q(t;t_M)\{v(t)v(t)^T-v(t-t_M)v(t-t_M)^T\}Q(t;t_M) \quad (20)$$

《適応アルゴリズム2'》

$$\dot{\hat{\theta}}(t)=Q(t;\infty)v(t)e(t) \quad (21)$$

$$\dot{Q}(t;\infty)=-Q(t;\infty)v(t)v(t)^TQ(t;\infty) \quad (22)$$

が求まる。《2'》は文献4）と同じとなる。次に，

$f(t,s)=e^{-\alpha(t-s)}$ とすると

《適応アルゴリズム3》

$$\dot{\hat{\theta}}(t)=Q(t;t_M)\{v(t)e(t)-e^{-\alpha t_M}v(t-t_M)e_M(t)\} \quad (23)$$

$$\dot{Q}(t;t_M)=\alpha Q(t;t_M)-Q(t;t_M)\{v(t)v(t)^T-e^{-\alpha t_M}\cdot v(t-t_M)v(t-t_M)^T\}Q(t;t_M) \quad (24)$$

《適応アルゴリズム3'》

$$\dot{\hat{\theta}}(t)=Q(t;\infty)v(t)e(t) \quad (25)$$

$$\dot{Q}(t;\infty)=-\alpha Q(t;\infty)-Q(t;\infty)v(t)v(t)^TQ(t;\infty) \quad (26)$$

となり，《3'》はすでに知られている形[5]と一致する。さらに，

$$f(t,s)=\lambda_2(s)e^{-\int_s^t\lambda_1(\tau)d\tau} \quad (27)$$

とおくと[6]，$f(t,t)=\lambda_2(t)$，$h(t)=-\lambda_1(t)$であり

《適応アルゴリズム4》

$$\dot{\hat{\theta}}(t)=Q(t;t_M)\{\lambda_2(t)v(t)e(t)-\lambda_2(t-t_M)e^{-\int_{t-t_M}^{t}\lambda_1(\tau)d\tau}\cdot v(t-t_M)e_M(t)\} \quad (28)$$

$$\dot{Q}(t;t_M)=\lambda_1(t)Q(t;t_M)-Q(t;t_M)\{\lambda_2(t)v(t)v(t)^T-\lambda_2(t-t_M)e^{-\int_{t-t_M}^{t}\lambda_1(\tau)d\tau}\cdot v(t-t_M)v(t-t_M)^T\}Q(t;t_M) \quad (29)$$

《適応アルゴリズム4'》

$$\dot{\hat{\theta}}(t)=\lambda_2(t)Q(t;\infty)v(t)e(t) \quad (30)$$

$$\dot{Q}(t;\infty)=\lambda_1(t)Q(t;\infty)-\lambda_2(t)Q(t;\infty)v(t)v(t)^TQ(t;\infty) \quad (31)$$

が得られる。《4'》は文献6）と同じである。

補足：このアルゴリズムの初期設定に関して

$$Q(0;t_M)^{-1}=\int_{0-t_M}^{0}f(0,s)v(s)v(s)^Tds \quad (32)$$

と$v(s)$, $-t_M \leqq s < 0$, は、初期推定ベクトル $\hat{\theta}(0)=\theta_0$ に対して(1)式を時間に関して逆向きに満たすものであり、かつ(32)式を正則とするものとする。これは、$t<0$ のとき θ_0である未知パラメータが$t=0$ で真値θに突変したと考えることに対応する。ただし、実際の構成は面倒であり、よく知られた通常の方法で充分有効である。詳細は文献1）と同じである。

一方、提案するアルゴリズム(13)、(14)式はつねに正規方程式(5)式をみたすものであり、不確定性のない理想状態のもとでは、初期設定の仕方によらず$Q(t;t_M)$が正則である限り推定値$\hat{\theta}$は時間$t=t_M$で真値を与えるものである。このことは、任意の時刻における未知パラメータの突変にたいしても成立し、適応アルゴリズムとして最も望ましい性質を備えている。ただし、外乱などの不確定性のある実際の場合にたいしては、t_Mを小さ過ぎない適切な値に選ぶことが重要である。

3．アルゴリズムの離散化

前節で得られたアルゴリズムの近似離散化は種々考えられるが、本節では、離散時間系に対して得られるアルゴリズムと一致する厳密な離散化を示す。すなわち、各信号は1サンプリング周期の間一定値、すなわち0次ホールドを通した信号とみなしてAD変換する。これは、微分を前進差分で置き換えることとなり、数値解法のEuler法と結果的に一致している。しかしながら、単純にこれを適用すると誤った結果となる場合がある。これを最初に考察し、その結果を、前節のアルゴリズムの離散化に応用する。

3．1 逆行列関数の微分の離散化

行列微分方程式

$$\dot{R}(t)=AR(t) \tag{33}$$

を考えると、その逆行列の微分方程式は

$$\dot{R}(t)^{-1}=-R(t)^{-1}\dot{R}(t)R(t)^{-1}=-R(t)^{-1}A \tag{34}$$

で与えられる。そこで、(33), (34)両式の微分を前進差分で置き換えることにより離散化すると、それぞれ

$$R_{k+1}-R_k=TAR_k \quad\rightarrow\quad R_{k+1}=(I+TA)R_k \tag{35}$$

$$R_{k+1}^{-1}-R_k^{-1}=-TR_k^{-1}A \quad\rightarrow\quad R_{k+1}=R_k^{-1}(I-TA)^{-1} \tag{36}$$

となり、(35)式の逆行列が(36)式とならないことがわかる。ただし、Tはサンプリング周期である。そこで、正しい離散化は次のように考えるべきである。すなわち、(34)式は次の恒等式

$$\frac{d}{dt}R(t)R(t)^{-1}=0 \tag{37}$$

から導かれるので、これを離散化すると

$$R_{k+1}R_{k+1}^{-1}-R_kR_k^{-1}=0 \tag{38}$$

となる。以下(37), (38)式をそれぞれ変形して、

$$R(t)\dot{R}(t)^{-1}+\dot{R}(t)R(t)^{-1}=0 \tag{37a}$$

$$R_{k+1}(R_{k+1}^{-1}-R_k^{-1})+(R_{k+1}-R_k)R_k^{-1}=0 \tag{38a}$$

さらに、

$$\dot{R}(t)^{-1}=-R(t)^{-1}\dot{R}(t)R(t)^{-1} \tag{37b}$$

$$R_{k+1}^{-1}-R_k^{-1}=-R_{k+1}^{-1}(R_{k+1}-R_k)R_k^{-1} \tag{38b}$$

なる関係を得る。すなわち、$Q=R^{-1}$とするとき、

$$Q_{k+1}-Q_k=-Q_{k+1}(Q_{k+1}^{-1}-Q_k^{-1})Q_k, \tag{39}$$

でなければならない。結論として、

補題：$\dot{R}=f(R) \rightarrow R_{k+1}-R_k=Tf(R_k)$, (40)

とするとき

$$\dot{Q}=-Qf(Q^{-1})Q \rightarrow Q_{k+1}-Q_k=-Q_{k+1}Tf(Q_k^{-1})Q_k \tag{41}$$

としなければならない。

例：$\dot{R}(t)=AR(t) \quad\rightarrow\quad R_{k+1}-R_k=TAR_k$

$\dot{R}(t)^{-1}=-R(t)^{-1}A \rightarrow R_{k+1}^{-1}-R_k^{-1}=-TR_{k+1}^{-1}A$

3．2 積分の離散化

$$\dot{R}(t)=f(R(t),t) \tag{42}$$

の解を

$$R_{k+1}-R_k=Tf(R_k,k) \tag{43}$$

と考えるとき、(42)式の積分

$$R(t)=\int_0^t f(R(s),s)ds \tag{44}$$

の対応する離散化は

$$R_k=T\sum_{j=0}^{k-1}f(R_j,j) \tag{45}$$

とすべきであり、

$$R_k=T\sum_{j=1}^{k}f(R_j,j) \tag{46}$$

としてはならない。なぜなら、(45)式より(43)式が得ら

れるが、(46)式からは求まらないからである。すなわち、(46)式にたいしては、(42)式を後退差分で置き換えることが対応する。結局、(44)式の積分は$0 \leqq s < t$と考えることになる。このことは、関数Rがサンプリング区間で一定の階段状関数であると考えることからも明かである。

3.3 アルゴリズムの離散化

先の離散化の方法を［適応アルゴリズム1］に適用する。以下、$t=kT$, $t_M=MT$, T：サンプリング周期，とし、$y(kT)=y_k$等と記す。まず、システム表現(1)式は差分系にたいして、

$$y_k=\theta^T v_k \tag{47}$$

と表される。評価(2)式は

$$J(t,\theta)=\int_{t-t_M}^{t} f(t,s)\{y(s)-\theta^T v(s)\}^2 ds$$
$$=\int_0^{t_M} f(t,t-\sigma)\{y(t-\sigma)-\theta^T v(t-\sigma)\}^2 d\sigma \tag{48}$$

より、離散評価としては、

$$J_k(\theta)=\sum_{j=k-M}^{k-1} Tf_{k,j}\{y_j-\theta^T v_j\}^2$$
$$=\sum_{i=1}^{M} Tf_{k,k-i}\{y_{k-i}-\theta^T v_{k-i}\}^2 \tag{49}$$

が対応する。ただし、(3)式のh(t)にたいしては、

$$h_k=(f_{k+1,j}-f_{k,j})/Tf_{k,j} \tag{50}$$

とする。さらに(8)式にたいして

$$R_k=Q_k^{-1}=T\sum_{j=k-M}^{k-1} f_{k-1,j}v_j v_j^T \tag{51}$$

が対応する。ここで、

$$\bar{f}_{k,j}=Tf_{k,j}, \qquad \bar{h}_k=Th_k \tag{52}$$

とおくと、(44), (45)式はそれぞれ

$$J_k(\theta)=\sum_{j=k-M}^{k-1} \bar{f}_{k,j}\{y_j-\theta^T v_j\}^2$$
$$=\sum_{i=1}^{M} \bar{f}_{k,k-i}\{y_{k-i}-\theta^T v_{k-i}\}^2 \tag{44a}$$

$$\bar{h}_k=(\bar{f}_{k+1,j}-\bar{f}_{k,j})/\bar{f}_{k,j}$$
$$=(f_{k+1,j}-f_{k,j})/f_{k,j} \tag{45a}$$

となる。このとき(13)式にたいしては

$$\theta_{k+1}=\theta_k+TQ_{k+1}\{f_k v_k e_k-f_{k-M}v_{k-M}e_{Mk}\}$$
$$=\theta_k+\bar{f}_k g_{1k}e_k-\bar{f}_{k-M}g_{2k}e_{Mk} \tag{53}$$

$$g_{1k}=Q_{k+1}v_k, \qquad g_{2k}=Q_{k+1}v_{k-M},$$
$$e_k=y_k-v_k^T\theta_k, \qquad e_{Mk}=y_{k-M}-v_{k-M}^T\theta_k,$$
$$\bar{f}_k=Tf_k=Tf_{k,k}, \qquad \bar{f}_{k-M}=Tf_{k-M}=Tf_{k,k-M} \tag{54}$$

ただし、Q_{k+1}はステップkにおいて求まっているとしている。一方、Q(t)にたいしては、以下の2通りが考えられる。

[3-1] (14)式にたいして単純に前進差分をもちいることは先のの理由で不可能である。したがって、(14)式にたいする本来の(11)式を前進差分をもちいて離散化すると、

$$Q_{k+1}^{-1}-Q_k^{-1}=Tf_k v_k v_k^T$$
$$-Tf_{k-M}v_{k-M}v_{k-M}^T+Th_k Q_k^{-1} \tag{55}$$

$$Q_{k+1}^{-1}=(1+Th_k)Q_k^{-1}$$
$$+Tf_k v_k v_k^T-Tf_{k-M}v_{k-M}v_{k-M}^T$$
$$=(1+\bar{h}_k)Q_k^{-1}+\bar{f}_k v_k v_k^T-\bar{f}_{k-M}v_{k-M}v_{k-M}^T \tag{56}$$

を得る。これに逆行列の補題[3),4)]をもちいると、

$$Q_{k+1}=\alpha_k\ (I-\alpha_k\bar{f}_k g_{1k}v_k^T$$
$$+\alpha_k\bar{f}_{k-M}g_{2k}v_{k-M}^T)\ Q_k, \tag{57}$$

$$d_k g_{1k}=(1-\alpha_k\bar{f}_{k-M}s_{2k})Q_k v_k$$
$$+\alpha_k\bar{f}_{k-M}s_{0k}Q_k v_{k-M},$$

$$d_k g_{2k}=(1+\alpha_k\bar{f}_k s_{1k})Q_k v_{k-M}$$
$$-\alpha_k\bar{f}_k s_{0k}Q_k v_k,$$

$$d_k=(1+\alpha_k\bar{f}_k s_{1k})(1-\alpha_k\bar{f}_{k-M}s_{2k})$$
$$+\alpha_k^2\bar{f}_k\bar{f}_{k-M}(s_{0k})^2,$$

$$\alpha_k=1/(1+\bar{h}_k), \quad s_{0k}=v_k^T Q_k v_{k-M}=v_{k-M}^T Q_k v_k$$
$$s_{1k}=v_k^T Q_k v_k, \quad s_{2k}=v_{k-M}^T Q_k v_{k-M}, \tag{58}$$

となる。

[3-2] (14)式を先の補題に記した方法で離散化すると

$$Q_{k+1}-Q_k=-Th_k Q_{k+1}-TQ_{k+1}\ (f_k v_k v_k^T$$
$$-f_{k-M}v_{k-M}v_{k-M}^T)\ Q_k$$
$$=-\bar{h}_k Q_{k+1}-Q_{k+1}\ (\bar{f}_k v_k v_k^T$$
$$-\bar{f}_{k-M}v_{k-M}v_{k-M}^T)\ Q_k \tag{59}$$

$$Q_{k+1}\ \{(1+\bar{h}_k)I+(\bar{f}_k v_k v_k^T$$
$$-\bar{f}_{k-M}v_{k-M}v_{k-M}^T)\ Q_k\}=Q_k \tag{60}$$

$$Q_{k+1}=Q_k\ \{(1+\bar{h}_k)I+(\bar{f}_k v_k v_k^T$$
$$-\bar{f}_{k-M}v_{k-M}v_{k-M}^T)\ Q_k\}^{-1}$$
$$=\{(1+\bar{h}_k)Q_k^{-1}+(\bar{f}_k v_k v_k^T$$
$$-\bar{f}_{k-M}v_{k-M}v_{k-M}^T)\}^{-1} \tag{61}$$

となり、これは(56)式と同じであることから、(57), (58)式が求まる。以上より(49)式の評価にたいする離散時間系(47)式の適応アルゴリズムは次のように求まる。

《離散時間適応アルゴリズム1》

$$\theta_{k+1}=\theta_k+\bar{f}_k g_{1k} e_k-\bar{f}_{k-M} g_{2k} e_{Mk} \tag{62}$$

$$g_{1k}=Q_{k+1} v_k, \qquad g_{2k}=Q_{k+1} v_{k-M},$$

$$e_k=y_k-v_k^T\theta_k, \qquad e_{Mk}=y_{k-M}-v_{k-M}^T\theta_k,$$

$$\bar{f}_k=Tf_{k,k}, \qquad \bar{f}_{k-M}=Tf_{k,k-M} \tag{63}$$

$$Q_{k+1}=\alpha_k\ (I-\alpha_k\bar{f}_k g_{1k} v_k^T + \alpha_k\bar{f}_{k-M} g_{2k} v_{k-M}^T)\ Q_k, \tag{64}$$

$$d_k g_{1k}=(1-\alpha_k\bar{f}_{k-M} s_{2k})Q_k v_k + \alpha_k\bar{f}_{k-M} s_{0k} Q_k v_{k-M},$$

$$d_k g_{2k}=(1+\alpha_k\bar{f}_k s_{1k})Q_k v_{k-M} - \alpha_k\bar{f}_k s_{0k} Q_k v_k,$$

$$d_k=(1+\alpha_k\bar{f}_k s_{1k})(1-\alpha_k\bar{f}_{k-M} s_{2k}) + \alpha_k^2\bar{f}_k\bar{f}_{k-M}(s_{0k})^2,$$

$$\alpha_k=1/(1+\bar{h}_k),\ s_{0k}=v_k^T Q_k v_{k-M}=v_{k-M}^T Q_k v_k$$

$$s_{1k}=v_k^T Q_k v_k, \qquad s_{2k}=v_{k-M}^T Q_k v_{k-M}, \tag{65}$$

《離散時間適応アルゴリズム1'》

$$\theta_{k+1}=\theta_k+\bar{f}_k g_{1k} e_k \tag{66}$$

$$Q_{k+1}=\alpha_k\ (I-\alpha_k\bar{f}_k g_{1k} v_k^T)\ Q_k, \tag{67}$$

$$d_k g_{1k}=Q_k v_k, \qquad d_k=1+\bar{\alpha}_k f_k s_{1k},$$

$$\alpha_k=1/(1+\bar{h}_k), \qquad s_{1k}=v_k^T Q_k v_k, \tag{68}$$

それぞれの重み関数にたいして、《1》，《1'》における対応する変更のみを以下に記す。

《離散時間適応アルゴリズム2，2'》

$f(t,s)=1$ にたいして

$$f_{k,j}=1 \tag{69}$$

が対応し、

$$f_k=f_{k-M}=1, \qquad \alpha_k=1 \tag{70}$$

とすればよい。

《離散時間適応アルゴリズム3，3'》

$f(t,s)=e^{-\alpha(t-s)}$ の場合にたいして、

$$f_{k,j}=e^{-\alpha(k-j)}=\lambda^{k-j}, \qquad \lambda=e^{-\alpha} \tag{71}$$

が対応し、

$$f_k=1, \qquad f_{k-M}=\lambda^M,$$

$$h_k=\lambda-1\ \ ((39)式より), \qquad \alpha_k=\lambda^{-1} \tag{72}$$

とすればよい。

《3》の結果は、文献1）の結果と（若干の置き方の違いをのぞいて）一致する。とくに、本結果では、θ_k、Q_kがそれぞれθ_{k+1}、Q_{k+1}となっている。この理由は(49)，(51)式における定義の仕方による。文献1）では(49)，(51)式の右辺をそれぞれ$J_{k-1}(\theta)$，Q_{k-1}^{-1}とおいている。

《離散時間適応アルゴリズム4，4'》

$f(t,s)=\lambda_2(s)e^{-\int_s^t\lambda_1(\tau)d\tau}$ に対して

$$f_{k,j}=\lambda_{2,j}\exp\left\{-T\sum_{i=j}^{k-1}\lambda_{1,i}\right\} \tag{73}$$

が対応し、

$$f_k=\lambda_{2,k}, \quad f_{k-M}=\lambda_{2,k-M}\exp\left\{-T\sum_{i=k-M}^{k-1}\lambda_{1,i}\right\},$$

$$h_k=(e^{-T\lambda_{1,k}}-1)/T,$$

$$\alpha_k=\lambda_k^{-1}, \qquad \lambda_k=e^{-T\lambda_{1,k}} \tag{74}$$

とすればよい。

4．まとめ

本論では、TLSMの考え方により一般的な適応アルゴリズムを連続系に対して導出し、さらにその離散化について考察した。得られたアルゴリズムは最も一般的な評価にたいして導かれており、その評価の特別な場合としてすでによく知られている３通りの場合をそれぞれ示した。

次に、連続系に対するアルゴリズムを離散化することにより、離散系の適応アルゴリズムを導いた。その結果は、離散系の定式化による結果と一致している。この一致するアルゴリズムを得るためには、連続系にたいする結果を単に離散近似するだけでは求まらないことを示した。微分を前進差分で置き換えることはよく知られているが、逆関数の微分あるいは積分を離散化するためには、注意が必要であり、全体にたいする整合性が必要である。

参考文献：

1)山本祥弘：修正最小２乗法による適応アルゴリズム、SICE論文集、26-12，22/27,1990.

2)山本祥弘：直交射影アルゴリズムによる適応推定法、SICE論文集、26-3,30/35,1990.

3)金井喜美雄：ロバスト適応制御入門，p25，オーム社，1989.

4)市川邦彦：制御系の設計理論，p95，p148，技術書院，1988.

5)K.J.Åström, B.Wittenmark ： Adaptive Control, p71, Addison-Wesley, 1989.

6)新中新二：適応アルゴリズム，p168，産業図書,1990.