大変形問題解析のための流動要素法プログラム(FLEM)

西村　強・木山　英郎・藤村　尚・池添　保雄

土木工学科

A Computer Program of the Flow Element Method for Large Deformation and Flow Problems

by

Tsuyoshi NISHIMURA, Hideo KIYAMA, Hisashi FUJIMURA and Yasuo IKEZOE

(Received September 1, 1991)

Abstract

This paper describes the FLEM (FLow Element Method) computer program which analyzes geotechnical problems, including large deformation and flow.

The processes of making a element stiffness matrix and calculating nodal forces are the same to FEM (a global stiffness matrix is not formed). Each node has a virtual mass representing the mass of the surrounding elements, and under unbalanced nodal forces each node displaces along a direction of nodal force vector according to the equation of motion. FLEM adopts the explicit time-marching solution scheme in solving the equation of motion. This process is the same to DEM, so it may be said that FLEM is a practical method coupling DEM with FEM necessarily. It should be emphasized that FLEM analysis does not need large matrix computations and complex lagrangian coordinate expressions.

The computation procedures of the method are described, and a simple example problem is given which illustrates the capabilities of the code.

Key words : Large deformation, Equation of motion, DEM, FEM, Explicit time-marching scheme

1．まえがき

流動要素法(FLEM)は，軟岩や粘性地盤において問題となるいわゆる塑性流動のような，連続体としての大変形や流動挙動をも解析可能な数値解析法として開発したものである．

これまで，微小変形に対しては有限要素法(FEM)が広範囲に用いられてきたが，有限変形の解析を行うためには煩雑なラグランジュ座標の導入などの工夫が必要となり，ここでいう大変形にいたっては未だその一般的解法を見ない．一方，個別要素法(DEM)は，基礎式である運動方程式を陽形式時間差分にして要素ごとに用いるため，大容量のマトリックスを要しないこと，時々刻々の要素座標系を用いるため大変形に対してもラグランジュ座標を改めて考慮する必要がない等の利点がある．しかしながら，DEMは要素の接触・離散によって集合全体の大変形を表現するため，隣接要素が連続したままで，要素の変形によって全体の大変形を表現するような場合には適用できない．

FLEMは，DEMの基本となっている運動方程式の陽形式時間差分による逐次解法を活かし，各要素の自由な変形を許しながら要素間の連続性を保持し，全体としての大変形から流動までを解析できる点がその大きな特徴である．すでに，要素分割，基本定式化については報告している[1),2)]ので，ここでは，開発したプログラムの概要を入力データ，それに対応する解析結果を示しながら説明する．

2．解析プログラムの概要

2．1　メインプログラムとサブモジュール

図-1はFLEM2次元解析プログラムのフローチャートである．メインプログラムを構成するサブモジュール名とその簡単な機能を説明している．

DATAIN［初期データの入力］
- SIDNOD［分布荷重を与える要素境界上の節点番号を求める］
- DSTNOD［分布荷重による等価節点力を求める］

BDYSET［変位境界条件のセット］

MASS［各節点に与えられる質量を求める］

FLIN［継続計算用データの読み込み］

KMTRX［４辺形要素の剛性行列を求める］

EFORCE［変位増分による節点力増分を求める（変位抗力）］

DFORCE［粘性抗力を求める（速度抗力）］

DISP［各節点の変位増分を求める］

STRCPX［各要素の応力，ひずみを求める］

PRINTU［各節点の座標値，変位増分を出力する］

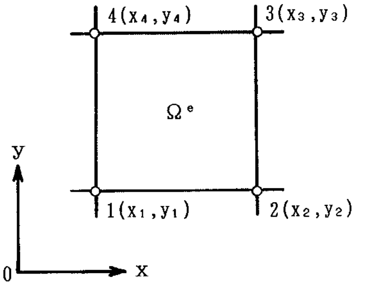
PRINTS［各要素の応力，ひずみを出力する］

END

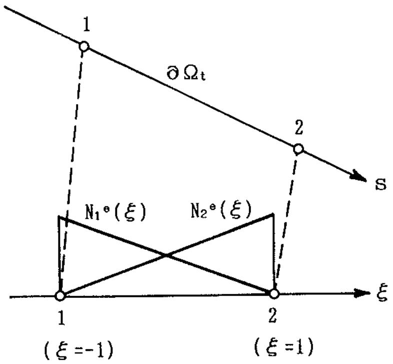
図－1　FLEM解析フローチャート

また，以下のようなサブモジュールが準備されており，必要に応じて用いられる．

- *JACOB ：2次元4辺形要素のヤコビアンマトリックスを求める
- *BMTRX ：2次元4辺形要素の節点変位－ひずみ変換マトリックスを求める
- *EMTRX ：応力－ひずみマトリックスを求める
- *STR24 ：4辺形要素の応力を求める
- *PRTR1 ：主応力の大きさとその方向および破壊接近度を求める
- *PRTN1 ：主ひずみの大きさとその方向を求める
- *ELMTYP：要素のタイプの識別（平面応力or平面ひずみあるいはガウス点数など）
- *EXCA ：掘削解放力を求め，当該節点に等価節点力として割り振る
- *SHP ：2次元4辺形要素の形状関数
- *DSHP ：2次元4辺形要素の形状関数の微分
- *SHP21 ：2次元線要素の形状関数
- *DSHP21：2次元線要素の形状関数の微分
- *NOSTR ：要素内の積分点数の算出



図－2　要素Ω^eの構成節点と座標



図－3　線要素の形状関数と荷重境界$\partial\Omega_t$

2．2　各サブモジュールの機能

本節では，図-1のフローチャートの各サブモジュールの機能を説明する．説明の都合上，解析手法の主な手順毎にまとめたが，各項とも対応するサブモジュール名を [] に示している．さらに，当該サブモジュールからCALLされるサブモジュール名を()内に示している．

節点の質量〔MASS〕

図-2のように要素Ω^eを構成する節点の座標値が与えられたとすると，Ω^eの断面積は次式で与えられる．

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left\|\begin{matrix} x_{12} & y_{12} \\ x_{23} & y_{23}\end{matrix}\right\|+\left\|\begin{matrix} x_{34} & y_{34} \\ x_{41} & y_{41}\end{matrix}\right\|\right\} \quad (1)$$

ただし，$x_{ij}=x_i-x_j$，　$y_{ij}=y_i-y_j$であり，2重線部は行列式の絶対値を表している．

本プログラムでは，運動方程式をρg（ρ：密度，g：重力加速度）で相対化して用いているので，力の次元を有する量は，計算上は体積の次元として取り扱われている．このことと2次元解析プログラムであることを考慮すれば，単位奥行き当りの質量としてこのSの値をそのまま用いることができる．

Sは，4等分の後，構成節点に割り振られ，最終的に1節点は周辺4要素の質量和の1/4を有することになる．

境界上の外荷重ベクトル〔DSTNOD(SHP21,DSHP21)〕

外荷重分布(t_x, t_y)が与えられている場合の要素荷重ベクトル$\mathbf{T}^e$の求め方について触れておく．

節点1, 2, ・・・・, nにより構成される荷重境界$\partial\Omega_t$に局所座標系sを導入すると，

$$ds=(dx^2+dy^2)^{1/2} \quad (2)$$

この境界上に制限された形状関数は，n=2に対しては

$$N_1^e(\xi)=(1-\xi)/2 \quad N_2^e(\xi)=(1+\xi)/2 \quad (3)$$

ベクトル$\mathbf{T}^e$を

$$\mathbf{T}^e=[T_{x1}^e, T_{y1}^e, \cdots\cdot, T_{x\alpha}^e, T_{y\alpha}^e, \cdots, T_{xn}^e, T_{yn}^e] \quad (4)$$

と書くと，第α節点に関する項は，以下のとおり求められる．

$$T_{x\alpha}^e=\int_{-1}^{1} t_x N_\alpha^e(\xi)\frac{ds}{d\xi}d\xi$$
$$T_{y\alpha}^e=\int_{-1}^{1} t_y N_\alpha^e(\xi)\frac{ds}{d\xi}d\xi \quad (5)$$

ただし，式(2)より，

$$\frac{ds}{d\xi}=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2\right]^{1/2}$$
$$=\left[\left(\sum_{\alpha=1}^{n} x_n\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial\xi}\right)^2+\left(\sum_{\alpha=1}^{n} y_n\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial\xi}\right)^2\right]^{1/2} \quad \cdots\cdots(6)$$

分布荷重(t_x, t_y)が各要素の節点の値として

$t_{x1}^e, t_{x2}^e, \cdots\cdots, t_{xn}^e$　　$t_{y1}^e, t_{y2}^e, \cdots\cdots, t_{yn}^e$

と与えられるとその分布はξの関数として

$$t_x(\xi)=\sum_{\alpha=1}^{n} t_{x\alpha}^e N_\alpha^e(\xi) \qquad t_y(\xi)=\sum_{\alpha=1}^{n} t_{y\alpha}^e N_\alpha^e(\xi) \quad \cdots\cdots(7)$$

と計算される．

(7)式を(5)に代入し，数値積分を施すと，ベクトル$\mathbf{T}^e$の各成分は

$$T_{x\alpha}^e=\sum_{i=1}^{m} c_i t_x(\xi_i)N_\alpha^e(\xi_i)\frac{ds}{d\xi}$$
$$T_{y\alpha}^e=\sum_{i=1}^{m} c_i t_y(\xi_i)N_\alpha^e(\xi_i)\frac{ds}{d\xi} \quad (8)$$

（m：積分点数，c_i：重み）

と求めることができる．

形状関数と要素剛性マトリックス〔KMTRX(EMTRX, JACOB(DSHP), BMTRX(DSHP))〕[3),4),5)]

流動要素法では，通常4辺形4節点要素が用いられるが，これは有限要素法で知られているように解の対称性の良さに加えて，FLEM特有の節点変位に同等に反応する要素形状が望ましいからである．

図-4の要素Ω^e内の変位u, vが次のように近似されるとする．

$$u_h=N_1^e(x,y)u_1+N_2^e(x,y)u_2+N_3^e(x,y)u_3+N_4^e(x,y)u_4=\sum_{\alpha=1}^{4}u_\alpha N_\alpha^e(x,y)$$

$$v_h=N_1^e(x,y)v_1+N_2^e(x,y)v_2+N_3^e(x,y)v_3+N_4^e(x,y)v_4=\sum_{\alpha=1}^{4}v_\alpha N_\alpha^e(x,y)$$

$$\cdots\cdots(9)$$

上式をまとめると

$$\mathbf{u}\cong\mathbf{u}_h=\mathbf{N}^e(x,y)\mathbf{U}^e \qquad (10)$$

ここに，

$$\mathbf{N}^e(x,y)=\begin{bmatrix}N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 & N_4^e & 0\\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 & N_4^e\end{bmatrix} \qquad (11)$$

は要素形状関数マトリックス．

$$\mathbf{U}^e=[u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4]^T \qquad (12)$$

は要素の節点変位ベクトルである．

要素Ω^e内のひずみは，(9)より次のとおり計算される．

$$\varepsilon_x\cong\varepsilon_{hx}=\frac{\partial u_h}{\partial x}=\sum_{\alpha=1}^{4}u_\alpha\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y\cong\varepsilon_{hy}=\frac{\partial v_h}{\partial y}=\sum_{\alpha=1}^{4}v_\alpha\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}\cong\gamma_{xy}=\frac{\partial u_h}{\partial y}+\frac{\partial v_h}{\partial x}=\sum_{\alpha=1}^{4}\left(u_\alpha\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial y}+v_\alpha\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x}\right)$$

$$\cdots\cdots(13)$$

$\mathbf{B}^e$を節点変位ひずみマトリックスとして，マトリックス表示すると

$$\boldsymbol{\varepsilon}\cong\boldsymbol{\varepsilon}_h=\mathbf{B}^e\mathbf{U}^e \qquad (14)$$

ここで

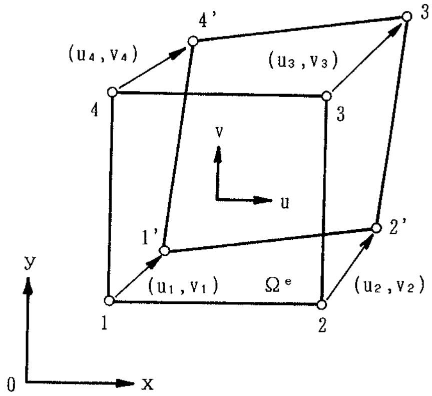
$$\mathbf{B}_\alpha{}^e=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial x}\end{bmatrix}$$

とおくと，

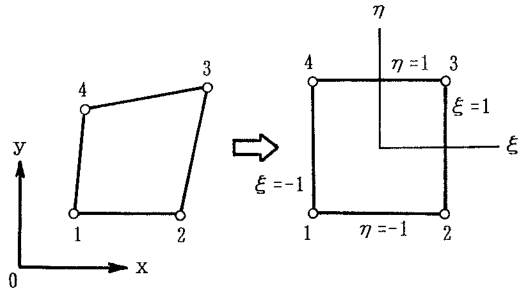
$$\mathbf{B}^e=[\mathbf{B}_1{}^e \quad \mathbf{B}_2{}^e \quad \mathbf{B}_3{}^e \quad \mathbf{B}_4{}^e] \qquad (15)$$

となる．

ここで，局所座標系ξ，η $(-1\leqq\xi,\ \eta\leqq1)$を導入して，



図－4　節点変位ベクトル



図－5　4節点要素における
全体座標系(x, y)と局所座標系(ξ, η)

各要素中の変位が次式のとおり近似されるとする．

$$u\cong u_h=\sum_{\alpha=1}^{4}u_\alpha N_\alpha^e(\xi,\eta) \qquad v\cong v_h=\sum_{\alpha=1}^{4}v_\alpha N_\alpha^e(\xi,\eta)$$

$$\cdots\cdots(16)$$

それと同時に全体座標x, yも，

$$x=\sum_{\alpha=1}^{4}x_\alpha N_\alpha^e(\xi,\eta) \qquad y=\sum_{\alpha=1}^{4}y_\alpha N_\alpha^e(\xi,\eta) \qquad (17)$$

と座標変換される．x_α，y_αは節点座標値である．図-5に全体座標系と局所座標系の対応を示している．形状関数は，4節点要素に対しては次のように与えられる．

$$\begin{aligned}N_1^e(\xi,\eta)&=(1-\xi)(1-\eta)\\ N_2^e(\xi,\eta)&=(1+\xi)(1-\eta)\\ N_3^e(\xi,\eta)&=(1+\xi)(1+\eta)\\ N_4^e(\xi,\eta)&=(1-\xi)(1+\eta)\end{aligned} \qquad (18)$$

全体座標系(x, y)と局所座標系(ξ, η)の微分は

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \tag{19}$$

と関係づけられ，

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{20}$$

はヤコビアンマトリックスと呼ばれること，また，この逆行列が，

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{21}$$

と書かれ，ヤコビアン（行列式）が

$$J = \det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{22}$$

となることは周知のとおりである．

式(17)のような変換を用いると，ヤコビアンマトリックス(20)は

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$J_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} \quad J_{12} = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}$$

$$J_{21} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{\alpha=1}^{4} y_\alpha \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} \quad J_{22} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{\alpha=1}^{4} y_\alpha \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}$$

となり，$\partial N_\alpha^e/\partial \xi$，$\partial N_\alpha^e/\partial \eta$ は式(18)よりつぎのようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1^e}{\partial \xi} &= -(1-\eta)/4 & \frac{\partial N_1^e}{\partial \eta} &= -(1-\xi)/4 \\
\frac{\partial N_2^e}{\partial \xi} &= (1-\eta)/4 & \frac{\partial N_2^e}{\partial \eta} &= -(1+\xi)/4 \\
\frac{\partial N_3^e}{\partial \xi} &= (1+\eta)/4 & \frac{\partial N_3^e}{\partial \eta} &= (1+\xi)/4 \\
\frac{\partial N_4^e}{\partial \xi} &= -(1+\eta)/4 & \frac{\partial N_4^e}{\partial \eta} &= (1-\xi)/4
\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(24)$$

また，$\mathbf{J}$ の逆は，

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{25}$$

(14)式で示した要素の節点変位ひずみマトリックス $\mathbf{B}^e$ に対しては，

$$\mathbf{B}^e = [\mathbf{B}_1^e \quad \mathbf{B}_2^e \quad \mathbf{B}_3^e \quad \mathbf{B}_4^e]$$

$$\mathbf{B}_\alpha^e = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{26}$$

と書けるが，各成分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \\
&= J_{11}^{-1} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} + J_{21}^{-1} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \\
\frac{\partial N_\alpha^e}{\partial y} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta} \\
&= J_{12}^{-1} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \xi} + J_{22}^{-1} \frac{\partial N_\alpha^e}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{27}$$

これらの近似を用いると有限要素法でよく知られているように，要素剛性マトリックスは次式となる．

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\mathbf{B}^e(\xi, \eta))^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e(\xi, \eta) J d\xi d\eta \tag{28}$$

ここに，$\mathbf{D}$ は弾性マトリックスであり，例えば，等方材料の平面応力問題では，

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

平面ひずみ問題では，

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(30)$$

と与えられる．

(28)式の被積分関数は，有理関数となり，数式的にその積分値を求めることも不可能ではないが，相当の労力を要する．そのため，通常は数値積分を用いる．

$$\mathbf{K}^e = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_i c_j (\mathbf{B}^e(\xi_i, \eta_j))^T \mathbf{D} \mathbf{B}^e(\xi_i, \eta_j) |J_{ij}| \qquad \cdots\cdots(31)$$

$\mathbf{K}^e$ は4辺形4節点要素の場合，8×8のマトリックスとな

る．以下に述べるように，FLEMの場合全体剛性マトリックスは必要ないので，上述の要素剛性マトリックス以上の大容量のマトリックス演算の必要はない．

節点力の増分［EFORCE,DFORCE］

さて，FLEMの主体をなすDEMにおいては，時間増分Δt間の変位増分$(\Delta u_i, \Delta v_i)$を用いるので，ここでは，上述の諸式(12)～(31)の(u,v)を$(\Delta u_i, \Delta v_i)$とみなして使用する．たとえば，(12)式で示した節点変位をDEMにおけるΔt間の変位増分とし，これが微小変形に収まるようにΔtを選定すれば，節点力増分の計算に(31)式で求めた$\mathbf{K}^e$を用いることができる．ただし，基礎式である運動方程式に陽形式の時間差分による逐次解法を適用し，その変位抗力の算出にこの$\mathbf{K}^e$を用いるとき，$\mathbf{K}^e$はその時点の変形状態に対してのみ有効なものとなるため，Δt毎に更新されることになる．

図-6を参照して，節点iに関係する周辺4要素の中の任意の要素jについて，節点iの節点力増分は次式で与えられる．

$$\begin{bmatrix} \Delta F_{xi}{}^{j} \\ \Delta F_{xi}{}^{j} \end{bmatrix} = [K_i{}^j][\Delta u_1{}^j, \Delta v_1{}^j, \cdots, u_4{}^j, \Delta v_4{}^j]^T \tag{32}$$

ここに，$[K_i{}^j]$は要素jの変形とともに，Δtごとに変化する要素剛性マトリックス$\mathbf{K}^e$の節点iに関与する部分マトリックスである．

節点iの節点力増分は，節点iに関与するすべての要素jについて式(32)の和として次式で求まる．

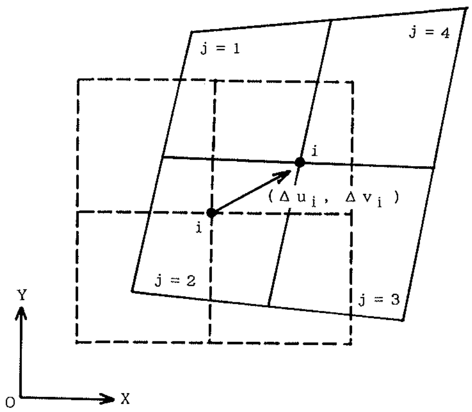
$$\Delta F_{xi} = \sum_{j=1}^{4} \Delta F_{xi}{}^{j}, \quad \Delta F_{yi} = \sum_{j=1}^{4} \Delta F_{yi}{}^{j} \tag{33}$$

さらに，これを節点iの$t-\Delta t$における節点力$(F_{xi}|_{t-\Delta t}, F_{yi}|_{t-\Delta t})$に加えて，時刻tにおける変位抗力による節点力$(F_{xi}|_t, F_{yi}|_t)$を求める．

$$\begin{aligned} F_{xi}|_t &= F_{xi}|_{t-\Delta t} + \Delta F_{xi} \\ F_{yi}|_t &= F_{yi}|_{t-\Delta t} + \Delta F_{yi} \end{aligned} \tag{34}$$

DEM手法に関係する粘性定数η_iは，静的もしくは準静的な問題を対象として減衰項として使用する場合は，できるだけ臨界減衰時の値$2\sqrt{(mK_i)}$に近く設定することが望まれる．ここに，K_iは後出式(35)で定義される剛性係数であって，変位抗力ならびに運動方程式を式(32)と(36)の形で定式化するとき，節点iの節点力に関与する周辺4要素の剛性マトリックス$[K_i{}^j]$の各項絶対値の和が節点iの剛性K_iの目安と考えられるので，各節点ごと，各Δtごとに式(31)で計算するものとする．

一方，時間増分Δtについては，従来のDEMにおけると同様に，差分収束条件$\Delta t < 2\sqrt{(m/K_i)}$を用いて[6]，上述の$K_i$の存在範囲を考慮して決定すればよい．



図－6　節点の運動と要素の変形の概念図

節点の変位増分［DISP］[6]

節点i（質量m_i）は変位抗力，粘性抗力のもとに次の運動方程式に従って移動するとする．

$$\begin{aligned} m_i \ddot{u}_i + \eta_i \dot{u}_i + k_i u_i &= m_i g_x + f_{xi} \\ m_i \ddot{v}_i + \eta_i \dot{v}_i + k_i v_i &= m_i g_y + f_{yi} \end{aligned} \tag{35}$$

ここに，g_x, g_yは，重力加速度の成分である．また，f_{xi}, f_{yi}は節点に直接作用する外力であり，DSTNODで求められる分布荷重による等価節点荷重ベクトルを含むものである．(35)式に(34)式で求めた変位抗力による節点力を導入すると次式となる．

$$\begin{aligned} m_i \ddot{u}_i + \eta_i \dot{u}_i + F_{xi} &= m_i g_x + f_{xi} \\ m_i \ddot{v}_i + \eta_i \dot{v}_i + F_{yi} &= m_i g_y + f_{yi} \end{aligned} \tag{36}$$

これを時間増分Δtで差分表示し，加速度$(\ddot{u}, \ddot{v})$を未知数とする陽形式の連立方程式で近似すると，

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i &= \frac{1}{m_i}(m_i g_x + f_{xi} - F_{xi}) - \frac{1}{m_i}\Delta F_{xi} - \frac{\eta \Delta u_i}{m_i \Delta t} \\ \ddot{v}_i &= \frac{1}{m_i}(m_i g_y + f_{yi} - F_{yi}) - \frac{1}{m_i}\Delta F_{yi} - \frac{\eta \Delta v_i}{m_i \Delta t} \end{aligned} \tag{37}$$

同式において，右辺第一項の（）内および第2項の計算は，初期値を$(m_i g_x + f_{xi}, m_i g_y + f_{yi})$を節点力の初期値として取り込み，(33)式によって毎回得られる$(-\Delta F_{xi}, -\Delta F_{yi})$をこれに加算していけば自動的になされ，プログラム上は(34)式のように変位抗力のみを記憶する変数は用いていない．また，さきに述べたように，運動方程式はρgで相対化の後，プログラムに記述されていることに注意が必要である．したがって，求められる加速度成分も

gに対する相対値であって，以下(38)式以降の計算ではgを乗じた後の$(\ddot{u},\ddot{v})$を用いている．

式(37)から，各質点の加速度が求まれば，それを用いて順次次回のΔt増分に対する新しい速度，新しい変位増分，新しい節点座標が以下のように計算される．

$$\dot{u}_i=\dot{u}_i+\ddot{u}_i\Delta t,\quad \dot{v}_i=\dot{v}_i+\ddot{v}_i\Delta t \tag{38}$$

$$\Delta u_i=\dot{u}_i\Delta t,\quad \Delta v_i=\dot{v}_i\Delta t \tag{39}$$

$$x_i=x_i+\Delta u_i,\quad y_i=y_i+\Delta v_i \tag{40}$$

要素のひずみ・応力［STRCPX(ELMTYP, STR24(EMTRX, JACOB(DSHP), BMTRX(DSHP), PRTR1, PRTN1)］

各要素のひずみは(14)式で与えられるように計算されるが，Δt内の増分値として求められるものであるから，各Δt毎に加算しておかねばならない．たとえば，要素jについて略記すると以下のとおりとなる．

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}^e\Delta\mathbf{U}^e=[\mathbf{B}_1^e\ \ \mathbf{B}_2^e\ \ \mathbf{B}_3^e\ \ \mathbf{B}_4^e]\,[\Delta u_1^j,\Delta v_1^j,\cdots,\Delta u_4^j,\Delta v_4^j]^T \tag{41}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}\,|_t=\boldsymbol{\varepsilon}\,|_{t-\Delta t}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{42}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}_t=\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}_{t-\Delta t}+\begin{bmatrix}\Delta\varepsilon_x\\ \Delta\varepsilon_y\\ \Delta\gamma_{xy}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\,|_t=\boldsymbol{\sigma}\,|_{t-\Delta t}+\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{43}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}_t=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}_{t-\Delta t}+\mathbf{D}\begin{bmatrix}\Delta\varepsilon_x\\ \Delta\varepsilon_y\\ \Delta\gamma_{xy}\end{bmatrix}$$

FEM解析は引張力を正にしているので，ここにおいて，式(43)で与えられる応力成分から圧縮を正とした最大・最小主応力（σ_1，σ_3）に変換するものとする．最大・最小主応力および最大主応力のx軸からの傾きは次式で求める．

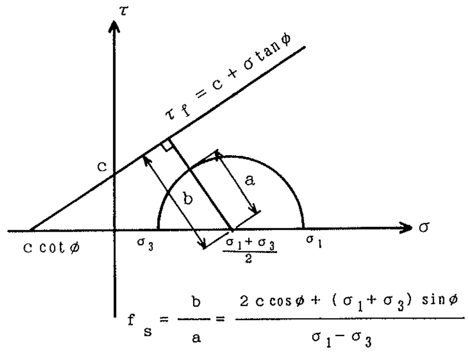
$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{4}+\tau_{xy}^2} \tag{44}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1-\sigma_y}\right) \tag{45}$$

その上で，図-7に示すクーロン規準：$\tau_f=c+\sigma\tan\phi$を降伏条件式に用い，主応力（σ_1，σ_3）なる点の安定度（破壊接近度の逆数）f_sを次式で定義する[7]．

$$f_s=\{2c\cdot\cos\phi+(\sigma_1+\sigma_3)\sin\phi\}/(\sigma_1-\sigma_3) \tag{46}$$

各要素について，4個の積分点のいずれか1点でも安定



図－7　降伏条件と安定度f_s
（圧縮応力が正）

度が1.0以下になればその時点(t)で要素の降伏とみなし，次回$(t+\Delta t)$の計算からそのヤング率Eを低下させることも可能である．ただし，通常のFEM解析と違ってDEM手法を用いた節点の刻々の運動が中心の大変形解析であるので要素に複雑な構成式を持ち込むよりも，DEMによる要素試験の数値実験[8]と同様な考えに立って，各要素の構成則はできるだけ単純化し，その分要素数を増やすことによってその集合体としての挙動が目標とする構成則に近づくことを期待するのがよいと考えている．

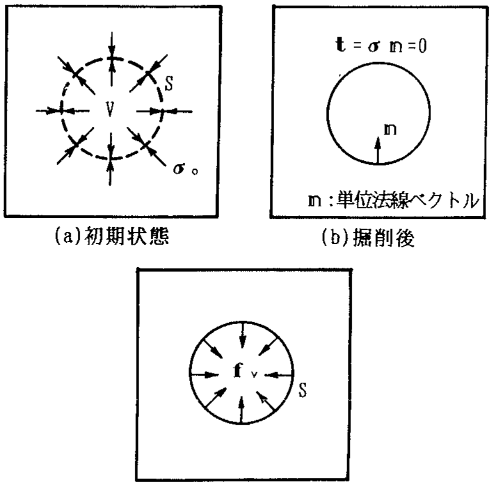
掘削解放力の算定［EXCA(JACOB(DSHP), BMTRX(DSHP), SHP)］

トンネルや斜面などの掘削を伴う問題に対応できるようサブモジュールが付加されている．このような問題に対しては，初期応力状態をどのように設定するかということが重要である．測定によるデータが存在することが最も望ましいことであるが，そのようなデータが存在しないときは，掘削前の形状，地盤条件等を考慮した解析モデルを仮定し，自重のみによる静止状態をもって初期応力状態とするのも１つの手段であろう．

図-8において，表面には外力は作用していないものとし，掘削領域Vと掘削解放面Sを考え，仮想仕事の原理を適用すると，S上での応力ベクトル$\mathbf{t}_o$は掘削領域中の応力$\boldsymbol{\sigma}_o$と物体力$\mathbf{g}=[0,-\gamma_t]^T$により，

$$\int_S\delta\mathbf{u}^T\mathbf{t}_o\,ds=\int_V(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_o-\delta\mathbf{u}^T\mathbf{g})\,dv \tag{47}$$

掘削後に掘削解放面上で応力ベクトルが0となるためには，これとは逆向きの力を加えてやればよい．したがって，



(a)初期状態　(b)掘削後

(c)掘削解放力 $\mathbf{f}_v$

図－８　掘削解放力

掘削解放力 $\mathbf{f}_v$ は

$$\int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_v ds = \int_V (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0) dv \tag{48}$$

と決定することができる.

(10), (14)式を導入すれば

$$\boldsymbol{F}_v = \int_V [\mathbf{N}^T \mathbf{g} - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0]\ dv \tag{49}$$

となる．そして，次式のように数値積分により各要素ごとに求めたのち，等価節点力として掘削解放面S上の節点に重ね合わせればよい.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_v^e &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} ((\mathbf{N}(\xi,\eta))^T \mathbf{g} - (\mathbf{B}(\xi,\eta))^T \boldsymbol{\sigma}_0) J d\xi d\eta \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_i c_j ((\mathbf{N}(\xi_i,\eta_j))^T \mathbf{g} \\ &\quad - (\mathbf{B}(\xi_i,\eta_j))^T \boldsymbol{\sigma}_0 |J_{ij}| \end{aligned} \tag{50}$$

３．変数一覧

本プログラムで用いられている代表的な変数の意味を説明する.

まず，以下の定数を与えることにより本プログラムが対応できる配列の大きさが決められる.

NNDG:節点数　　NELG:要素数
MATG:材料定数の種類数　　NNEM:1要素当り節点数
NBCG:基本境界条件を与える節点数

演算制御変数

IZN　:演算ステップ数

INITAL　:演算の条件を指定する変数で次のように使い分ける.

INITAL=0:初期データのみで演算開始
INITAL=1:INITAL=0の演算の後，同じ境界条件でさらに演算を再開するとき
INITAL=2:変位境界条件が変更されたとき
INITAL=3:INITAL=2の継続演算
INITAL=4:外力条件が変更されたとき
INITAL=5:INITAL=4の継続演算

IZNは，INITALが0→1→2→3･･･というように変化する一連の演算の中では，1ジョブ当りのステップ数を与えるものとなる．そこで，演算総ステップ数を格納する変数としてIZを用いている．ただし，IZはINITALが奇数の時には，継続演算であるとして前回の値を引き継ぐが，偶数の時は境界条件が変更されているので再度1にセットされるようになっている.

節点に関する定数

NEND　:入力された全節点数

X(･),Y(･)　:各節点のx,y座標値

U(･),UT(･)　:各節点の変位増分および速度
ただし，1次元配列であるので，I節点のx方向の変位はU(2*I-1)，y方向の変位はU(2*I)に格納される.

FE(･,･),FD(･,･):各節点における変位抗力および粘性抗力．第1パラメータは作用方向(1:x方向，2:y方向)，第2パラメーターは節点番号である.

FBN(･)　:各節点に与えられた質量

IFR(･)　:変位境界条件の識別（初期値0）
IFR(2*I-1)=1:節点Iはｘ方向強制変位境界上節点（固定を含む）．IFR(2*I)=1:節点Iはy方向強制変位境界上節点（固定を含む）

要素に関する変数

IEND　:入力された全要素数

NJ(･)　:要素を構成する節点の並び
最大9節点まで格納することが可能なようになっている.

NJ(1) ～NJ(9):1番要素構成節点
NJ(10)～NJ(18):2番要素構成節点
・・・
NJ(NNEM*(I-1)+1)～NJ(NNEM*I):I番要素構成節点
4節点要素の場合，最初の4番地のみデータは書き込まれる．すなわち，NJ(1)からNJ(4)まで，NJ(10)からNJ(13)まで，・・・とデータは格納され，その他は0が入力されたままである．

IETYP(・)　:要素のタイプ
4420:4辺形4節点2×2ガウス点平面応力要素
4421:4辺形4節点2×2ガウス点平面ひずみ要素

IEL(・)　:この要素を計算に組み入れるか
1:計算に組み入れる
0:計算に組み入れない
-1:掘削要素である

IFB(・)　:この要素に物体力を作用させるか
1:作用させる　0:作用させない

MP(・)　:この要素の材料定数番号

STR(・,・,・)　:各ガウス点における応力
第1パラメータ　1:σ_x　2:σ_y　3:τ_{xy}　4:σ_1　5:σ_3　6:σ_1の作用方向のx軸からの角度θ（反時計正）　7:Mohr-Coulomb規準に対する破壊接近度fs
第2パラメータ　ガウス点番号
第3パラメータ　要素番号

STN(・,・,・)　:各ガウス点におけるひずみ
第1から3パラメータまでSTRと同様．
ただし，STR(7,・,・)は未使用．

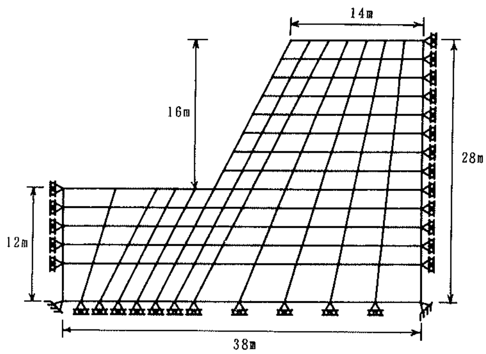
材料定数に関する変数

NKX　:入力された全材料定数の数

PK(・,・)　:材料定数
PK(1,・):弾性定数　PK(2,・):ポアソン比　PK(3,・):密度
PK(4,・):粘着力　PK(5,・):内部摩擦角
PK(6,・):（未使用）
第2パラメータは材料定数整理番号

変位境界条件に関する変数

NBDY(1,・)　:強制変位を与える節点番号
NBDY(2,・)　:強制変位の方向(1:x方向，2:y方向)
DBDY(・)　:強制変位の値（Δtあたりの増分値）



図－９　解析モデル

剛性行列に関する変数

CK(・,・)　:要素剛性マトリックス
DK(・,・)　:粘性定数
DK(1,・):x方向　DK(2,・):y方向
B(・,・)　:節点変位－ひずみ変換マトリックス
D(・,・)　:応力－ひずみマトリックス
RJACM(・,・)　:ヤコビアンマトリックス
RJACI(・,・)　:ヤコビアン逆マトリックス

数値積分に関する変数

GAUS(・,・)　:ガウス点の座標
WEIT(・,・)　:重み

4．入力データと解析例

図-9は盛土の解析モデルを示している．高さ16m，斜面部勾配1:0.5であり，左右対称性を考慮して左半分を解析領域としている．また，全節点数142，FEM要素数116よりなっており，1要素積分点数は4である．

このモデルに対応する初期データを図-10に示している．初期データの入力形式としては従来のFEMとほぼ同様に行うことができ，演算結果入出力ファイル名，演算制御変数，節点座標・・・・の順に書かれている．各データはその内容を説明する英文字列で始まり，ENDで終了，次の項目の入力に移る．たとえば，節点座標に関するところを見ると，'COORDINATES'で始まり，' END'の文字列で入力が終了する．このデータでは，INITAL=0であるので，初期データのみで演算が開始され，5000回の演算の後，'RUN1_5S'に結果が出力される．もし，INITAL≧1であれば，読み込みファイル'RUN1_0S'から継続用データが読み込まれ，所定の境界条件のもとで演算が再開

表－１　解析定数

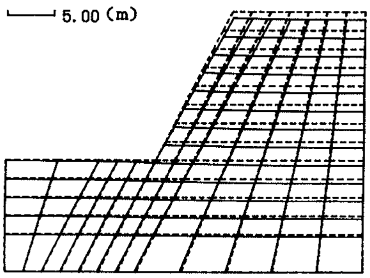
ヤング率	E=100kgf/cm^2 (9.8×10^{3}kpa)
密　度	ρ=2.65g/cm^3
ポアソン比	ν=0.3
時間増分	Δt=1.0×10^{-3}sec

```
SAMPLE DATA FOR FLEM ANALYSIS    [入力データのタイトル]
FILE NAME                        [読み込みファイルと書き出しファイル]
 RUN1_0S RUN1_5S
  END
CONTROL PARAMETER(INITAL,IZN)    [INITALと演算ステップ数]
   0 5000
  END
COORDINATES                      [節点座標]
   1   0.00000   0.00000
   2   2.00000   0.00000
   :
 142  38.00000  28.00000
  END
ELEMENT                          [要素に関するデータ]
   1 4421   1   2  15  14                              1   1   1
   2 4421   2   3  16  15                              1   1   1
   :
 116 4421 133 134 142 141                              1   1   1
  END
TIME STEP                        [時間増分Δｔ]
      0.001
  END
MATERIAL                         [材料定数]
  1     1000.00000   0.3      2.65      1.0      30.
  END
FORCE                            [外荷重]
CONCENTRATED LOAD                  (集中荷重)
  92        0.00000        0.00000
  END
DISTRIBUTED LOAD                   (分布荷重)
 110    3    2    -0.000    -0.000    -0.000
  END
  END
DISPLACEMENT                     [変位拘束条件]
   1   2   0.0
   2   2   0.0
   :
 142   1   0.0
  END
END                              [初期データの終了]
```

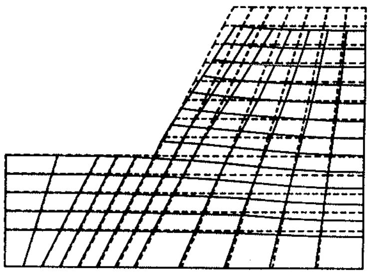
図－１０　初期入力データ

されることになる．初期データにおける節点座標は要素分割時のものであり，継続用データが読み込まれた時点でその値は更新される．さらに，継続用データとしては各節点における力，速度，変位増分，そして，各要素内積分点における応力，ひずみが読み込まれる．

表-1には，解析定数を示している．図-11(a)は自重のみの条件下で得られた静的安定状態であり，上辺での最大沈下量は0.81mを示す結果となっている．同図(b)は前述の降伏条件を適用して，粘着力c=100gf/cm^2 (9.8kpa)，内部摩擦角ϕ=30°のもとで，降伏した要素についてはヤング率を当初の1/10に低下させて求めた結果である．最大沈下量は約2.45mであり，(a)と比べて約3倍に大きくなっている．この結果から，2章で述べた各サブモジュールの機能が図-1に示したフローチャートに従い，うまく発揮されているものと判断している．なお，この計算はHITAC-M280D（鳥取大学情報処理センター）によって実施したが演算1000step（表-1の時間増分で実時間1秒）に約23分要している．



(a) t=30.0sec（降伏条件無）



(b) t=50.0sec（降伏条件有）

図－１１　変形図

5．まとめ

本文では，流動要素法解析プログラム‘FLEM’の概要について，解析手順に沿いまとめた．冗長な説明になることを避けるため，主要な手順，式のみについて示し，プログラム上の工夫については変数の説明として記したつもりである．現解析プログラムは，2次元平面問題用となっているが，すでに報告しているように解析法としての基礎は築かれたと考えている．今後，3次元化あるいは水との連成問題への適用等を通じて，技術的な改良，適用範囲の拡大を図る予定である．

なお，本研究は，株式会社 吉田組からの研究助成金（奨学寄付金）を受けて実施された．ここに記して，謝意を表する．

参考文献

1)木山英郎・藤村　尚・西村　強：軟岩や土質地盤の大変形解析のための(FLEM)の開発，第23回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集，pp.332-336，1991.

2)木山英郎・藤村　尚・西村　強：大変形解析用の流動要素法の提案，第26回土質工学発表会講演集，pp.1173-1174，1991.

3)O.C.Zienkiewicz : The Finite Element Method in Engineering Science,McGRAW-HILL,1971.

4)戸川隼人：有限要素法概論，培風館，1982.

5)市川康明・亀村勝美：有限要素法による数値解析入門；4.地盤の変形解析，土と基礎，Vol.36，No.9，pp.81-88，Vol.36，No.12，pp.77-85，1988.

6)Cundall,P.A. : Rational Design of Tunnel Suppots - A Cumputer Model for Rock Mass Behavior Using Interactive Graphics for the Input andOutput of Geometrical Data， Technical Report MRD-2-74，Minssouri River Division，U.S. Army Corps. of Engineers,1974.

7)林　正夫・日比野敏：地下の掘削に伴う地盤内の緩み領域の逐次的発達過程の解析法，第2回岩の力学国内シンポジウム，1967.

8)木山英郎・藤村　尚・西村　強：せん断モデルを用いた離散剛要素法の材料定数の検討、土木学会論文集，第382号／Ⅲ－7，PP. 167-174. 1987.